الأضواء

الصف الثالث الإعدادى
3
الفصل الدراسى الثانى



2026

الرياضيات

المحتويات

أولًا: الجبر والاحتمال

الوحدة الأولى



المعادلات:

الوحدة الثانية



الدوال الكسرية والعمليات عليها:

الوحدة الثالثة



الاحتمال:

ثانيًا: الهندسة المستوية

الوحدة الرابعة



الدائرة:

الوحدة الخامسة



الزوايا والأقواس فى الدائرة:

توزيع مقرر الرياضيات للصف الثالث الإعدادى

الفصل الدراسى الثانى (٢٠٢٥م - ٢٠٢٦م)

الخطة الأسبوعية : ٣ فترات

الشهر	م	التاريخ	الموضوعات: الجبر والإحصاء (فترة ونصف)	الموضوعات: الهندسة المستوية (فترة ونصف)	التقييمات والاختبارات	ملاحظات
فبراير ٢٠٢٦	١	٢٠٢٦/٢/٨	**الوحدة الأولى:** حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين بيانيًّا وجبريًّا	**الوحدة الرابعة:** الدائرة – تعاريف ومفاهيم أساسية		
	٢	٢٠٢٦/٢/١٥	تمارين على حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين جبريًّا	أوضاع نقطة ومستقيم ودائرة بالنسبة لدائرة	تقييم أسبوعى	
	٣	٢٠٢٦/٢/٢٢	حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد بيانيًّا	تعيين الدائرة – علاقة أوتار الدائرة بمركزها	تقييم أسبوعى	
مارس ٢٠٢٦	٤	٢٠٢٦/٣/١	حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد جبريًّا باستخدام القانون العام	تابع: علاقة أوتار الدائرة بمركزها	تقييم أسبوعى	
	٥	٢٠٢٦/٣/٨	حل معادلتين فى متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية	**الوحدة الخامسة:** الزاوية المركزية وقياس الأقواس	تقييم أسبوعى	
	٦	٢٠٢٦/٣/١٥	تابع: حل معادلتين فى متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية.	العلاقة بين الزاويتين المحيطية والمركزية المشتركتين فى نفس القوس	الاختبار الشهرى	
	٧	٢٠٢٦/٣/٢٢	**الوحدة الثانية:** مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود	الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس	تقييم أسبوعى	
	٨	٢٠٢٦/٣/٢٩				إجازة عيد الفطر المبارك
إبريل ٢٠٢٦	٩	٢٠٢٦/٤/٥	الدالة الكسرية الجبرية – تساوى كسرين جبريين	الشكل الرباعى الدائرى	تقييم أسبوعى	
	١٠	٢٠٢٦/٤/١٢	العمليات على الكسور الجبرية	خواص الشكل الرباعى الدائرى	تقييم أسبوعى	
	١١	٢٠٢٦/٤/١٩	تمارين على العمليات على الكسور الجبرية	تابع: خواص الشكل الرباعى الدائرى		إجازة ٢١ إبريل شم النسيم – إجازة ٢٥ إبريل عيد تحرير سيناء
	١٢	٢٠٢٦/٤/٢٦	**الوحدة الثالثة:** العمليات على الأحداث	العلاقة بين مماسات الدائرة	الاختبار الشهرى	إجازة عيد العمال
مايو ٢٠٢٦	١٣	٢٠٢٦/٥/٣	الحدث المكمل – الفرق بين حدثين	الزاوية المماسية		
	١٤	٢٠٢٦/٥/١٠	تمارين على الاحتمالات	تمارين على الوحدة الخامسة	تقييم أسبوعى	
	١٥	٢٠٢٦/٥/١٧	مراجعة عامة على المنهج			
	١٦	٢٠٢٦/٥/٢٤	بداية امتحانات الفصل الدراسى الثانى			

رموز رياضية

ط	مجموعة الأعداد الطبيعية
ص	مجموعة الأعداد الصحيحة
ن	مجموعة الأعداد النسبية
نَ	مجموعة الأعداد غير النسبية
ح	مجموعة الأعداد الحقيقية
ح*	ح - {٠} مجموعة الأعداد الحقيقية عدا الصفر
$\sqrt{\text{أ}}$	الجذر التربيعى الموجب للعدد أ حيث أ > ٠
$\sqrt[٣]{\text{أ}}$	الجذر التكعيبى للعدد أ
[ب ، أ]	الفترة المغلقة
]ب ، أ[	الفترة المفتوحة
]ب ، أ]	الفترة نصف مفتوحة أو نصف مغلقة
]∞ ، أ]	الفترة غير المحدودة
≡	يطابق
ن (أ)	عدد عناصر الحدث أ
ف	فضاء العينة
∀	لكل
//	يوازى
⊥	عمودى على

$\overline{\text{أ ب}}$	القطعة المستقيمة أ ب
$\overleftarrow{\text{أ ب}}$	الشعاع أ ب
$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$	المستقيم أ ب
أ ب	طول القطعة المستقيمة أ ب
ق (∠ أ)	قياس زاوية أ
ق ($\frown$ أ ب)	قياس القوس أ ب
~	يشابه
<	أكبر من
≤	أكبر من أو يساوى
>	أقل من
≥	أقل من أو يساوى
ل (أ)	احتمال وقوع الحدث أ
أَ	الحدث المكمل للحدث أ
ل (أَ)	احتمال عدم وقوع الحدث أ
ل (أ ∪ ب)	احتمال وقوع الحدث أ أو الحدث ب أو كليهما (وقوع أحدهما على الأقل).
ل (أ ∩ ب)	احتمال وقوع الحدثين أ ، ب معًا
ل (أ - ب)	احتمال وقوع الحدث أ وعدم وقوع الحدث ب أو وقوع الحدث أ فقط

أولًا: الجبر والاحتمال



الوحدة الأولى

المعادلات



أهداف دروس الوحدة

◀ بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون الطالب قادرًا على أن:

الدرس الأول: حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين جبريًا وبيانيًا

- يحل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين بيانيًا.
- يحل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين جبريًا بطريقة الحذف وطريقة التعويض.
- يحل تطبيقات على معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين.

الدرس الثانى: حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد بيانيًا وجبريًا

- يحل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد بيانيًا.
- يحل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد باستخدام القانون العام.
- يتعرف تطبيقات على حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد.

الدرس الثالث: حل معادلتين فى متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية

- يحل معادلتين فى متغيرين؛ إحداهما من الدرجة الأولى، والأخرى من الدرجة الثانية.
- يتعرف تطبيقات على حل معادلتين فى متغيرين؛ إحداهما من الدرجة الأولى، والأخرى من الدرجة الثانية.



ذاكر — الدرس 1

حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين جبريًا وبيانيًا

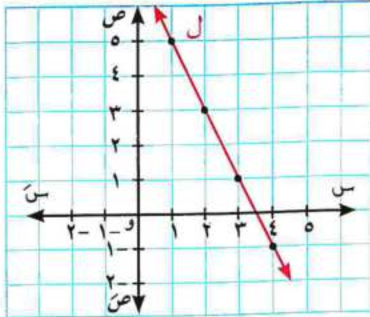


فكر وناقش سبق أن درست:

الصورة العامة لمعادلة الدرجة الأولى ذات المتغيرين وهى:

أ س + ب ص = حـ حيث أ ∈ ع، ب ∈ ع، حـ ∈ ع ، «أ ، ب لا يساويان الصفر معًا»،

والتى يمثلها بيانيًا **خط مستقيم**.



فمثلًا: أوجد ثلاثة أزواج مرتبة تحقق المعادلة:

٢ س + ص = ٧، ومثلها بيانيًا.

∴ ص = ٧ − ٢ س

س	١	٢	٤
ص	٥	٣	-١

الأزواج المرتبة (١ ، ٥) ، (٢ ، ٣) ، (٤ ، -١) تنتمى للخط المستقيم و يوجد عدد لا نهائى من الأزواج المرتبة التى تحقق المعادلة: ص = ٧ − ٢ س

نرسم المستقيم ل يمر بتلك الأزواج المرتبة.

لاحظ أن

مجموعة حل المعادلة فى ع × ع هى **مجموعة غير منتهية من الأزواج المرتبة.**

أولًا حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين بيانيًا:

حل معادلتين آنيًا «فى آن واحد» بيانيًا هو إيجاد الزوج المرتب (أو الأزواج المرتبة) التى تُمثل نقط تقاطع الخطين الممثلين للمعادلتين.

فمثلًا: إذا كان لدينا المعادلتان: ٢ س − ص = −٣ ، س + ص = ٦ فنتبع الآتى:

الخطوة الأولى: نكتب المعادلتين على الشكل { $ل_1$: ص = ٢ س + ٣ ، $ل_2$: ص = ٦ − س }

الخطوة الثانية: إيجاد بعض الأزواج المرتبة التى تُمثل حلًّا لكل معادلة:

١ جدول المعادلة الأولى: $ل_1$: ص = ٢ س + ٣

س	-١	صفر	١
ص	١	٣	٥

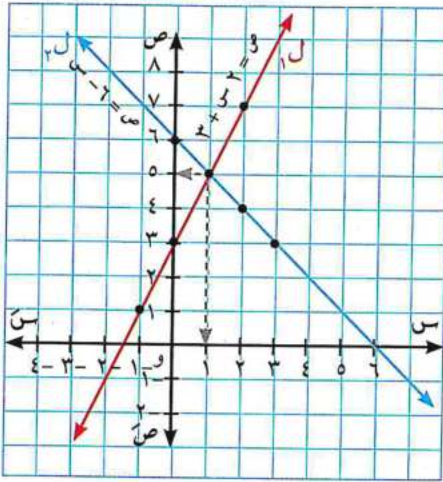
٢ جدول المعادلة الثانية: $ل_2$: ص = ٦ − س

س	صفر	١	٢
ص	٦	٥	٤

الخطـوة الثالثة:

الرسم فى المستوى الديكارتى:

حيث تمثل المعادلتان بيانيًّا بالمستقيمين $ل_1$ ، $ل_2$ على شكل واحد فى المستوى الديكارتى.



نجد أن $ل_1$ ، $ل_2$ يتقاطعان فى النقطة (١ ، ٥) وهى تنتمى إلى $ل_1$ ، $ل_2$ حيث يحقق إحداثياها المعادلتين فى آنٍ واحد «آنيًّا».

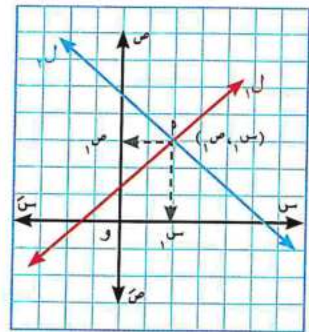
∴ مجموعة الحل للمعادلتين معًا = {(١ ، ٥)}

لاحظ أن مجموعة الحل عبارة عن نقطة تقاطع المستقيم $ل_1$ مع المستقيم $ل_2$

حالات حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين بيانيًّا:

الحالة الأولى:

$ل_1$ ، $ل_2$ متقاطعان فى نقطة واحدة



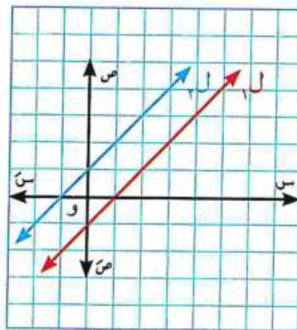
$ل_1 \cap ل_2$ = {أ} حيث أ($س_1$ ، $ص_1$)

∴ م. ح = {($س_1$ ، $ص_1$)}

عدد الحلول: حل وحيد.

الحالة الثانية:

$ل_1$ ، $ل_2$ متوازيان



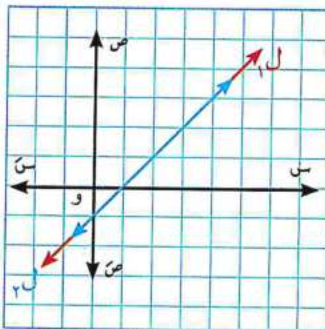
$ل_1$ // $ل_2$ ، $ل_1 \cap ل_2 = \varnothing$

∴ مجموعة الحل = $\varnothing$

عدد الحلول: يساوى صفرًا.

الحالة الثالثة:

$ل_1$ ، $ل_2$ منطبقان



$ل_1$ ، $ل_2$ منطبقان

$ل_1 \cap ل_2 = ل_1$ أو $ل_2$

∴ عدد الحلول: عدد لا نهائى.

مثال ١

أوجد بيانيًا مجموعة الحل فى ح × ح للمعادلتين:

ص + س = ٧ ، ص = ٢ س + ١

الحـل

المعادلة الأولى:

$ل_١$: ص + س = ٧

ص = ٧ − س

عندما س = ٢ ⟸ ص = ٧ − ٢ = ٥

عندما س = ٣ ⟸ ص = ٧ − ٣ = ٤

عندما س = ٤ ⟸ ص = ٧ − ٤ = ٣

س	٢	٣	٤
ص	٥	٤	٣

المعادلة الثانية:

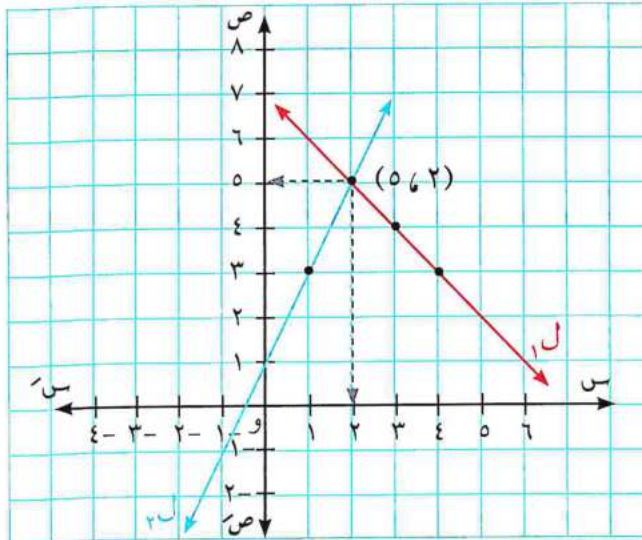
$ل_٢$: ص = ٢ س + ١

عندما س = ٢ ⟸ ص = ٢ (٢) + ١ = ٥

عندما س = ١ ⟸ ص = ٢ (١) + ١ = ٣

عندما س = ٠ ⟸ ص = ٢ (٠) + ١ = ١

س	٢	١	٠
ص	٥	٣	١



من الرسم نلاحظ أن:

المستقيمين متقاطعان فى نقطة واحدة هى (٢ ، ٥).

∴ مجموعة الحل = {(٢ ، ٥)}

س؟ سؤال ١

أوجد بيانيًا فى ح × ح مجموعة الحل للمعادلتين: ٣ص + س = ٧ ، ٥س − ٣ = ص

مثال ٢

أوجد بيانيًا فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين:

٢س + ص = ٣ ، ٢ص + ٤س = ٢

الحل

$ل_١$: ٢س + ص = ٣

ص = ٣ – ٢س

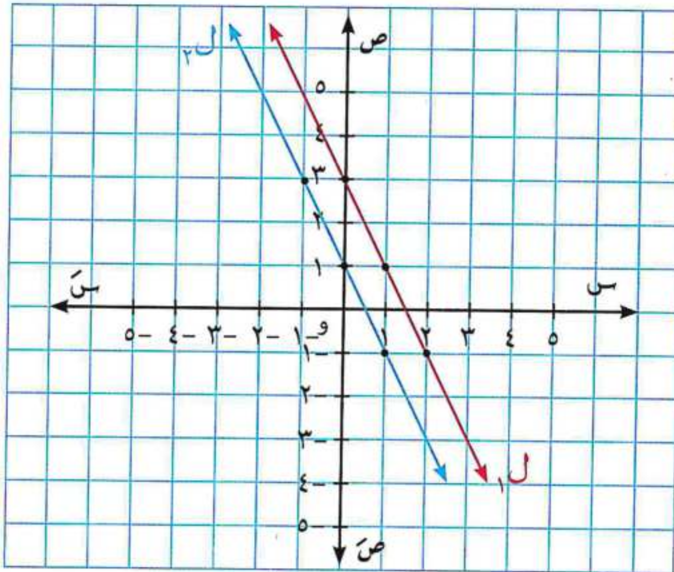
س	٠	١	٢
ص	٣	١	–١

$ل_٢$: ٢ص + ٤س = ٢ (÷٢)

ص + ٢ س = ١

ص = ١ – ٢ س

س	–١	٠	١
ص	٣	١	–١



من الرسم نلاحظ أن:

المستقيمين متوازيان: $ل_١ \cap ل_٢ = \varnothing$

∴ م.ح = $\varnothing$ = { }

سؤال ٢

أوجد بيانيًا فى ح × ح مجموعة الحل للمعادلتين: س – ٢ص = ٤ ، ٢س – ٤ص = ٢

مثـال ٣

أوجـد بيانيًّـا فى ع × ع مجموعـة حل المعادلتـين:

٣س + ص = ٤ ، ٢ص + ٦س = ٨

الحـل

$ل_1$: ٣س + ص = ٤

ص = ٤ – ٣س

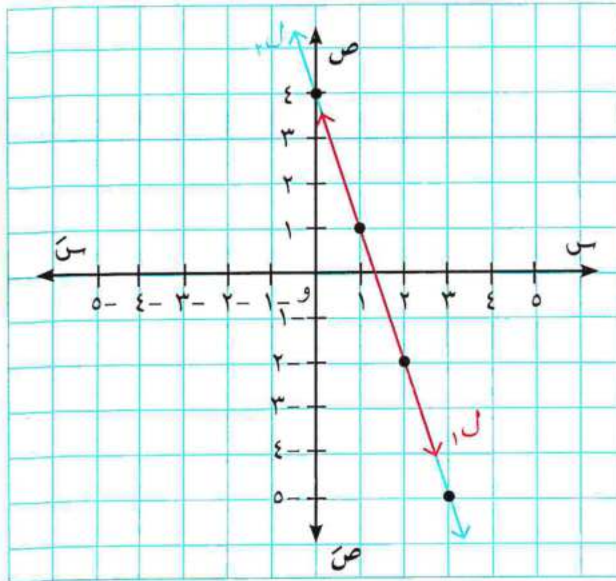
س	٠	١	٢
ص	٤	١	–٢

$ل_2$: ٢ص + ٦س = ٨ (÷٢)

ص + ٣س = ٤

ص = ٤ – ٣س

س	٠	١	٢
ص	٤	١	–٢



من الرسم نلاحظ أن: المستقيمين منطبقان والمعادلتين لهما عدد لا نهائى من الحلول.

∴ مجموعة الحل = {(س ، ص) ∈ ع × ع: ص = ٤ – ٣س}

سؤال ٣

أوجد بيانيًّا فى ع × ع مجموعة الحل للمعادلتين: ٢س + ص = ١ ، ٢ص = ٢ – ٤ س

طرق إيجاد عدد الحلول للمعادلتين بدون الرسم البيانى:



ميل الخط المستقيم المُمَثل بالمعادلة:

أ س + ب ص + حـ = ٠ هو م = $\frac{-أ}{ب}$

الطريقة الأولى:

نوجد ميلى المستقيمين $ل_1$ ، $ل_2$

إذا كان

ميل $ل_1$ ≠ ميل $ل_2$

- المستقيمان متقاطعان فى نقطة واحدة
- عدد الحلول = ١

ميل $ل_1$ = ميل $ل_2$

نقوم بإيجاد نقطتى تقاطع المستقيمين مع محور الصادات

(وذلك بوضع س = ٠ فى كل من المعادلتين وإيجاد قيمة ص المناظرة)

إذا كانت النقطتان

منطبقتين

- يكون المستقيمان متوازيين ومنطبقين ويكون عدد الحلول لا نهائيًا

مختلفتين

- يكون المستقيمان متوازيين وغير منطبقين ويكون عدد الحلول = صفر

مثـال ٤

أوجـد عـدد حلول كل زوج من المعـادلات الآتيـة:

١ $ل_1$: ٢س + ص = ٧ ، $ل_2$: ٤س + ٥ص = ٣

٢ $ل_1$: ٣س − ص + ٥ = ٠ ، $ل_2$: ٢ص − ٦س = ١٠

٣ $ل_1$: س − ٥ص = ٤ ، $ل_2$: ص = $\frac{1}{5}$س + ٢

الحـل

بفـرض أن ميـل $ل_1$ هو $م_1$ ، ميـل $ل_2$ هو $م_2$

١ ∵ $م_1$ = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-2}{1}$ = -2 ، $م_2$ = $\frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$ = $\frac{-4}{5}$

∴ $م_1 \neq م_2$ ∴ المستقيمان متقاطعان فى نقطة واحدة ∴ عـدد الحلـول = ١

٢ ∵ $م_١ = \frac{-٣}{-١} =$ ٣ ، $م_٢ = \frac{٦}{٢} =$ ٣ ∴ $م_١ = م_٢$

بالتعويض فى المعادلتين عن س = ٠

∴ المستقيمان يقطعان محور الصادات فى نفس النقطة وهى (٠ ، ٥)

∴ المستقيمان منطبقان ⟸ عدد الحلول لا نهائى

حل آخر :

بقسمة طرفى معادلة المستقيم $ل_٢$ على ٢

نجد أن: $\frac{٢ص}{٢} - \frac{٦س}{٢} = \frac{١٠}{٢}$

∴ ص − ٣س = ٥

⟸ ٣س − ص + ٥ = ٠ وهى معادلة المستقيم $ل_١$

∴ المستقيمان منطبقان

∴ عدد الحلول عدد لا نهائى

٣ $م_١ = \frac{-١}{-٥} = \frac{١}{٥}$ ، $م_٢ = \frac{١}{٥}$ ⟸ ∴ $م_١ = م_٢$

∵ المستقيم $ل_١$ يقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، $\frac{-٤}{٥}$)

، ∵ المستقيم $ل_٢$ يقطع محور الصادات فى النقطة (٠ ، ٢)

∴ المستقيمان متوازيان وغير منطبقين ∴ عدد الحلول = ٠

س؟ سؤال ٤

أوجد عدد حلول كل زوج من المعادلات الآتية:

١ ٢س + ٣ص = ١٢ ، س + ٢ص = ١

٢ $\frac{٢}{٣}$س − ص = −٣ ، ٢س − ٣ص = ٦

٣ ٢ص − ٨س − ١٤ = ٠ ، ٤س − ص = −٧

الطريقة الثانية: لدينا المعادلتان $\begin{cases} ل_1: ٱ_1 س + ب_1 ص = ح_1 \\ ل_2: ٱ_2 س + ب_2 ص = ح_2 \end{cases}$ يجب وضع المعادلتين فى هذه الصورة

١ إذا كان: $\frac{ٱ_1}{ٱ_2} \neq \frac{ب_1}{ب_2}$

فإن: المستقيمين **متقاطعان** فى نقطة واحدة.

ويكون عدد الحلول: حلًّا وحيدًا.

٢ إذا كان: $\frac{ٱ_1}{ٱ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} \neq \frac{ح_1}{ح_2}$

فإن: المستقيمين **متوازيان** وغير منطبقين.

ويكون عدد الحلول: صفرًا.

٣ إذا كان: $\frac{ٱ_1}{ٱ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{ح_1}{ح_2}$

فإن: المستقيمين **متوازيان** و **منطبقان**.

ويكون عدد الحلول: عددًا لا نهائيًا.

مثـال ٥ اختر الإجابة الصحيحة مع تفسير الحل:

١ عدد حلول المعادلتين: س + ٢ص = ٣ ، ٢س + ٤ص + ٦ = ٠ هو .... (الدقهلية ٢٠٢٣)

(أ) حل وحيد (ب) حلان (جـ) عدد لا نهائى من الحلول (د) صفر

٢ إذا كان للمعادلتين: س+ ٢ص= ١ ، ٢س +ٱ ص = ٥ حل وحيد، فإن ٱ ∈ ع − {......} (القليوبية ٢٠٢٤)

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) −٢

٣ إذا كان المستقيمان: ٱس + ٢ص = ٣ ، ٣س + ب ص = ٩ منطبقين، فإن: ٱ + ب = ...

(أ) ٧ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٦

الحـل

١ عدد الحلول = صفر

التفسير: نضع المعادلتين على الصورة س + ٢ص = ٣ ، ٢س + ٤ص = −٦

$\because \frac{ٱ_1}{ٱ_2} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{ب_1}{ب_2} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{ح_1}{ح_2} = \frac{٣}{-٦} = -\frac{١}{٢}$

$\therefore \frac{ٱ_1}{ٱ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} \neq \frac{ح_1}{ح_2}$ ∴ المستقيمان متوازيان وغير منطبقين

٢ ٱ ∈ ع − {٤}

التفسير: ∵ للمعادلتين حلاً وحيدًا:

$\therefore \frac{ٱ_1}{ٱ_2} \neq \frac{ب_1}{ب_2}$ ∴ $\frac{١}{٢} \neq \frac{٢}{ٱ}$ ∴ ٱ ≠ ٤

٣ ٱ + ب = ٧

التفسير: ∵ المستقيمين منطبقان ∴ $\frac{ٱ_1}{ٱ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{ح_1}{ح_2}$ ∴ $\frac{ٱ}{٣} = \frac{٢}{ب} = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$

∴ $\frac{ٱ}{٣} = \frac{١}{٣}$ ⇐ ٱ = ١ ، $\frac{٢}{ب} = \frac{١}{٣}$ ⇐ ب = ٦

ثانيًا حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين جبريًا:

يمكن حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين جبريًّا بطريقتين مختلفتين؛ وهما طريقة «التعويض» أو طريقة «الحذف» كما يتضح من الأمثلة الآتية:

مثال ٦

أوجد فى ع × ع مجموعة حل المعادلتين: ٢ س + ص = ٥ (١) ، ٤ س − ص = ١ (٢)

الحل

أولًا: بطريقة التعويض:

- نكتب أحد المتغيرين ص أو س بدلالة المتغير الآخر من المعادلة الأولى أو الثانية.

وبذلك تكون المعادلة (١): ص = ٥ − ٢ س ⟸ (٣)

- بالتعويض فى المعادلة (٢)

∴ ٤ س − (٥ − ٢ س) = ١ ∴ ٤ س − ٥ + ٢ س = ١

∴ ٦ س = ١ + ٥ ∴ ٦ س = ٦ (بالقسمة على ٦)

∴ س = $\frac{٦}{٦}$ ∴ س = ١

- نستخدم قيمة س = ١ بالتعويض بها فى المعادلة (٣) لإيجاد قيمة ص

نجد أن: ص = ٥ − ٢ × ١ ∴ ص = ٣ ∴ م . ح = {(١ ، ٣)}

ثانيًا: بطريقة الحذف:

- إعادة كتابة المعادلتين وملاحظة معامل كل من س ، ص

٢ س + ص = ٥ (١)

٤ س − ص = ١ (٢)

بالجمع

٦ س = ٦

لأن معامل ص فى المعادلة (١) هو المعكوس الجمعى لمعامل ص فى المعادلة (٢)؛ لذا قمنا بجمع المعادلتين للتخلص من المجهول ص.

∴ س = $\frac{٦}{٦}$ ∴ س = ١

- بالتعويض فى أى من المعادلتين (١) أو (٢) عن قيمة س

بالتعويض فى المعادلة (١) ∴ ٢ × ١ + ص = ٥ ∴ ص = ٥ − ٢

∴ ص = ٣ ∴ م . ح = {(١ ، ٣)}

مثال ٧

أوجد فى ع × ع مجموعة الحل للمعادلتين: س + ص = ٦ (١) ، ٢س − ٣ص = ٧ (٢)

الحل

من (١) ص = ٦ − س ⟸ (٣)

وبالتعويض فى المعادلة (٢) عن ص ∴ ٢س − ٣ (٦ − س) = ٧ ∴ ٢س − ١٨ + ٣س = ٧

∴ ٥س = ٧ + ١٨ ∴ ٥س = ٢٥ ∴ س = ٥

وبالتعويض فى المعادلة (٣) عن قيمة س لإيجاد قيمة ص ∴ ص = ٦ − ٥ ∴ ص = ١

∴ م.ح = {(٥ ، ١)}

مثال ٨

أوجد جبريًّا م . ح للمعادلتين: ٢س − ٣ص = ٧ (١) ، ٣س + ٢ص = ٤ (٢)

الحل

لكى نحذف المتغير ص نضرب المعادلة الأولى × ٢ ونضرب المعادلة الثانية × ٣ ثم نجمع المعادلتين الناتجتين.

∴ ٤س − ٦ص = ١٤

٩س + ٦ص = ١٢

بالجمع

١٣ س = ٢٦ ∴ س = $\frac{٢٦}{١٣}$ ∴ س = ٢

بالتعويض فى المعادلة (١) لإيجاد قيمة ص:

٢ × ٢ − ٣ص = ٧ ∴ ٤ − ٣ص = ٧ ∴ ٤ − ٧ = ٣ ص

−٣ = ٣ص ∴ ص = −١ م . ح = {(٢ ، −١)}

سؤال ٥

أوجد جبريًّا فى ع × ع مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية:

(١) س + ص = ٧ ، س − ص = ١ (٢) ٣س + ٤ص = ٢٤ ، س − ٢ص + ٢ = ٠ (أسوان ٢٠٢٤)

(٣) ٣س + ٢ص = ٤ ، س − ٣ص = ٥ (٤) ٢س + ص = ٥ ، ٢ص + ٤س = ١٠

مثـال ٩

أوجـد قيمتى a ، b علماً بأن (−٢ ، ٣) حـل للمعادلتـين.

٣ a س + b ص + ٩ = ٠ ، ٢ a س + b ص + ٧ = ٠

الحـل

∵ (−٢ ، ٣) حل للمعادلة: ٣ a س + b ص + ٩ = ٠

∴ −٦ a + ٣ b = −٩ ⟸ ١

∵ (−٢ ، ٣) حل للمعادلة: ٢ a س + b ص + ٧ = ٠

∴ −٤ a + ٣ b = −٧ ⟸ ٢

لكى نحذف المتغير b نضرب المعادلة ١ × −١ ونبقى على المعادلة ٢ كما هى ثم نجمع المعادلتين:

٦ a − ٣ b = ٩

−٤ a + ٣ b = −٧

بالجمع

٢ a = ٢

∴ a = ١

وبالتعويض فى المعادلة ١ :

∴ −٦ + ٣ b = −٩

∴ ٣ b = −٣

∴ b = −١

سؤال ٦

١ أوجد قيمتى a ، b علماً بأن (−٣ ، ١) حل للمعادلتين: a س + b ص − ٤ = ٠ ، ٣ a س + b ص = ١٦

٢ إذا كان: (٣ ، ٤) حلًّا للمعادلتين a س + ص = ١٠ ، b س + a ص = ١١

فأوجد قيمة المقدار : ٧ a + ٦ b

ثالثًا تطبيقات على حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين:

مثال ١٠

عددان صحيحان مجموعهما ٤٤ والفرق بينهما ١٤، أوجد العددين.

الحل

نفرض أن العدد الأكبر = س ، العدد الأصغر = ص

∴ س + ص = ٤٤ ← (١)

س − ص = ١٤ ← (٢)

بالجمع

∴ ٢س = ٥٨ ∴ س = ٢٩

بالتعويض فى (١) : ∴ ٢٩ + ص = ٤٤

∴ ص = ٤٤ − ٢٩ = ١٥ ∴ العددان هما ٢٩ ، ١٥

مثال ١١

عـددان مجموعهما ٥٣ وخارج قسمة الأكبر على الأصغر يساوى ٣ والباقى ٥، أوجـد العددين.

الحل

نفرض أن العدد الأكبر = س والعدد الأصغر = ص

∴ س + ص = ٥٣ (١) ، س = ٣ص + ٥ (٢)

من (٢) ، وبالتعويض فى (١) :

∴ ٣ص + ٥ + ص = ٥٣ ∴ ٤ ص = ٥٣ − ٥ ∴ ٤ ص = ٤٨ ∴ ص = ١٢

وبالتعويض عن ص فى (٢)

∴ س = ٣ (١٢) + ٥ ∴ س = ٤١ ∴ العددان هما ٤١ ، ١٢

تذكـر أن

المقسوم = (خارج القسمة × المقسوم عليه) + الباقى

س = ٣ × ص + ٥

سؤال ٧

١ عددان أحدهما ضعف الآخر، وثلاثة أمثال العدد الأكبر يزيد على العدد الأصغر بمقدار ١٤٠ أوجد العددين.

٢ إذا كان ثمن ثلاث قصص وقلمين هو ٢١ جنيهًا، وكان ثمن القصة يزيد على ثمن القلم بجنيهين، فأوجد ثمن كل من القلم والقصة.

مثال ١٢

عدد مكون من رقمين مجموعهما ٧، إذا عكسنا وضع الرقمين، فإن العدد الناتج يزيد على العدد الأصلى بمقدار ٩. أوجد العدد الأصلى.

الحل

نفرض أن رقم الآحاد = س

رقم العشرات = ص

	آحاد	عشرات	قيمة العدد
العدد الأصلى	س	ص	س + ١٠ ص
العدد الناتج بعد عكس الرقمين	ص	س	ص + ١٠ س

س + ص = ٧ ⟸ ١

(ص + ١٠ س) − (س + ١٠ ص) = ٩ ∴ ص + ١٠ س − س − ١٠ ص = ٩

∴ ٩ س − ٩ ص = ٩ (بالقسمة على ٩) ∴ س − ص = ١ ⟸ ٢

بجمع ١ ، ٢ ∴ ٢ س = ٨ ∴ س = ٤

بالتعويض فى المعادلة ٢ ∴ ٤ − ص = ١ ∴ ص = ٣ ∴ العدد الأصلى = ٣٤

مثال ١٣

مستطيل محيطه ٢٤ سم، وإذا نقص طوله ٤ سم وزاد عرضه ٢ سم صار مربعًا. أوجد مساحة المربع.

الحل

نفرض أن طول المستطيل = س سم ، عرض المستطيل = ص سم

∴ س + ص = ١٢ ⟸ ١ ، س − ٤ = ص + ٢

∴ س − ص = ٦ ⟸ ٢

بجمع ١ ، ٢ ∴ ٢ س = ١٨ ∴ س = ٩

وبالتعويض فى ١ ∴ ٩ + ص = ١٢ ∴ ص = ٣

∴ طول ضلع المربع = ٩ − ٤ = ٥ سم

∴ مساحة المربع = ٥ × ٥ = ٢٥ سم^2

تذكر أن

الطول + العرض = $\frac{1}{2}$ المحيط

سؤال ٨

عدد مكون من رقمين مجموعهما ١١، وإذا عكس وضع الرقمين فإن العدد الناتج يزيد على العدد الأصلى بمقدار ٢٧، فما العدد الأصلى؟

مثال ١٤

منذ سنتين كان عمر رجل يساوى عشرة أمثال عمر ابنه، وبعد أربع سنوات من الآن يصير عمر الأب أربعة أمثال عمر ابنه، أوجد عمر كل منهما الآن.

الحل

نفرض أن عمر الرجل الآن = س سنة ، ومنذ سنتين س – ٢ وبعد ٤ سنوات من الآن س + ٤

نفرض أن عمر الابن الآن = ص سنة ، ومنذ سنتين ص – ٢ وبعد ٤ سنوات من الآن ص + ٤

منذ سنتين: (س – ٢) = ١٠ (ص – ٢) ∴ س – ٢ = ١٠ ص – ٢٠

∴ س – ١٠ ص = –١٨ ⟸ (١)

وبعد ٤ سنوات من الآن: (س + ٤) = ٤ (ص + ٤)

س + ٤ = ٤ ص + ١٦ ∴ س – ٤ ص = ١٢ ⟸ (٢)

بضرب المعادلة (١) × –١ ∴ – س + ١٠ ص = ١٨ ⟸ (٣)

بجمع المعادلتين (٢) ، (٣) ∴ ٦ص = ٣٠ ∴ ص = ٥

بالتعويض فى المعادلة (١) س – ٥٠ = –١٨ ∴ س = ٣٢

∴ عمر الرجل الآن = ٣٢ سنة ، عمر ابنه الآن = ٥ سنوات.

الربط بالتكنولوجيا:



حل معادلتين آنيتين من الدرجة الأولى فى مجهولين

للتأكد من صحة حل المعادلتين: ٢س+ ص = ٥ ، ٤س – ص = ١

(**على سبيل المثال**) باستخدام الحاسبة العلمية نتبع الخطوات التالية:

نضغط على مفتاح العمليات **Mode** ونختار من القائمة **EQN**

وذلك بكتابة الرقم المكتوب أمامها، ثم نختار المعادلة الخطية $a_n x + b_n y = c_n$

ندخل معاملات x , y وهى a_n , b_n والحد المطلق c_n على الترتيب للمعادلة الأولى ثم للمعادلة الثانية

مع ملاحظة ضغط مفتاح الإدخال = يعطى قيمة x , y وهو حل المعادلتين ($x = 1$, $y = 3$)

سؤال ٩

باستخدام الآلة الحاسبة العلمية أوجد مجموعة حل المعادلتين: ٢س + ٤ص = ٦ ، ٢ ص + ٤ س = ٠

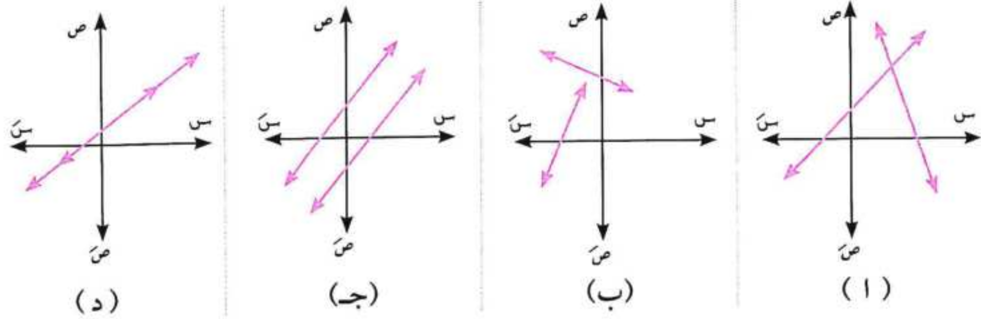


تدريبات الأضـــواء

أولًا حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين بيانيًا:

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ أى من الأشكال الآتية يمثل معادلتين من الدرجة الأولى مجموعة حلهما المجموعة الخالية؟ (بورسعيد ٢٠٢٤)



٢ المستقيمان الممثلان للمعادلتين: س + ٥ ص = ١ ، س + ٥ ص − ٨ = ٠ يكونان ....

(أ) منطبقين (ب) متقاطعين وغير متعامدين
(جـ) متعامدين (د) متوازيين (أسيوط ٢٠٢٤)

٣ عدد حلول المعادلتين: س + ص = ١ ، س + ص = ٢ معًا فى ع×ع هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى (سوهاج ٢٠٢٤)

٤ عدد حلول المعادلة س = ٧ فى ع×ع هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى (القاهرة ٢٠٢١)

٥ عدد حلول المعادلة ٢س − ص = ١ فى ع×ع هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) عدد لا نهائى (بورسعيد ٢٠٢٤)

٦ المستقيمان: س + ص = ٠ ، ٢ ص − س = ٠ يتقاطعان فى .... (بورسعيد ٢٠٢٤)

(أ) نقطة الأصل (ب) الربع الأول (جـ) الربع الثانى (د) الربع الثالث

٧ المستقيمان: س = ٣ ، ٢ ص = ٩ يكونان ....

(أ) متوازيين (ب) منطبقين
(جـ) متقاطعين وغير متعامدين (د) متعامدين

٨ نقطة تقاطع المستقيمين س + ٢ = ٠ ، ص = س هى ....

(أ) (٢ ، ٢) (ب) (٢ ، ٠) (جـ) (−٢ ، −٢) (د) (٠ ، ٠) (الدقهلية ٢٠١٧)

٩ إذا تقاطع مستقيمان فى أكثر من نقطة فإن عدد حلول المعادلتين المُمثلين للخطين المستقيمين = ...

(أ) حلًّا وحيدًا (ب) حلين (جـ) عددًا لا نهائيًا (د) لا يوجد حل (الجيزة ٢٠٢٤)

١٠ إذا كان للمعادلتين س + ٣ص = ٧ ، ٢س + كص = ١٤ عدد لا نهائى من الحلول فى ح × ح

فإن: ك= ....

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ١٨ (الغربية ٢٠٢٤)

١١ إذا كان للمعادلتين: س − ك ص = ل ، ٢ س − ٤ ص = ١ عدد لا نهائى من الحلول فى ح × ح

فإن: ل × ك = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) ٨ (د) ٤ (الشرقية ٢٠٢٤)

١٢ إذا كانت نقطة تقاطع المستقيمين: س − ١ = ٠ ، ص = ٢ ك تقع فى الربع الرابع،

فإن: ك من الممكن أن تساوى ....

(أ) −٥ (ب) صفرًا (جـ) ١ (د) ٥ (كفر الشيخ ٢٠١٦)

---

٢ أكمل ما يأتى:

١ عدد الحلول للمستقيمين المتقاطعين هو .... ، بينما المستقيمان .... لهما عدد لا نهائى من الحلول.

٢ المستقيمان المثلان للمعادلتين ص = ٥ ، س = ٣ يتقاطعان فى النقطة ....

٣ عدد حلول المعادلتين س + ص = ٢ ، ٣س + ٣ص = ٦ هو ....

٤ نقطة تقاطع المستقيمين س + ص = ٦ ، س − ص = −٢ هى ....

٥ $ل_١$ ، $ل_٢$ مستقيمان حيث $ل_١$: س + ٣ص = ٤ ، $ل_٢$: ٥س + ب ص = ٧ فإن $ل_١ // ل_٢$ عندما ب = ...

٦ إذا كان للمعادلتين ٤ س − ٣ص = ١ ، ٨س + ك ص = ٢ حل وحيد،

فإن ك لا يمكن أن تساوى ....

٣ أوجد بيانيًا مجموعة الحل لكل من أزواج المعادلات الآتية:

١ ص = ٣ س − ١ ، س − ص + ١ = ٠

٢ ص = ٥ − ٣ س ، ص = ٣ س + ٥

٣ س + ٣ ص = ٤ ، ٢ س + ص = −٢

٤ س + ٢ ص = ٤ ، ص = ٢ س − ٣ (الغربية ٢٠٢٤)

٥ س = ٢ ، ٢ س + ص = ٥

٦ ٣ س + ص = ٥ ، ص + ٣ س = ٨

٧ س = ٣ ص + ٧ ، س + ٢ ص = ١٢ (الجيزة ٢٠١٥)

---

٤ أوجد عدد حلول كلٍّ من أزواج المعادلات الآتية:

١ ٢ س − ٣ ص = ٦ ، ص = $\frac{١}{٢}$ س + ٣

٢ ٣ س + ص = ٣ ، ٢ ص + ٦ س = ١٢

٣ س − ص = ٤ ، −٣ ص + ٣ س = ١٢

ثانيًا حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين جبريًا:

٥ اختر الإجابة الصحيحة:

١ مجموعة حل المعادلتين: س = ٣ ، ص = ٤ فى ح × ح هى .... (بورسعيد ٢٠٢٥)

(أ) ∅ (ب) {(٣ ، ٤)} (جـ) ح (د) {(٤ ، ٣)}

٢ مجموعة حل المعادلتين: س = ٣ ، س + ص = ٥ هى .... (الجيزة ٢٠١٨)

(أ) {(٣ ، ٢)} (ب) {(٢ ، ٣)} (جـ) {(٣ ، ٥)} (د) {(٥ ، ٢)}

٣ مجموعة حل المعادلتين: س + ٣ = ٠ ، ص − ٥ = ٠ فى ح × ح هى .... (الإسماعيلية ٢٠٢٤)

(أ) {(٣ ، ٥)} (ب) {(٣ ، −٥)} (جـ) {(−٣ ، ٥)} (د) {−٣ ، ٥}

٤ إذا كان (أ ، ٢ ب) حلًا للمعادلتين: ٣س − ص = ٥ ، س + ص = −١ ، فإن قيمة ٢ (أ − ب) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٤ (د) ٢١

٦ أوجد جبريًا مجموعة الحل لكلٍّ من أزواج المعادلات الآتية فى ح × ح:

١ ٣س − ص = ١٠ ، ٢س + ص = ٥

٢ س = ص ، ص = ٣س − ٢

٣ س + ٢ص = ٥ ، ٣س = ص + ٨ (الشرقية ٢٠١٨)

٤ ٢س − ص = ٣ ، س + ٢ص = ٤ (الإسماعيلية ٢٠٢٤)

٥ ص = ٣ + س ، ص − س = ٢

٦ س + ص = ٣ ، ٢س + ٢ص = ٦

٧ $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ٦$ ، س − ص = ٢

٨ ٢ |س| − |ص| = ٢ ، ٣ |س| + |ص| = ٣ (الدقهلية ٢٠٢٤)

٧ أوجد بيانيًا مجموعة الحل لكل من أزواج المعادلات الآتية وتحقق من الناتج جبريًا:

١ ٥س − ٢ص = ٩ ، س − ص = ٣

٢ ٢س + ص = ٤ ، ٨ − ٢ص = ٤س

٣ ص = ٣ ، ص = ٢س − ٤

٤ س + ٥ص = ٤ ، ٢س − ٥ص = ٨

٥ ص = ٢س + ٣ ، ٣س − ص + ٤ = ٠

٨ أوجد قيمة كل من أ ، ب علمًا بأن {(٣ ، −١)} هى مجموعة حل المعادلتين: (الدقهلية ٢٠٢٣)

أس + بص = ٥ ، ٣أس + ب ص = ١٧ فى ح × ح

٩ إذا كان (٢أ + ب ، ٣) = (١٨ ، أ − ب)

فأوجد قيمة كل من أ ، ب

١٠ إذا كانت مجموعة حل المعادلة: أس^{٢} + ب س + ٤ = ٠ (بنى سويف ٢٠٢٤)

هى {−١ ، ١} فأوجد قيمة كل من: أ ، ب

ثالثًا تطبيقات على حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين:

١١ عددان حقيقيان مجموعهما ٤٠؛ أحدهما يزيد على الآخر بمقدار ١٠، أوجد العددين. (الجيزة ٢٠١٩)

١٢ عددان حقيقيان أحدهما ثلاثة أمثال الآخر، إذا كان الفرق بينهما ٢٠ . فأوجد العددين.

١٣ عددان الفرق بينهما ٧٣ وحاصل قسمة الأكبر على الأصغر يساوى ٤ والباقى ٧، ما هذان العددان؟

١٤ عددان حقيقيان س ، ص حيث س > ص الفرق بينهما ٢ ، فإذا كان ثلاثة أمثال الأكبر يزيد على ضعف الأصغر بمقدار ٧، فما العددان؟

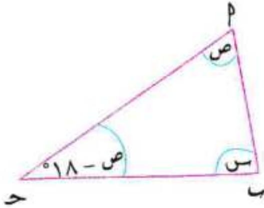
١٥ مستطيل محيطه ٦٠ سم، إذا نقص طوله ٣سم ، وزاد عرضه ٣سم، أصبح مربعًا. فأوجد بعدى المستطيل.

١٦ قطعة ورق مستطيلة الشكل محيطها ١٤ سم، ينقص طولها عن ضعف عرضها بمقدار ٢ سم، فما أبعاد قطعة الورق؟

١٧ عدد مكون من رقمين مجموعهما ١٤ ، إذا عكس وضع الرقمين؛ فإن العدد الناتج يزيد على العدد الأصلى بمقدار ٣٦. أوجد العدد الأصلى.

١٨ إذا كان عمر رجل الآن أربعة أمثال عمر ابنه، ومنذ خمس سنوات كان عمر الرجل مساويًا سبعة أمثال عمر ابنه، فاحسب عمر كل منهما الآن.

١٩ فى الشكل المقابل:

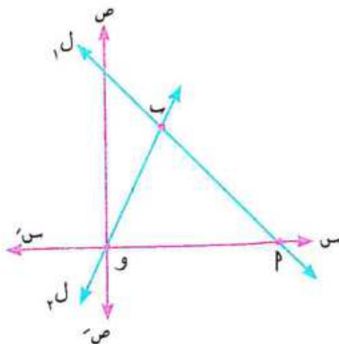


ٵ ب حـ مثلث فيه ق(∠ ٵ) = ص ،

ق(∠ ب) = س ، ق(∠ حـ) = ص − ١٨°

وكان ٥ ص − ٣ س = ٢٢° ، أوجد قيمة كل من: س ، ص

٢٠ فى الشكل المقابل:



إذا كانت معادلة الخط المستقيم ل١: س + ص = ٦

ومعادلة الخط المستقيم ل٢: ص − ٢س = ٠

حيث ل١ ∩ ل٢ = {ب}، ٵ ∈ $\overleftrightarrow{\text{س س َ}}$

فأوجد مساحة △ و ٵ ب حيث و هى نقطة الأصل.

٢١ أوجد العدد النسبى الذى إذا زاد بسطه بمقدار (٥) ونقص مقامه بمقدار (١) أصبح $\frac{٨}{٣}$ ، وإذا تضاعف البسط وزاد المقام بمقدار (٧) أصبح $\frac{٦}{١١}$

TIMSS تفكير إبداعى

٢٢ أوجد إحداثيات رءوس المثلث المُحدَّد بالمستقيمات الآتية:

$ل_١$: ص − ٢س = ١ ، $ل_٢$: ٤س + ص = ٧ ، $ل_٣$: ٢ص − س = −٤

---

٢٣ إذا كان $ل_١$: س + ٣ص + ٣ع = ٢٩ ، $ل_٢$: ٣ع + س − ٢ص = −١١ ، $ل_٣$: ٥ص = ١٠ − ٢س

فأوجد (س ، ص) (إرشاد: اطرح معادلتى المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$)

---

٢٤ أوجد: م . ح المعادلتين الآتيتين فى ح × ح

٢$\sqrt{س}$ + ٤$\sqrt{ص}$ = ٣٨ ، $\sqrt{س}$ − $\sqrt{ص}$ = −٥

تدريبات الكتاب المدرسى

١ أكمل كلًّا مما يأتى:

(أ) مجموعة حل المعادلتين س + ص = ٠ ، ص − ٥ = ٠ هى ....

(ب) مجموعة حل المعادلتين س + ٣ص = ٤ ، ٣ص + س = ١ هى ....

(جـ) مجموعة حل المعادلتين ٤س + ص = ٦ ، ٨س + ٢ص = ١٢ هى ....

(د) إذا كان المستقيمان الممثلان للمعادلتين س + ٣ص = ٤ ، س + أ ص = ٧ متوازيين فإن أ = ...

(هـ) إذا كان للمعادلتين س + ٢ص = ١ ، ٢س + ك ص = ٢ حل وحيد، فإن ك لا يمكن أن تساوى ....

---

٢ اختر الإجابة الصحيحة:

١ المستقيمان: ٣س + ٥ص = ٠ ، ٥س − ٣ص = ٠ يتقاطعان فى .... (كفر الشيخ ٢٠٢٤)

(أ) نقطة الأصل (ب) الربع الأول (جـ) الربع الثانى (د) الربع الرابع

٢ مجموعة حل المعادلتين: س − ٢ص = ١ ، ٣س + ص = ١٠ هى ....

(أ) {(٥ ، ٢)} (ب) {(٢ ، ٤)} (جـ) {(١ ، ٣)} (د) {(٣ ، ١)}

٣ إذا كان للمعادلتين س + ٤ ص = ٧ ، ٣س + ك ص = ٢١ عدد لا نهائى من الحلول فإن ك = ...

(أ) ٤ (ب) ٧ (جـ) ١٢ (د) ٢١ (البحيرة ٢٠٢٤)

---

٣ أجب عما يأتى:

١ **أوجد مجموعة الحل لكل زوج من المعادلات الآتية جبريًّا وبيانيًّا:**

(أ) ص = س + ٤ ، س + ص = ٤

(ب) س − ص = ٤ ، ٣س + ٢ص = ٧ (الفيوم ٢٠٢٤)

(جـ) ٣س + ٤ص = ١١ ، ٢س + ص − ٤ = ٠

(د) ٣س − ص + ٤ = ٠ ، ص = ٢س + ٣

(هـ) ٢س + ص = ١ ، س + ٢ص = ٥

(و) س + ٢ص = ٨ ، ٣س + ص = ٩

٢ إذا كان عدد الفِرَق الرياضية المشاركة فى بطولة كأس الأمم الإفريقية ١٦ فريقًا، وكان عدد الفِرَق غير العربية يزيد على ثلاثة أمثال عدد الفِرَق العربية بمقدار ٤، **فأوجد عدد الفِرَق العربية المشاركة فى البطولة.**

٣ زاويتان حادتان فى مثلث قائم الزاوية الفرق بين قياسيهما ٥٠° **أوجد قياس كل زاوية.**

٤ زاويتان متكاملتان ضعف قياس الكبرى يساوى سبعة أمثال قياس الصغرى. **أوجد قياس كل زاوية.**

٥ إذا كان مجموع عُمْرَى أحمد وأسامة الآن ٤٣ سنة، وبعد ٥ سنوات يكون الفرق بين عُمْرَيهما ٣ سنوات. **فأوجد عمر كل منهما بعد ٧ سنوات.**

٦ مستطيل طوله يزيد على عرضه بمقدار ٤سم، فإذا كان محيط المستطيل ٢٨سم، **فأوجد مساحة المستطيل.** (القليوبية ٢٠١٩)

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ عدد حلول المعادلة: ٢س − ٦ = ٠ فى ح × ح يساوى .... (أزهر الغربية ٢٠٢٤)

(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) ٣ (د) عددًا لا نهائيًا من الحلول

٢ مجموعة حل المعادلتين: ص − ٣ = ٠ ، س + ص = ٠ فى ح×ح هى .... (الإسماعيلية ٢٠٢٢)

(أ) {٣ ، −٣} (ب) {(−٣ ، ٣)} (جـ) {(٠ ، ٣)} (د) {−٣}

٣ إذا كان للمعادلتين: س+ ٤ ص= ٧ ، س + (ك − ١) ص = ٧ عدد لا نهائى من الحلول

فإن ك = ... (الفيوم ٢٠٢٢)

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) ١٢ (د) ١٣

٤ المستقيمان: س − ٣ = ٠ ، ص = ٤ يتقاطعان فى .... (القليوبية ٢٠٢٢)

(أ) الربع الأول (ب) الربع الثانى (جـ) الربع الثالث (د) نقطة الأصل

٥ عدد حلول المعادلتين: ٢س + ٣ص = ٠ ، ٥س − ٣ص = ٠ يساوى .... (أزهر الشرقية ٢٠٢٢)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) عددًا لا نهائيًا (د) $\varnothing$

٦ المستقيمان س + ٢ص = ١ ، ٢س + ٤ ص = ٦ يكونان .... (المنوفية ٢٠٢٢)

(أ) متوازيين (ب) متعامدين

(جـ) منطبقين (د) متقاطعين وغير متعامدين

---

٢ أجب عن الأسئلة التالية:

١ **أوجد** مجموعة حل المعادلتين الآتيتين معًا فى ح × ح بيانيًا:

ص = ٢س − ٣ ، س + ٢ص = ٤ (الوادى الجديد ٢٠٢٢)

٢ مستطيل طوله ضعف عرضه ومحيطه ١٨ سم، **فأوجد مساحته**. (قنا ٢٠٢٤)

٣ **أوجد قيمتى أ ، ب علمًا بأن (١ ، ٢) حل للمعادلتين :**

أ س + ب ص + ٥ = ٠ ، ٢ أ س + ب ص − ١ = ٠



فيديو الشرح

ذاكر الدرس ٣

حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد بيانيًا وجبريًا

فكر وناقش

درسنا فيما سبق التمثيل البيانى للدالة التربيعية د حيث:

د (س) = ٲ س^{٢} + ب س + حـ حيث ٲ ، ب ، حـ أعداد حقيقية ، ٲ ≠ ٠

وتكون المعادلة المناظرة لها: هى د (س) = ٠

أى أن: ٲ س^{٢} + ب س + حـ = ٠

وقد سبق لنا حل هذه المعادلة **باستخدام التحليل.**

فمثلًا: ١ حل المعادلة: س^{٢} – ٥ س + ٦ = ٠ فى ع

هو : (س – ٢) (س – ٣) = ٠

س – ٢ = ٠ ومنها س = ٢ أو س – ٣ = ٠ ومنها س = ٣ ،

∴ م . ع = {٢ ، ٣} ،

ويسمى العددان ٢ ، ٣ «جذرى المعادلة»

٢ حل المعادلة: س^{٢} + ٥ س – ١٤ = ٠ فى ع

هو: (س – ٢) (س + ٧) = ٠

س = ٢ أو س = –٧

∴ م . ع = {٢ ، –٧}

أولًا حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد بيانيًا:

- الصورة العامة للمعادلة التربيعية (معادلة الدرجة الثانية) فى متغير واحد هى:

ٲ س^{٢} + ب س + حـ = ٠

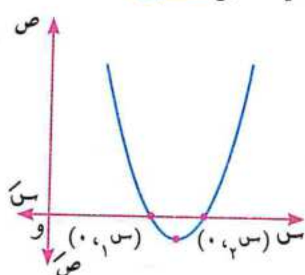
حيث ٲ ∈ ع، ب ∈ ع، حـ ∈ ع ، ٲ ≠ صفر

- الدالة التربيعية: د حيث د (س) = ٲ س^{٢} + ب س + حـ تسمى الدالة المناظرة للمعادلة:

ٲ س^{٢} + ب س + حـ = ٠

• لحل المعادلة التربيعية بيانيًا نرسم منحنى الدالة د ، ثم نعين مجموعة الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة التربيعية المناظرة لهذه المعادلة مع محور السينات، فتكون هى مجموعة حل المعادلة، وهناك ثلاث حالات هى:

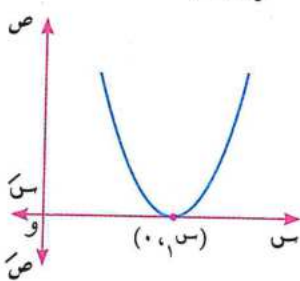
١ منحنى الدالة يقطع محور السينات فى نقطتين



يوجد حلان للمعادلة فى ح

م . ح = {س١ ، س٢}

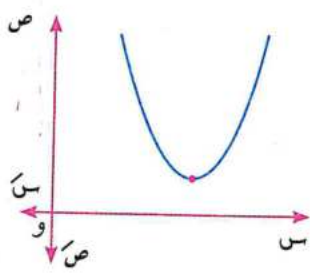
٢ منحنى الدالة يمس محور السينات



يوجد حل وحيد للمعادلة فى ح

م . ح = {س١}

٣ منحنى الدالة لا يقطع محور السينات



لا يوجد حلول للمعادلة فى ح

م . ح = ∅

نقاط هامة

• فى المعادلة أ س^2 + ب س + حـ = صفر

أ يسمى معامل س^2 ، ب يسمى معامل س ، حـ يسمى الحد المطلق

• إذا كانت د (س) = أ س^2 + ب س + حـ فإن:

• الإحداثى السينى لرأس المنحنى: س = $\frac{-ب}{٢أ}$

وتكون نقطة رأس المنحنى هى: ($\frac{-ب}{٢أ}$ ، د ($\frac{-ب}{٢أ}$))

• معادلة محور التماثل لمنحنى الدالة: س = $\frac{-ب}{٢أ}$

• عندما أ > ٠ فإن القيمة **الصغرى** = د ($\frac{-ب}{٢أ}$) ويكون المنحنى مفتوحًا **لأعلى**.

• عندما أ < ٠ فإن القيمة **العظمى** = د ($\frac{-ب}{٢أ}$) ويكون المنحنى مفتوحًا **لأسفل**.

• عند رسم أى دالة تربيعية لا ينبغى تغيير أىٍّ من معاملات حدودها؛ لأنها ستؤثر على الشكل العام لها.

• المعادلة المناظرة للدالة د هى د (س) = ٠

وعند حل المعادلة المناظرة للدالة يمكن ضرب (أو قسمة) طرفيها فى (أو على) مقدار ثابت لا يساوى الصفر، وذلك لا يؤثر على جذريها.

مثال ١

مثل بيانيًا منحنى الدالة التربيعية د، حيث د (س) = $س^2$ − ٢س − ٣ ، مستعينًا بالفترة [−٢ ، ٤]، ومن الرسم أوجد:

١ مجموعة الحل للمعادلة $س^2$ − ٢س − ٣ = صفر

٢ القيمة الصغرى للدالة.

الحل

د (س) = $س^2$ − ٢س − ٣

د (−٢) = $(-٢)^2$ − ٢ (−٢) − ٣ = ٥

د (−١) = $(-١)^2$ − ٢ (−١) − ٣ = صفر

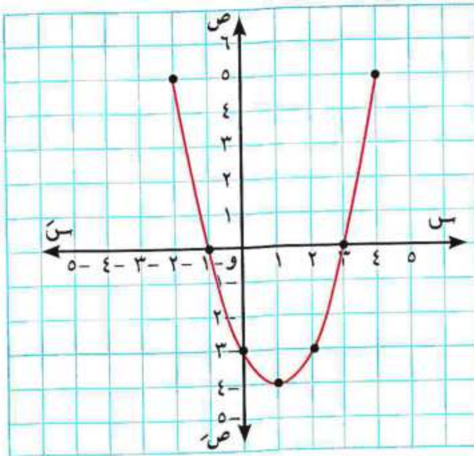
د (٠) = $(٠)^2$ − ٢ (٠) − ٣ = −٣

د (١) = $(١)^2$ − ٢ (١) − ٣ = −٤

د (٢) = $(٢)^2$ − ٢ (٢) − ٣ = −٣

د (٣) = $(٣)^2$ − ٢ (٣) − ٣ = صفر

د (٤) = $(٤)^2$ − ٢ (٤) − ٣ = ٥



س	−٢	−١	٠	١	٢	٣	٤
د (س)	٥	٠	−٣	−٤	−٣	٠	٥

∵ المعادلة $س^2$ − ٢س − ٣ = ٠ هي المعادلة المناظرة للدالة د.

∴ من الرسم يتضح أن:

١ م . ح = {٣ ، −١}

٢ القيمة الصغرى للدالة = −٤

يمكن إيجاد نقطة رأس المنحنى كالآتي:

س = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{-(-٢)}{٢ \times ١}$ = ١

ص = د (١) = −٤

نقطة رأس المنحنى: (١، −٤)

سؤال ١

ارسم منحنى الدالة د حيث د (س) = $س^2$ − ٦س + ٥ مستعينًا بالفترة [٠ ، ٦]، ومن الرسم أوجد:

١ نقطة رأس المنحنى.

٢ القيمة الصغرى للدالة د.

٣ مجموعة حل المعادلة $س^2$ − ٦س + ٥ = ٠

مثـال ٢

مثل بيانيًا منحنى الدالة د حيث د (س) = ٢س − س^{٢} − ١ مستعينًا بالفترة [−١ ، ٣]، وأوجد نقطة رأس المنحنى، ومن الرسم أوجد م.ح للمعادلة: س^{٢} − ٢س + ١ = صفر.

الحـل

أولًا: التمثيل بيانيًا:

د (س) = ٢س − س^{٢} − ١ = − س^{٢} + ٢س − ١

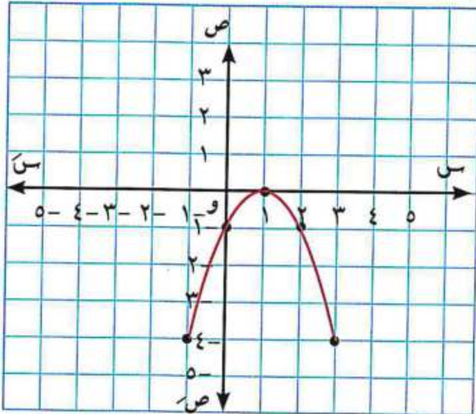
أ = −١ ، ب = ٢ ، حـ = −١

الإحداثى السينى لرأس المنحنى:

س = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{-٢}{٢(-١)}$ = ١

د (١) = −(١)^{٢} + ٢ (١) − ١ = ٠

نقطة رأس المنحنى هى (١ ، ٠)



س	−١	٠	١	٢	٣
د (س)	−٤	−١	٠	−١	−٤

ثانيًا: لحل المعادلة:

س^{٢} − ٢س + ١ = ٠

يلاحظ أنه بضرب طرفى المعادلة × (−١) ينتج معادلة تربيعية أخرى مكافئة للمعادلة المطلوب حلها، وهى: − س^{٢} + ٢س − ١ = ٠

∴ مجموعة حل المعادلة س^{٢} − ٢س + ١ = ٠ هى نفسها مجموعة حل المعادلة ٢س − س^{٢} − ١ = ٠

وتكون مجموعة حل هذه المعادلة هى الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة د مع محور السينات، ومن الرسم يتضح أن مجموعة الحل = {١}

لاحظ أن

يمكن كتابة قاعدة الدالة على الصورة:

د (س) = − (س − ١)^{٢}

سؤال ٢

مثل بيانيًا منحنى الدالة د حيث د (س) = ٨ س − س^{٢} − ١٦ مستعينًا بالفترة [٢ ، ٦]

ومن الرسم أوجد م.ح للمعادلة: س^{٢} − ٨ س + ١٦ = ٠

مثـال ٣

مثل بيانيًّا منحنى الدالة د حيث د (س) = − س^{٢} + ٦س − ١١ مستعينًا بالفترة [٠ ، ٦]، ومن الرسم أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة: س^{٢} − ٦س + ١١ = ٠

الحــل

س	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
ص = د (س)	−١١	−٦	−٣	−٢	−٣	−٦	−١١

لحل المعادلة: س^{٢} − ٦س + ١١ = ٠

يلاحظ أنها معادلة مناظرة للدالة د

لأنه بوضع د (س) = ٠

∴ − س^{٢} + ٦س − ١١ = ٠

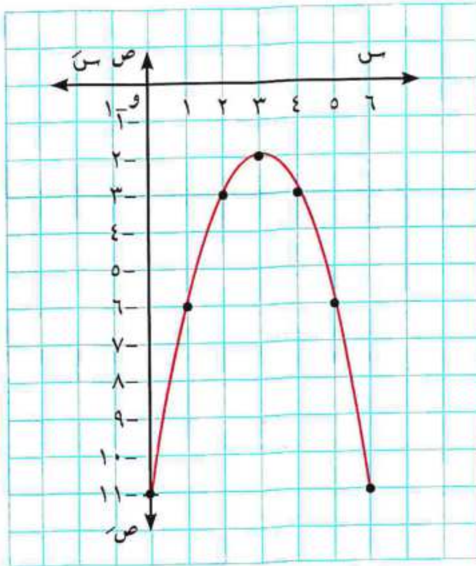
بالضرب × (−١)

∴ س^{٢} − ٦س + ١١ = ٠

(وهى المعادلة المطلوب حلها)

∵ منحنى الدالة د لا يقطع محور السينات.

∴ م.ح = ∅.



لاحظ أن

يمكن كتابة قاعدة الدالة على الصورة د (س) = − (س − ٣)^{٢} − ٢

سؤال ٣

مثل بيانيًّا منحنى الدالة د حيث د (س) = س^{٢} + س + ١ مستعينًا بالفترة [−٣ ، ٢]، ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة: س^{٢} + س + ١ = ٠ فى ح

ثانيًا حل المعادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد جبريًا باستخدام القانون العام:

بفرض المعادلة: $\text{أ}\ \text{س}^2 + \text{ب}\ \text{س} + \text{ج} = \text{صفر}$

حيث أ معامل س^2 ، ب معامل س ، ج الحد المطلق

حيث أ $\in$ ع ، ب $\in$ ع ، ج $\in$ ع ، أ $\neq$ صفر

يكون حل المعادلة باستخدام القانون العام: $\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - 4\ \text{أ}\ \text{ج}}}{2\ \text{أ}}$

مثال ٤

أوجد فى ع مجموعة الحل للمعادلة: ٥ س^2 − ٢ س − ١ = ٠

مستعينًا بفكرة إكمال المربع للمعادلة التربيعية.

الحل

$5\ \text{س}^2 - 2\ \text{س} - 1 = 0$ (÷٥) (نجعل معامل $\text{س}^2 = 1$)

$\text{س}^2 - \frac{2}{5}\ \text{س} = \frac{1}{5}$ [نضيف ($\frac{1}{2}$ معامل س)^2 للطرفين]

$\text{س}^2 - \frac{2}{5}\ \text{س} + \frac{1}{25} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25}$

$(\text{س} - \frac{1}{5})^2 = \frac{6}{25}$ (تحليل مقدار ثلاثى مربع كامل)

$\text{س} - \frac{1}{5} = \pm \frac{\sqrt{6}}{5}$

$\text{س} = \frac{1}{5} \pm \frac{\sqrt{6}}{5}$

$\text{س} = \frac{1 \pm \sqrt{6}}{5}$

$\therefore \text{م.ح} = \left\{ \frac{1 + \sqrt{6}}{5} ، \frac{1 - \sqrt{6}}{5} \right\}$

استنتاج القانون العام

$\text{أ}\ \text{س}^2 + \text{ب}\ \text{س} + \text{ج} = 0$

$\text{س}^2 + \frac{\text{ب}}{\text{أ}}\ \text{س} = \frac{-\text{ج}}{\text{أ}}$

$\text{س}^2 + \frac{\text{ب}}{\text{أ}}\ \text{س} + \frac{\text{ب}^2}{4\ \text{أ}^2} = \frac{-\text{ج}}{\text{أ}} + \frac{\text{ب}^2}{4\ \text{أ}^2}$

$\left(\text{س} + \frac{\text{ب}}{2\ \text{أ}}\right)^2 = \frac{\text{ب}^2 - 4\ \text{أ}\ \text{ج}}{4\ \text{أ}^2}$

$\text{س} + \frac{\text{ب}}{2\ \text{أ}} = \frac{\pm\sqrt{\text{ب}^2 - 4\ \text{أ}\ \text{ج}}}{2\ \text{أ}}$

$\text{س} = \frac{-\text{ب}}{2\ \text{أ}} \pm \frac{\sqrt{\text{ب}^2 - 4\ \text{أ}\ \text{ج}}}{2\ \text{أ}}$

$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - 4\ \text{أ}\ \text{ج}}}{2\ \text{أ}}$

مثـال ٥

أوجـد مجموعة حل المعـادلة: $س^٢ - ٤ س + ١ = صفر$ باستخـدام القـانون العـام مقربًا الناتج لرقم عشـرى واحـد.

الحـل

$س^٢ - ٤ س + ١ = ٠$

$أ = ١ ، ب = -٤ ، جـ = ١$

$\because ب^٢ - ٤ أ جـ = (-٤)^٢ - ٤ (١) (١) = ١٢$

وبالتعويض فى القانون العام

$\therefore س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$

$\therefore س = \frac{٤ \pm \sqrt{١٢}}{٢}$ $\qquad \therefore س = \frac{٤ \pm \sqrt{٤ \times ٣}}{٢}$

$\therefore س = \frac{٤ \pm ٢ \sqrt{٣}}{٢}$ $\qquad \therefore س = ٢ \pm \sqrt{٣}$

$\therefore س = ٢ + \sqrt{٣} \simeq ٣,٧$ أو $س = ٢ - \sqrt{٣} \simeq ٠,٣$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{٣,٧ ، ٠,٣\}$

نقاط هامة

إذا كانت قيمة المقدار:

- $ب^٢ - ٤ أ جـ > صفر$ فإنه يوجد للمعادلة جذران حقيقيان **مختلفان**.
- $ب^٢ - ٤ أ جـ = صفر$ فإنه يوجد للمعادلة جذران **حقيقيان متساويان** (جذر مكرر مرتين)

  ويكون الحل هو: $س = \frac{-ب}{٢ أ}$ ، وبيانيًا مُنحنى الدالة **يمس** محور السينات فى النقطة $(\frac{-ب}{٢ أ} ، ٠)$
- $ب^٢ - ٤ أ جـ < صفر$ فإنه **لا يوجد** للمعادلة جذور حقيقية.

سؤال ٤

١ باستخدام القانون العام أوجد فى ع مجموعة الحل للمعادلة:

$س^٢ - س - ٥ = ٠$ (متخذًا $\sqrt{٢١} \simeq ٤,٦$) (أزهر سوهاج ٢٠٢٢)

٢ أوجد فى ع مجموعة الحل للمعادلة: $س^٢ - ١٠ س = ١$ مستخدمًا القانون العام.

مثال ٦

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية مقربًا الناتج لأربعة أرقام عشرية:

١ $(س - ٢)^٢ = ٨$

٢ $\frac{٩}{س^٢} + \frac{٢}{س} = ١$ حيث س ≠ صفر

الحل

١ $(س - ٢)^٢ = ٨$

$س^٢ - ٤ س + ٤ - ٨ = ٠$

$س^٢ - ٤ س - ٤ = ٠$

أ = ١ ، ب = -٤ ، جـ = -٤

$ب^٢ - ٤ أ جـ = (-٤)^٢ - ٤ (١) (-٤) = ٣٢$

∵ $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$ ∴ $س = \frac{٤ \pm \sqrt{٣٢}}{٢} = ٢ \pm ٢\sqrt{٢}$

∴ $س = ٢ + ٢\sqrt{٢} \simeq ٤,٨٢٨٤$ أو $س = ٢ - ٢\sqrt{٢} \simeq -٠,٨٢٨٤$

∴ م . ح = {٤,٨٢٨٤ ، -٠,٨٢٨٤}

حل آخر

∵ $(س - ٢)^٢ = ٨$ ∴ $س - ٢ = \pm \sqrt{٨}$

∴ $س - ٢ = \pm ٢\sqrt{٢}$

$س = ٢ + ٢\sqrt{٢}$ أو $س = ٢ - ٢\sqrt{٢}$

$س \simeq ٤,٨٢٨٤$ أو $س \simeq -٠,٨٢٨٤$

---

٢ $\frac{٩}{س^٢} + \frac{٢}{س} = ١$ (حيث س ≠ صفر) بضرب طرفى المعادلة × $س^٢$

∴ $٩ + ٢ س = س^٢$ أى أن: $س^٢ - ٢ س - ٩ = ٠$

أ = ١ ، ب = -٢ ، جـ = -٩

$ب^٢ - ٤ أ جـ = (-٢)^٢ - ٤ (١) (-٩) = ٤٠$

∵ $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$ ∴ $س = \frac{٢ \pm \sqrt{٤٠}}{٢} = ١ \pm \sqrt{١٠}$

$س = ١ + \sqrt{١٠} \simeq ٤,١٦٢٣$ أو $س = ١ - \sqrt{١٠} \simeq -٢,١٦٢٣$

∴ م . ح = {٤,١٦٢٣ ، -٢,١٦٢٣}

سؤال ٥

أوجد فى ح مجموعة الحل لكل من المعادلتين الآتيتين:

١ $س(س + ١) = ٣$ (علمًا بأن $\sqrt{١٣} \simeq ٣,٦$) ٢ $س + \frac{١}{س} = ٦$ (مقربًا الناتج لرقمين عشريين)

ثالثًا تطبيقات على حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد:

مثال ٧



فى إحدى مسابقات رمى القرص كان مسار القرص بالنسبة لأحد اللاعبين يتبع العلاقة:

ص = −٠,٠٤٥ س^{٢} + ٤,٩ س + ٠,٨٤ حيث س تُمثل المسافة الأفقية بالمتر، ص تُمثل ارتفاع القرص عن سطح الأرض.

أوجد المسافة الأفقية التى يسقط عندها القرص بدءًا من نقطة القذف لأقرب جزء من مائة.

الحل

لاحظ أن

يبدأ القذف من النقطة (٠، ٠,٨٤) ويسقط القرص عند النقطة التى إحداثيها السينى موجب وإحداثيها الصادى صفر .

أ = −٠,٠٤٥ ، ب = ٤,٩ ، حـ = ٠,٨٤

$\therefore$ س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ حـ}}{٢ أ}$

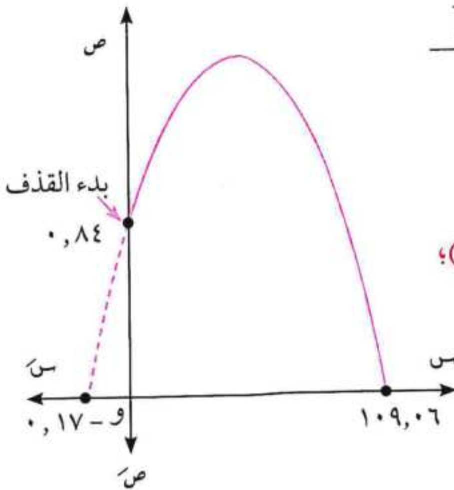
= $\frac{-٤,٩ \pm \sqrt{(٤,٩)^{٢} - ٤ \times (-٠,٠٤٥) \times ٠,٨٤}}{٢ \times (-٠,٠٤٥)}$

= $\frac{-٤,٩ \pm \sqrt{٢٤,١٦١٢}}{-٠,٠٩}$

$\therefore$ س = $\frac{-٤,٩ + \sqrt{٢٤,١٦١٢}}{-٠,٠٩} \simeq -٠,١٧$ (مرفوض)؛

(لأنها خلف نقطة القذف)

أو س = $\frac{-٤,٩ - \sqrt{٢٤,١٦١٢}}{-٠,٠٩} \simeq ١٠٩,٠٦$



أى أن: القرص يسقط تقريبًا على بُعد ١٠٩,٠٦ متر من نقطة القذف.

سؤال ٦

قطعة أرض مستطيلة الشكل، يزيد طولها على عرضها بمقدار ١٤ مترًا، فإذا كانت مساحتها ١٦٣٢ مترًا مربعًا، **فأوجد أبعادها.**

الربط بالتكنولوجيا:

يمكن حل معادلات الدرجة الثانية فى مجهول واحد باستخدام الآلة الحاسبة العلمية كالآتى:



فمثلاً: لحل المعادلة $س^2 - ٤س = ٣$ باستخدام الآلة الحاسبة العلمية.

الخطوة الأولى:

نضع المعادلة على الصورة: $أ س^2 + ب س + حـ = ٠$

$\because$ $س^2 - ٤ س = ٣$

$\therefore$ $س^2 - ٤ س - ٣ = ٠$

الخطوة الثانية:

نضغط على مفتاح **Mode** ونختار من القائمة **EQN** بضغط مفتاح الرقم المكتوب عليها.

الخطوة الثالثة:

نختار المعادلة التى على الصورة $ax^2 + bx + c = o$ بضغط مفتاح الرقم المكتوب أمامها.

الخطوة الرابعة:

نقوم بإدخال معاملات $س^2$ ، $س$ ، والحد المطلق بإشارتها بالترتيب باستخدام مفتاح الإدخال =

الخطوة الخامسة:

نقوم بالضغط على = فتظهر قيمة س الأولى وهى: $٢ + \sqrt{٧}$ ،

ثم نضغط = مرة أخرى فنحصل على قيمة س الثانية وهى: $٢ - \sqrt{٧}$

سؤال ٧

باستخدام الآلة الحاسبة العلمية أوجد م.ع للمعادلات الآتية فى ع:

١ $٢ س^2 - ٥ س + ٢ = $ صفر (الأقصر ٢٠٢٤)

٢ $\frac{س}{٢} = \frac{١}{٥ - س}$ حيث $س \neq ٥$



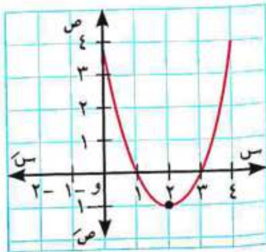
تدريبات الأضــواء

أولًا حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد بيانيًا:

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان منحنى الدالة التربيعية د لا يقطع محور السينات فى أى نقطة، فإن عدد حلول المعادلة: د (س) = ٠ فى ع هو ....

(أ) حل وحيد (ب) حلان (جـ) عدد لا نهائى (د) صفر (قنا ٢٠١٩)



٢ مجموعة حل المعادلة الممثلة بالمنحنى المقابل فى ع هى ....

(أ) ∅ (ب) {١ ، ٣}

(جـ) {٢} (د) {(١ ، ٣)} (بورسعيد ٢٠٢٢)

٣ منحنى الدالة د حيث د (س) = $س^2$ − ٣س + ٢ يقطع محور السينات فى النقطتين ....

(أ) (٢ ، ٠) ، (٣ ، ٠) (ب) (٢ ، ٠) ، (١ ، ٠)

(جـ) (−٢ ، ٠) ، (−١ ، ٠) (د) (٢ ، ٠) ، (−١ ، ٠)

٤ إذا كان منحنى الدالة د حيث د (س) = $س^2$ − س + حـ يمر بالنقطة (٢ ، ١) فإن حـ = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) −٢ (د) −١

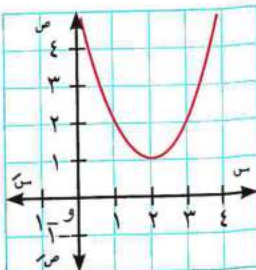
٥ منحنى الدالة د حيث د (س) = أ $س^2$ + ب س + حـ ، أ ≠ ٠ يقطع محور الصادات فى النقطة ....

(أ) (٠ ، ب) (ب) (ب ، ٠) (جـ) (حـ ، ٠) (د) (٠ ، حـ) (القاهرة ٢٠٢٢)

٦ إذا كانت النقطة (٢ ، ص) تقع على منحنى الدالة د : حيث د (س) = ٣ $س^2$ − س + ٢

فإن قيمة ص= ....

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (جـ) ١٤ (د) ٨



٧ إذا كان الشكل المقابل يمثل منحنى الدالة التربيعية د

فإن مجموعة حل المعادلة: د (س) = صفر

فى ع هى ....

(أ) {٢} (ب) {١}

(جـ) ∅ (د) {٤}

٨ إذا كان منحنى الدالة التربيعية د يمر بالنقاط (−١ ، ٠) ، (٠ ، −٤)، (٤ ، ٠)
فإن مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ فى ع هى ....
(ا) {−١ ، −٤} (ب) {٤، −١} (جـ) {−١} (د) ∅ (الغربية ٢٠١٩)

٩ د : دالة تربيعية إحداثى نقطة رأس المنحنى لها هو (٢ ، −٣) فإن معادلة محور التماثل هى: س = ...
(ا) −٢ (ب) ٢ (جـ) −٣ (د) ٣

١٠ إذا قطع منحنى الدالة التربيعية محور السينات فى النقطتين (١ ، ٠) ، (٣ ، ٠) فإن معادلة محور التماثل لمنحنى هذه الدالة هى ....
(ا) س = ١ (ب) س = ٤ (جـ) س = ٣ (د) س = ٢

١١ إذا كانت النقطة (−٣ ، ٠) هى نقطة رأس المنحنى للدالة التربيعية د فإن:
مجموعة حل المعادلة د (س) = ٠ هى ....
(ا) {٣} (ب) {٠} (جـ) {−٣} (د) ∅

١٢ إذا كانت نقطة رأس المنحنى للدالة التربيعية د : د (س) = ا س^{٢} + ب س + حـ ، ا > ٠
هى (١ ، ٤) ، فإن عدد حلول المعادلة د (س) = ٠ هو .... (الشرقية ٢٠٢٤)
(ا) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى

١٣ إذا كانت د دالة تربيعية، د (−٢) = د (٤) فإن معادلة محور التماثل لمنحنى هذه الدالة
هى س = ...
(ا) −١ (ب) ١ (جـ) ٤ (د) −٤

١٤ إذا كان منحنى الدالة د: د(س) = س^{٢} − ٦ س + ا يقطع محور السينات عند س = −٢ ،
س = ب فإن ا + ب = ...
(ا) −١٦ (ب) ٨ (جـ) −٨ (د) ١٦

---

٢ ارسم الشكل البياني للدالة د ، ومن الرسم أوجد فى ع مجموعة الحل للمعادلة د (س) = صفر، وأوجد إحداثى نقطة رأس المنحنى، وكذلك القيمة العظمى أو الصغرى للدالة، وكذلك معادلة محور تماثل منحنى الدالة:

١ د (س) = س^{٢} + ٢ س + ١ مستعينًا بالفترة [−٤ ، ٢]
٢ د (س) = س^{٢} − ٦ س + ٩ مستعينًا بالفترة [٠ ، ٦]
٣ د (س) = س^{٢} − ٣ مستعينًا بالفترة [−٣ ، ٣]
٤ د (س) = − س^{٢} مستعينًا بالفترة [−٢ ، ٢]
٥ د (س) = ٢ − س^{٢} مستعينًا بالفترة [−٣ ، ٣]
٦ د (س) = − س^{٢} + ٦ س − ١٠ مستعينًا بالفترة [٠ ، ٦]
٧ د (س) = س^{٢} + ٣ مستعينًا بالفترة [−٢ ، ٢]
٨ د (س) = س^{٢} − ٢ س + ٢ (قنا ٢٠١٩) مستعينًا بالفترة [−١ ، ٣]

ثانيًا حل المعادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد جبريًا باستخدام القانون العام:

٣ اختر الإجابة الصحيحة:

١ فى المعادلة أ $س^٢$ + ب س + حـ = صفر إذا كان $ب^٢$ − ٤ أ حـ > صفر ، أ ≠ ٠

فإن عدد الجذور يساوى .... (الفيوم ٢٠١٩)

(أ) صفرًا (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عددًا لا نهائيًا

٢ مجموعة حل المعادلة $س^٢$ + ١ = ٠ فى ح هى ....

(أ) {١} (ب) {١ ، −١} (جـ) {−١} (د) ∅ (بنى سويف ٢٠١٧)

٣ مجموعة حل المعادلة ٢$س^٢$ + ٥ س = ٠ فى ح هى ....

(أ) {٠ ، ٥} (ب) {٠ ، $\frac{-٥}{٢}$} (جـ) {٢ ، ٥} (د) ∅

٤ مجموعة حل المعادلة $س^٢$ − ٤ س + ٤ = ٠ فى ح هى ....

(أ) {−٢ ، ٢} (ب) {٤ ، ١} (جـ) {٢} (د) ∅

٥ إذا كان: د (س) = أ $س^٢$ + ب س + حـ ، د (١) = ٤ ، د (−١) = ٤ فإن أ + حـ = ...

(أ) ٨ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) صفر (كفر الشيخ ٢٠١٨)

٦ إذا كانت مجموعة حل المعادلة: $س^٢$ − أ س + ٤ = ٠ هى ∅ فإن أ يمكن أن تساوى ....

(أ) −٥ (ب) صفرًا (جـ) ٤ (د) ٥ (الدقهلية ٢٠٢٤)

٧ المعادلة أ $س^٢$ + ٦ س + ٣ = صفر ليس لها جذور حقيقية إذا كان أ ∈ ....

(أ)]−∞ ، ٣[(ب)]٣ ، ∞[(جـ) {٣} (د) {٣ ، −٣}

---

٤ أوجد جبريًّا فى ح مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية باستخدام القانون العام:

١ $س^٢$ − ٤ س + ١ = ٠ (مقربًا الناتج لأقرب رقم عشرى واحد) (بورسعيد ٢٠٢٤)

٢ $س^٢$ − ٢ س − ٤ = ٠ (البحيرة ٢٠٢٢)

٣ ٣ $س^٢$ = ٥ س − ١ (أسوان ٢٠٢٤)

٤ ٢ $س^٢$ + ٥ س − ٦ = ٠ (مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد) (القاهرة ٢٠١٩)

٥ س(س − ٢) = ١ (مقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية) (الشرقية ٢٠١٩)

٦ $س^٢$ − ٢ س + ٤ = س + ٣ (مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد)

٧ $٢س^{٢} - ٣س = ١$ (مقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية)

٨ $(س - ٢)^{٢} = ٦$ (مقربًا الناتج لرقمين عشريين)

٩ $س\,(س + ٢) + (س - ١)\,(س + ٢) = ٥$

١٠ $\frac{٣}{٤}س^{٢} - \frac{١}{٤}س - \frac{١}{٢} = ٠$

١١ $س - ٤ = \frac{١}{س - ٢}$ (حيث $س \neq ٢$)، $\sqrt{٢} \simeq ١,٤١$

١٢ $\frac{٢}{٢س + ٣} = ٢س - ٣$ (حيث $س \neq \frac{-٣}{٢}$)

١٣ $١ - \frac{٢}{س} = \frac{٢}{س^{٢}}$ (حيث $س \neq ٠$)، $\sqrt{٣} \simeq ١,٧٣$ (الدقهلية ٢٠٢٤)

١٤ $س^{٤} - ١٢س^{٢} + ٢٧ = ٠$

---

٥ **أوجد مجموعة حل المعادلة:**

$س^{٢} - ٦س + ٧ = ٠$ فى ع مستعينًا بفكرة إكمال المربع. (بنى سويف ٢٠٢٤)

ثالثًا تطبيقات على حل معادلة الدرجة الثانية فى مجهول واحد:

٦ عند قفز الدلفين فوق سطح الماء فإنه يرسم مسارًا يتبع العلاقة: $ص = -٢,٠ س^{٢} + ٢س$ حيث ص ارتفاع الدلفين فوق سطح الماء، س المسافة الأفقية بالقدم. **أوجد المسافة الأفقية التى يقطعها الدلفين عند قفزه من الماء قبل أن يصطدم بسطح الماء مرة أخرى.**



٧ **أوجد فى ع مجموعة حل المعادلة:**

$٢\,(س - ٢)^{-٢} + ٣\,(س - ٢)^{-١} - ٥ = ٠$ حيث $س \neq ٢$

---

٨ كم مثلثًا قائم الزاوية يكون طول الوتر فيه $(٢س + ٣)$ وحدة طول، وطولا ضلعى القائمة $(٢س - ٥)$ وحدة طول، $(س + ٧)$ وحدة طول، **أوجد أطوال أضلاع المثلثات إن وجدت.**

---

٩ إذا علمت أن عدد أقطار المضلع الذى عدد أضلاعه ن يُعطى بالعلاقة $\frac{١}{٢}ن\,(ن - ٣)$ حيث ن عدد صحيح موجب أكبر من ٣،

فكم ضلعًا بالمضلع الذى به ٦٥ قطرًا؟ هل يوجد مضلع به ٨٠ قطرًا؟

تدريبات الكتاب المدرسى

1 أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية باستخدام القانون العام مقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية:

(أ) $س^2 - 2س - 6 = 0$

(ب) $س^2 + 3س - 3 = 0$

(جـ) $2س^2 - 4س + 1 = 0$ (الإسكندرية 2022)

(د) $3س^2 - 6س + 1 = 0$

(هـ) $س(س - 1) = 4$ (الفيوم 2024)

(و) $(س - 3)^2 - 5س = 0$

(ز) $س + \frac{4}{س} = 6$

(ح) $\frac{8}{س^2} + \frac{1}{س} = 1$

(ط) $\frac{س}{3} = \frac{1}{5 - س}$ (أسيوط 2024)

---

2 ارسم الشكل البيانى للدالة د فى الفترة المعطاة، ثم أوجد مجموعة حل المعادلة د (س) = 0 ، مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد فى كل مما يأتى:

(أ) $د(س) = س^2 - 2س - 4$ مستعينًا بالفترة [-2 ، 4]

(ب) $د(س) = 2س^2 + 5س$ مستعينًا بالفترة [-4 ، 2]

(جـ) $د(س) = 3س - س^2 + 2$ مستعينًا بالفترة [-1 ، 4]

(د) $د(س) = س(س - 5) + 3$ مستعينًا بالفترة [0 ، 5] (الجيزة 2024)

(هـ) $د(س) = 2س^2 - 3(2 - س)$ مستعينًا بالفترة [-3 ، 2]

(و) $د(س) = 2س(س - 1) - 3(س + 2) + 5$ مستعينًا بالفترة [-1 ، 3]

(ز) $د(س) = (س - 3)^2 - (س - 3) - 4$ مستعينًا بالفترة [1 ، 7]

---

3 ارسم الشكل البيانى للدالة د، حيث $د(س) = 6س - س^2 - 9$ فى الفترة [0 ، 5]، ومن الرسم أوجد:

(أ) القيمة العظمى للدالة.

(ب) مجموعة حل المعادلة $6س - س^2 - 9 = 0$

---

4 يرش رجل حديقته بخرطوم مياه يندفع منه الماء فى مسار يتحدد بالعلاقة:

$ص = -0,06س^2 + 1,2س + 0,8$ حيث س المسافة الأفقية التى يصل إليها الماء بالمتر، ص ارتفاع الماء عن سطح الأرض بالمتر. أوجد لأقرب متر أقصى مسافة أفقية يصل إليها الماء.

---

5 رأى ثعبان على الأرض صقرًا على ارتفاع 160 مترًا منه، وهو ينطلق إليه بسرعة 24 مترًا/ دقيقة لكى ينقض عليه، فإذا كان الصقر ينطلق رأسيًا لأسفل حسب العلاقة $ف = ع_0 ن + 4,9 ن^2$ حيث ف المسافة بالمتر، $ع_0$ سرعة الانطلاق بالمتر/ دقيقة، ن الزمن بالدقائق. فأوجد الزمن الذى يأخذه الثعبان لكى يتمكن من الهرب قبل أن يصل إليه الصقر.

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كانت س = −٣ حلًا للمعادلة س^{٢} + م س − ٩ = ٠ فإن م = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) صفر (د) −٣ (كفر الشيخ ٢٠١٧)

٢ إذا كانت النقطة (أ − ٢ ، ٠) هى نقطة رأس المنحنى للدالة التربيعية د ،
ومجموعة حل المعادلة د (س) = صفر هى {٥} فإن: أ = ...

(أ) ٢ (ب) -٢ (جـ) ٧ (د) ٥ (قنا ٢٠٢٢)

٣ المعادلة : أ س^{٢} + ب س + حـ = ٠ حيث أ ، ب ، حـ أعداد حقيقية ، تكون معادلة من الدرجة الثانية بشرط أن : أ ≠ .... (القاهرة ٢٠٢٤)

(أ) -١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

٤ الخطان المستقيمان الممثلان للمعادلتين : س = −١ ، ص − ٢ = ٠ يتقاطعان فى النقطة ....

(أ) (−١ ، ٢) (ب) (٢ ، −١) (جـ) (١ ، −٢) (د) (−١ ، −٢) (أسيوط ٢٠١٦)

٥ المعادلتان: س + ٣ ص = ٦ ، ٢ س + م ص = ١٢ لهما عدد لا نهائى من الحلول
فى ح × ح عندما م = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٦ (القاهرة ٢٠١٩)

٦ إذا كان منحنى الدالة د حيث د (س) = س^{٢} − ٤ س + ٣ يقطع محور السينات فى النقطتين
(٣ ، ٠)، (١ ، ٠) فإن مجموعة حل المعادلة د (س) = صفر هى ....

(أ) {١} (ب) {٣} (جـ) {١ ، ٣} (د) {٠ ، ٣ ، ١} (الوادى الجديد ٢٠١٩)

---

٢ ١ أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية فى ح باستخدام القانون العام:

(أ) س^{٢} − ٣ س − ٢ = ٠ (مقربًا الناتج لرقمين عشريين) (سوهاج ٢٠٢٢)

(ب) 🏛 س + $\frac{١}{س}$ + ٣ = ٠ (حيث س ≠ ٠) (مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين). (مطروح ٢٠١٩)

٢ إذا كان (١ ، −٢) حلًا للمعادلتين:

٣ أ س + ب ص = ٥ ، أ س − ب ص = −١ فأوجد قيمتى أ ، ب (المنيا ٢٠٢٤)

ذاكر

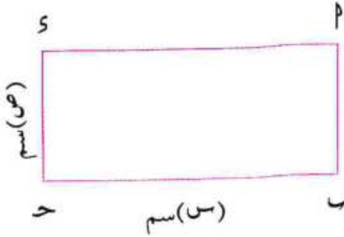
الدرس ٣

حل معادلتين فى متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية

فيديو الشرح

فكر وناقش

فى الشكل المقابل:



ا ب حـ ء مستطيل محيطه ٤٤ سم، ومساحته ١١٢ سم^{٢}.

أوجد بُعديه.

نفرض أن طول المستطيل = س سم، عرض المستطيل = ص سم

فإن محيط المستطيل = ٢ (الطول + العرض)

∴ ٤٤ = ٢ (س + ص) ∴ س + ص = ٢٢ (١)

(١) هى معادلة من الدرجة الأولى فى متغيرين.

∵ مساحة المستطيل = الطول × العرض ∴ س × ص = ١١٢ (٢)

(٢) هى معادلة من الدرجة الثانية فى متغيرين.

فهل يمكن حل المعادلتين: (١) ، (٢) معًا للحصول على كل من طول وعرض المستطيل؟

أولًا حل معادلتين فى متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية:

حل المعادلتين معًا يعنى إيجاد الأزواج المرتبة التى تحقق المعادلتين معًا، ويعتمد حل المعادلتين على طريقة التعويض؛ لذلك سنتبع الآتى:

(١)
ابدأ بمعادلة الدرجة الأولى ومنها اكتب أحد المتغيرين بدلالة المتغير الآخر (س بدلالة ص أو ص بدلالة س)

(٢)
نعوض عن س بدلالة ص أو نعوض عن ص بدلالة س فى معادلة الدرجة الثانية ثم نحلها لإيجاد قيمة أحد المتغيرين.

(٣)
نعوض فى معادلة الدرجة الأولى لإيجاد قيمة المتغير الآخر.

مثال ١

أوجد فى ع × ع مجموعة الحل للمعادلتين:

ص = س + ٦ ⟸ (١) ، س^{٢} + ص^{٢} = ١٨ ⟸ (٢)

الحل

من المعادلة (١) وبالتعويض فى المعادلة (٢) عن قيمة ص نجد أن:

س^{٢} + (س + ٦)^{٢} = ١٨

س^{٢} + س^{٢} + ١٢ س + ٣٦ = ١٨

٢ س^{٢} + ١٢ س + ١٨ = ٠ (÷ ٢)

∴ س^{٢} + ٦ س + ٩ = ٠ **تحليل مقدار ثلاثى مربع كامل**

∴ (س + ٣)^{٢} = ٠ ∴ س + ٣ = ٠

∴ س = -٣ بالتعويض فى المعادلة (١)

∴ ص = -٣ + ٦ ∴ ص = ٣ ∴ م.ح = {(-٣، ٣)}

مثال ٢

أوجد فى ع × ع مجموعة الحل للمعادلتين: س + ص = ٣ ⟸ (١) ، س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٧ ⟸ (٢)

الحل

من المعادلة (١) ∴ س = ٣ - ص (٣) بالتعويض عن قيمة س فى المعادلة (٢)

∴ (٣ - ص)^{٢} + ص (٣ - ص) + ص^{٢} - ٧ = ٠

٩ - ٦ ص + ص^{٢} + ٣ ص - ص^{٢} + ص^{٢} - ٧ = ٠

ص^{٢} - ٣ ص + ٢ = ٠ **تحليل مقدار ثلاثى بسيط**

∴ (ص - ٢) (ص - ١) = صفر

∴ ص = ٢ أو ص = ١ بالتعويض فى المعادلة (٣)

عندما ص = ٢ فإن: س = ٣ - ٢ = ١

عندما ص = ١ فإن: س = ٣ - ١ = ٢ ∴ م.ح = {(١، ٢)، (٢، ١)}

مثال ٣

أوجد فى ع × ع مجموعة الحل للمعادلتين: ٢ ص = − س + ٢ ⟸ ١ ، س ص = −٤ ⟸ ٢

الحل

من المعادلة ١ ∴ س = ٢ − ٢ ص ٣

وبالتعويض فى المعادلة ٢ ∴ ص (٢ − ٢ ص) = −٤

∴ ٢ ص − ٢ ص^{٢} = −٤ بقسمة طرفى المعادلة على (−٢)

∴ − ص + ص^{٢} = ٢ ∴ ص^{٢} − ص − ٢ = ٠ ∴ (ص − ٢) (ص + ١) = ٠

∴ ص = ٢ أو ص = −١ بالتعويض فى المعادلة ٣

عندما ص = ٢ فإن: س = ٢ − ٢ (٢) = −٢

عندما ص = −١ فإن: س = ٢ − ٢ (−١) = ٤ م.ح = {(−٢، ٢)، (٤، −١)}

ثانيًا تطبيقات على حل معادلتين فى متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية:

مثال ٤

عددان حقيقيان موجبان، الفرق بينهما ١ ، ومجموع مربعيهما ٢٥ . أوجد العددين. (بنى سويف ٢٠٢٢)

الحل

بفرض أن العدد الأكبر س ، والعدد الأصغر ص

س − ص = ١ ⟸ ١ ، س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥ ⟸ ٢

من ١ س = ١ + ص ⟸ ٣ بالتعويض فى ٢ ينتج أن:

(١ + ص)^{٢} + ص^{٢} = ٢٥ ∴ ١ + ص^{٢} + ٢ ص + ص^{٢} = ٢٥

∴ ٢ ص^{٢} + ٢ ص − ٢٤ = ٠ بقسمة طرفى المعادلة على (٢)

∴ ص^{٢} + ص − ١٢ = ٠ ∴ (ص−٣) (ص + ٤) = ٠

∴ إما ص − ٣ = ٠ أو ص + ٤ = ٠

∴ ص = ٣ أو ص = −٤ (مرفوض)

∴ العدد الأصغر هو: ٣ وبالتعويض فى ٣

∴ س = ١ + ٣ ∴ العدد الأكبر هو ٤ ∴ العددان هما: ٣ ، ٤

سؤال ١

أوجد فى ع × ع مجموعة الحل للمعادلتين فى كل مما يأتى:

١ ص = س ، ص = س^{٢} − ٣س

٢ ص − س = ٣ ، س^{٢} − س ص + ص^{٢} = ١٣

مثال ٥

مستطيل مساحته ٢٨ سم^{٢}، محيطه ٢٢ سم، أوجد بعديه.

تذكر أن

في المستطيل:

الطول + العرض = $\frac{١}{٢}$ المحيط

الطول × العرض = المساحة

الحل

نفرض أن بعدى المستطيل هما س ، ص حيث س > ٠ ، ص > ٠

∴ س + ص = ١١ ⟸ (١) ، س ص = ٢٨ ⟸ (٢)

من (١) ص = ١١ − س ⟸ (٣) بالتعويض فى (٢)

س (١١ − س) = ٢٨ ⟸ ١١س − س^{٢} − ٢٨ = ٠ (بالضرب فى −١)

س^{٢} − ١١س + ٢٨ = ٠ ⟸ (س − ٤) (س − ٧) = ٠ ∴ س = ٤ أو س = ٧ بالتعويض فى (٣)

عند س = ٤ فإن: ص = ٧

عند س = ٧ فإن: ص = ٤ ∴ بُعدا المستطيل هما ٧ سم ، ٤ سم

مثال ٦

مربعان الفرق بين محيطيهما ١٢ سم، والفرق بين مساحتيهما ٣٣ سم^{٢}. أوجد طول ضلع كل منهما.

الحل

تذكر أن

محيط المربع = طول الضلع × ٤

مساحة المربع = طول الضلع × نفسه

نفرض أن طول ضلع المربع الأول = س سم

نفرض أن طول ضلع المربع الثانى = ص سم حيث س > ص

٤ س − ٤ ص = ١٢ (بالقسمة على ٤)

∴ س − ص = ٣

∴ س = ص + ٣ ⟸ (١)

س^{٢} − ص^{٢} = ٣٣ ⟸ (٢) بالتعويض من المعادلة (١) فى (٢)

(ص + ٣)^{٢} − ص^{٢} − ٣٣ = ٠ ∴ ص^{٢} + ٦ ص + ٩ − ص^{٢} − ٣٣ = ٠

∴ ٦ ص − ٢٤ = ٠ ∴ ٦ ص = ٢٤

∴ ص = ٤ بالتعويض فى المعادلة (١) ∴ س = ٧

∴ طول ضلع المربع الأول = ٧ سم ، ∴ طول ضلع المربع الثانى = ٤ سم

مثال ٧

حديقة على شكل مثلث قائم الزاوية طول وتره ٣٠ مترًا ومحيطه ٧٢ مترًا.
أوجد طولى الضلعين الآخرين، ثم أوجد مساحة الحديقة.

الحل

نفرض أن: طولى الضلعين الآخرين هما س متر ، ص متر

∵ محيط الحديقة = ٧٢ مترًا

∵ محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه الثلاثة

∴ س + ص + ٣٠ = ٧٢ ⟸ س + ص = ٤٢ ⟸ ١

∵ المثلث قائم الزاوية

∴ $س^٢ + ص^٢ = (٣٠)^٢$ ⟸ $س^٢ + ص^٢ = ٩٠٠$ ⟸ ٢

من المعادلة ١ ص = ٤٢ − س ٣ وبالتعويض فى المعادلة ٢

∴ $س^٢ + (٤٢ − س)^٢ = ٩٠٠$

∴ $س^٢ + ١٧٦٤ − ٨٤ س + س^٢ − ٩٠٠ = ٠$

∴ $٢ س^٢ − ٨٤ س + ٨٦٤ = ٠$ (بقسمة طرفى المعادلة على ٢)

∴ $س^٢ − ٤٢ س + ٤٣٢ = ٠$

∴ (س − ٢٤) (س − ١٨) = ٠

∴ س = ٢٤ أو س = ١٨ بالتعويض فى المعادلة ٣

∴ ص = ٤٢ − ٢٤ = ١٨ أو ص = ٤٢ − ١٨ = ٢٤

∴ س = ٢٤ ، ص = ١٨ أو س = ١٨ ، ص = ٢٤

∴ طولا الضلعين الآخرين ٢٤ مترًا ، ١٨ مترًا

مساحة الحديقة = $\frac{١}{٢}$ × ٢٤ × ١٨ = ٢١٦ $م^٢$

أ

٣٠ مترًا

(س مترًا)

ب

حـ

(ص مترًا)

تذكر أن

مساحة المثلث القائم الزاوية
= $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى ضلعى القائمة

سؤال ٢

١ إذا كان مجموع عددين صحيحين هو ٧ ، وحاصل جمع مربعيهما ٢٥ **أوجد العددين.**

٢ مثلث قائم الزاوية طول وتره ١٣ سم ، محيطه يساوى ٣٠ سم ، **أوجد مساحة سطحه.**



أسئلة الكتاب المدرسى ◂ أسئلة موقع الوزارة

تدريبات الأضـــواء

أولاً حل معادلتين فى متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية:

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ المعادلة ٣ س + ٤ ص + س ص = ٥ من الدرجة .... (الدقهلية ٢٠٢١)

(أ) الصفرية (ب) الأولى (جـ) الثانية (د) الثالثة

٢ أحد حلول المعادلة: $س^٢ - ص^٢ = ٣$ فى ح × ح هو ....

(أ) (١ ، −٢) (ب) (−٢ ، ١) (جـ) (١ ، ٢) (د) (−١ ، −٢)

٣ مجموعة حل المعادلتين: س = ٢ ، س ص = ٦ فى ح × ح هى .... (بورسعيد ٢٠٢٢)

(أ) {(٢ ، ٣)} (ب) {(٢ ، −٣)} (جـ) {(−٢ ، ٣)} (د) {(٢ ، $\frac{١}{٣}$)}

٤ الزوج المرتب الذى يحقق كلًا من المعادلتين: س ص = ٢ ، س − ص = ١ هو ....

(أ) (١ ، ٢) (ب) (٢ ، ١) (جـ) (١ ، ١) (د) (٢ ، −١)

٥ أحد حلول المعادلتين س − ص = ١ ، $س^٢ + ص^٢ = ٢٥$ فى ح × ح هو .... (البحيرة ٢٠٢٤)

(أ) (٠ ، ٥) (ب) (٤ ، ٣) (جـ) (−٥ ، ٠) (د) (٢ ، ١)

٦ إذا كان $س^٢ - ص^٢ = ١٥$ ، س + ص = ٥ فإن س − ص = ... (السويس ٢٠١٨)

(أ) ١٠ (ب) ٧٥ (جـ) ٣ (د) ٥

٧ مجموعة حل المعادلتين: س = ص ، س ص = ١ هى ....

(أ) {(١ ، ١)} (ب) {(−١ ، −١)}

(جـ) {(١ ، −١)} (د) {(−١ ، −١) ، (١ ، ١)}

٨ مجموعة الحل للمعادلتين: س + ص = ٠ ، $س^٢ + ص^٢ = ٢$ فى ح × ح هى .... (أسيوط ٢٠١٧)

(أ) {(٠ ، ٠)} (ب) {(١ ، −١)}

(جـ) {(−١ ، ١)} (د) {(١ ، −١) ، (−١ ، ١)}

٩ مجموعة حل المعادلتين: س + ص = ٢ ، س + ص = ٢ س ص فى ح × ح هى .... (الشرقية ٢٠٢٤)

(أ) {(٠ ، ٢)} (ب) {(٢ ، ٠)}

(جـ) {(١ ، ١)} (د) {(٠ ، ٢) ، (٢ ، ٠)}

١٠ إذا كان س = ص + ١ ، $(ص - س)^٢ + ص = ٣$ فإن: س = ... (المنوفية ٢٠١٦)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

١١ إذا كان $ا ب + ب^{٢} = ١٥$ ، $ا + ب = ٥$ فإن: $ب =$ ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

١٢ إذا كان $ا^{٢} - ب^{٢} = ٦$ ، $ا - ب = \sqrt{٣}$ فإن: $(ا + ب)^{٢} =$ ....

(أ) $٢\sqrt{٣}$ (ب) $٣\sqrt{٣}$ (جـ) ٣ (د) ١٢

---

٢ أوجد مجموعة الحل فى ح × ح لكل من أزواج المعادلات الآتية:

١ $س = ٣$ ، $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$ (الإسماعيلية ٢٠٢٢)

٢ $س = ص$ ، $س^{٢} + ص^{٢} = ٥٠$

٣ $س = ٠$ ، $س^{٢} + ص^{٢} + ٤ س + ٣ ص - ١٠ = ٠$

٤ $ص - ٢ س = ٠$ ، $س ص = ٨$

٥ $س - ٢ ص = ٥$ ، $س^{٢} - ٢ س ص = ١٥$

٦ $س - ص = ٠$ ، $٢ س^{٢} - ص^{٢} = ٩$ (السويس ٢٠٢٢)

٧ $ص + ٢ س + ١ = ٠$ ، $٤ س^{٢} + ص^{٢} - ٣ س ص = ١$

٨ $س - ص = ٠$ ، $س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٢٧$ (القليوبية ٢٠١٩)

٩ $س - ٢ ص = ٠$ ، $س^{٢} + ص^{٢} = ٢٠$ (البحيرة ٢٠٢٢)

١٠ $س - ص = ١$ ، $س^{٢} - س ص = ٠$

١١ $س + ص = ٤$ ، $\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} = ١$ حيث $س \neq ٠$ ، $ص \neq ٠$ (المنوفية ٢٠١٩)

١٢ $ص = ٢ س - ١$ ، $س^{٢} - ص^{٢} = (٢ س - ٢ ص)(ص - ٢ س)$ ، $س \neq ص$

---

٣ اكتشف الخطأ:

لحل المعادلتين
$$\begin{cases} ص = س^{٢} - ٣ س + ٤ \\ ص = ٢ س + ٤ \end{cases}$$

قام أحمد بعمل الرسم المقابل وكتب أنه يوجد حل وحيد لهما وهو (٠ ، ٤)

اكتشف الخطأ فى حل أحمد ثم اكتب الصواب.

ثانيًا تطبيقات على حل معادلتين فى متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية:

٤ اختر الإجابة الصحيحة:

١ عددان حقيقيان موجبان مجموعهما ١٧، وحاصل ضربهما ٧٢ فإن العددين هما ....

(أ) ٧، ١٠ (ب) ٨، ٩ (جـ) ٦، ١١ (د) ٥، ١٢

٢ عددان موجبان مجموعهما٥ ومجموع مربعيهما ١٧ فإن العددين هما ....

(أ) ١، ٤ (ب) ٠، ٥ (جـ) ٢، ٣ (د) -٦، ٢

٣ إذا كانت النسبة بين محيطى مربعين ١ : ٢ فإن النسبة بين مساحتيهما هى ....

(أ) ١ : ٢ (ب) ٢ : ١ (جـ) ١ : ٤ (د) ٤ : ١

٤ مستطيل محيطه ٢٤ سم، ومساحته ٢٠ سم^{2}، فإن بُعديه هما ....

(أ) ٣، ٩ (ب) ١٠، ٢ (جـ) ٤، ٥ (د) ٥، ٧

٥ بعدا المستطيل الذى محيطه ٤٤ سم، ومساحته ١٢٠ سم^{2} هما .... سم، .... سم

(أ) ٨، ١٤ (ب) ٦، ١٦ (جـ) ١٢، ١٠ (د) ٨، ١٥

٦ عددان موجبان الفرق بينهما ١ ومربع مجموعهما ٢٥ فإن العددين هما ....

(أ) ١، ٢ (ب) ٢، ٣ (جـ) ٣، ٤ (د) ٤، ٥

٧ معين مساحته ٢٤ سم^{2}، فإذا كان طول أحد قطريه يزيد على طول القطر الآخر بمقدار ٢ سم، فإن محيطه يساوى .... سم.

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٢٠ (د) ١٤

---

٥ أجب عما يلى:

١ عددان موجبان مجموعهما ٥، ومجموع مربعيهما ١٣، **أوجد العددين.**

٢ عددان مجموعهما ٩، والفرق بين مربعيهما ٩، **أوجد العددين.**

٣ عددان صحيحان مجموعهما ٩، والفرق بين مربعيهما ٢٧، **أوجد العددين.**

٤ عددان موجبان مجموعهما ٧، وحاصل ضرب أصغرهما ونصف أكبرهما يساوى ٦، **أوجد العددين.**

٥ عددان الفرق بينهما ٥، وحاصل ضربهما ٣٦ **أوجد العددين.**

٦ عددان أحدهما معكوس جمعى للآخر، ومجموع مربعيهما هو ٢، **أوجد العددين.**

٧ عددان حاصل ضربهما ١٠ ومجموع أحدهما والمعكوس الجمعى للآخر يساوى ٣، **أوجد العددين.**

٨ عدد مكون من رقمين، ورقم آحاده ضعف رقم عشراته. إذا كان حاصل ضرب الرقمين يساوى ثُلث العدد الأصلى **فما هو العدد؟** (المنوفية ٢٠١٦)

٩ مستطيل طوله يزيد على عرضه بمقدار ٣ سم، **أوجد** محيطه إذا كانت مساحته ١٠٨ سم٢.

١٠ مستطيل يزيد طوله على عرضه بمقدار ٢ سم، ومساحته ٢٤ سم٢. **أوجد** محيطه.

١١ مستطيل محيطه ٢٤ سم، ومساحته ٣٥ سم٢. **أوجد** طولى بعديه.

١٢ مستطيل طول قطره ٥ سم، ومحيطه ١٤ سم. **أوجد** طولى بعديه.

١٣ مستطيل طوله ضعف عرضه، ومساحته ١٨ سم٢، **أوجد** طوله وعرضه.

١٤ مثلث قائم الزاوية طول وتره ١٠ سم، ومحيطه ٢٤ سم.
أوجد طولى ضلعى القائمة. (الجيزة ٢٠١٩)

١٥ مثلث قائم الزاوية طول أحد ضلعى القائمة له ٥ سم ، محيطه يساوى ٣٠ سم.
أوجد مساحته. (الدقهلية ٢٠٢٢)

١٦ معين الفرق بين طولى قطريه ٥ سم ، مساحته ٧٥ سم٢. **أوجد** طول كل من قطريه.

١٧ إذا كان عمر أب الآن يزيد على ثلاثة أمثال عمر ابنه بعام واحد، ومجموع مربعيهما يزيد على ثلاثة أمثال حاصل ضرب العمرين بمقدار ١٨١ سنة. **فما عمر كل منهما الآن؟**

تفكير إبداعي TIMSS

٦ أوجد فى ع × ع مجموعة حل المعادلتين:

(أ) س ص = $\frac{١}{١٢}$ ، س + ص = ٧ س ص

(ب) س + ص = ٥ ، $\sqrt{س}$ + ص = ٣ حيث س ≥ ٢

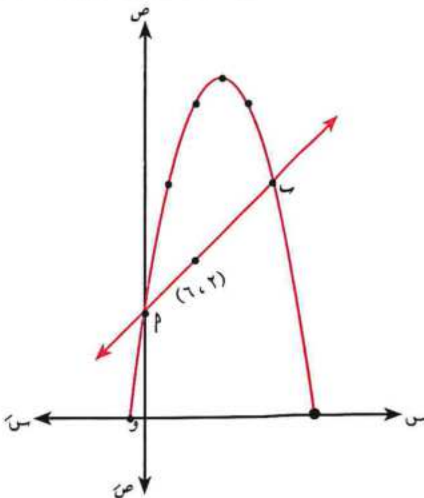
٧ فى الشكل المقابل:

منحنى الدالة د حيث:

د (س) = −س٢ + ٦ س + ٤ ،

(٢ ، ٦) ∈ $\overleftrightarrow{أب}$

أوجد إحداثى كلٍّ من: أ ، ب



تدريبات الكتاب المدرسى

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ مجموعة الحل للمعادلتين س − ص = ٠ ، س ص = ٩ هى ....

(أ) {(٠ ، ٠)} (ب) {(−٣ ، −٣)}

(جـ) {(٣ ، ٣)} (د) {(−٣ ، −٣) ، (٣ ، ٣)}

٢ أحد حلول المعادلتين: س − ص = ٢ ، $س^2 + ص^2 = ٢٠$ هو ....

(أ) (−٤ ، ٢) (ب) (٢ ، −٤) (جـ) (٣ ، ١) (د) (٤ ، ٢)

٣ عددان موجبان مجموعهما ٧، وحاصل ضربهما ١٢ فإن العددين هما ....

(أ) ٢ ، ٥ (ب) ٢ ، ٦ (جـ) ٣ ، ٤ (د) ١ ، ٦

---

٢ أجب عما يأتى:

١ **أوجد مجموعة حل كل من المعادلات الآتية:**

(أ) ص − س = ٢ ، $س^2 + س ص − ٤ = ٠$ (الإسكندرية ٢٠٢٤)

(ب) س + ٢ ص = ٤ ، $س^2 + س ص + ص^2 = ٧$

(جـ) س − ٢ ص − ١ = ٠ ، $س^2 − س ص = ٠$ (كفر الشيخ ٢٠١٩)

(د) ص + ٢ س = ٧ ، $٢ س^2 + س + ٣ ص = ١٩$

(هـ) س − ص = ١٠ ، $س^2 − ٤ س ص + ص^2 = ٥٢$

(و) س + ص = ٢ ، $\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} = ٢$ (حيث: س ≠ ٠ ، ص ≠ ٠) (أسيوط ٢٠٢٤)

٢ عدد مكون من رقمين رقم آحاده ضعف رقم عشراته، فإذا كان حاصل ضرب الرقمين يساوى نصف العدد الأصلى، **فما هو العدد؟**

٣ مستطيل يزيد طوله على عرضه بمقدار ٣ سم ومساحته ٢٨ $سم^2$. **أوجد محيطه.** (الأقصر ٢٠٢٢)

٤ مثلث قائم الزاوية طول وتره ١٣ سم، محيطه يساوى ٣٠ سم. **أوجد طول ضلعى القائمة.**

٥ معين الفرق بين طولى قطريه ٤ سم، ومحيطه يساوى ٤٠ سم. **أوجد طول كل من قطريه.**

٦ تتحرك نقطة على المستقيم ٥ س − ٢ ص = ١، بحيث كان إحداثيها الصادى ضعف مربع إحداثيها السينى. **أوجد إحداثى هذه النقطة.** (الدقهلية ٢٠٢٤)

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ المعادلة $\frac{1}{س} + \frac{1}{ص} = ٣$ من الدرجة .... حيث س ≠ ص ≠ ٠ (الدقهلية ٢٠٢٢)

(أ) الأولى (ب) الثانية (جـ) الثالثة (د) الرابعة

٢ إذا كان $أ^٢ - ب^٢ = ٧$ ، أ - ب = ١ فإن أ + ب = ... (الإسكندرية ٢٠٢٢)

(أ) ٦ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ٧

٣ الخطان المستقيمان $ل_١$: ٣ س + ٧ ص = ٠ ، $ل_٢$: ٥ س + ٩ ص = ٠

يتقاطعان فى .... (كفر الشيخ ٢٠٢٤)

(أ) الربع الثالث (ب) الربع الرابع (جـ) الربع الأول (د) نقطة الأصل

٤ عددان مجموعهما ٨، وحاصل ضربهما ١٢ فإن العددين هما .... (الإسماعيلية ٢٠٢٢)

(أ) ٢، ٦ (ب) ٧ ، ١ (جـ) ٣ ، ٥ (د) ٤ ، ٤

٥ إذا كان منحنى الدالة التربيعية (د) يمر بالنقاط (٤ ، ٠) ، (٠ ، -٨) ، (-٢ ، ٠) فإن مجموعة حل

المعادلة د (س) = صفر فى ح هى .... (الشرقية ٢٠١٩)

(أ) {٤ ، ٠} (ب) {٨ ، ٠} (جـ) {-٢ ، ٤} (د) {٢ ، ٨}

٦ إذا كان أ ب = ٣ ، أ $ب^٢$ = ١٢ فإن ب = ... (الإسكندرية ٢٠٢٢)

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) -٢ (د) ± ٢

---

٢ أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية فى ح × ح:

١ ص = ٣ + س ، $س^٢$ - ٢س + ٣ص = ١٥ (القليوبية ٢٠٢٤)

٢ ٢ س - ص = ٤ ، س ص = ٦ (الفيوم ٢٠١٨)

٣ ٣ س - ص = ٤ ، ص - ٢ س = ٣ (أسوان ٢٠١٩)

---

٣ ١ مستطيل محيطه ٢٢ سم، ومساحته ٢٤ سم أوجد كلًا من بعديه. (بورسعيد ٢٠١٩)

٢ باستخدام القانون العام أوجد مجموعة حل المعادلة: $س^٢$ + ٣ س + ١ = ٠ فى ح

(مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد) (القاهرة ٢٠٢٢)

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ عدد حلول المعادلة س = ٧ فى ع × ع هو .... (القاهرة ٢٠٢١)

(أ) عدد لا نهائى (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٢

٢ إذا كان مجموع عمرى أحمد ومحمد الآن ١٥ سنة، فإن مجموع عمريهما بعد خمس سنوات يساوى .... سنة. (قنـا ٢٠٢١)

(أ) ٢٠ (ب) ٢٥ (جـ) ٣٠ (د) ٣٥

٣ مجموعة حل المعادلتين : س − ٢ص = ١ ، ٢س − ٤ص = ٧ فى ع × ع هى ....

(أ) {(٢، ٣)} (ب) ∅ (المنوفية ٢٠٢٣)

(جـ) {(٣، ٢)} (د) {(س، ص) ∈ ع × ع : ص = $\frac{س-١}{٢}$}

٤ إذا كانت مجموعة حل المعادلة: $س^٢$ − أ س + ٤ = ٠ فى ع هى {−٢} فإن أ = ... (كفر الشيخ ٢٠٢٤)

(أ) −٢ (ب) −٤ (جـ) ٢ (د) ٤

٥ إذا كان المستقيمان الممثلان للمعادلتين: س + ٣ص = ٤ ، س + أ ص = ٧ متوازيين فإن أ = ...

(أ) −٣ (ب) $\frac{-١}{٣}$ (جـ) ١ (د) ٣

٦ إذا كان: س = ٢ ، $س^٢$ + $ص^٢$ = ١٣ فإن: ص = ... (الغربية ٢٠٢٢)

(أ) −٣ (ب) ±٣ (جـ) ٣ (د) ٩

٧ نقطة تقاطع المستقيمين س + ٣ = صفر ، ص − ٥ = صفر تقع فى الربع .... (القليوبية ٢٠٢٤)

(أ) الأول (ب) الثانى (جـ) الثالث (د) الرابع

٨ عددان موجبان مجموعهما ٧ وحاصل ضربهما ١٢ فإن العددين هما .... (بورسعيد ٢٠٢٤)

(أ) ٢، ٥ (ب) ٢، ٦ (جـ) ٣، ٤ (د) ١، ٦

٩ مجموعة حل المعادلة $س^٢$ = س فى ع هى .... (بنى سويف ٢٠٢٤)

(أ) {٠} (ب) {−١} (جـ) {٠ ، ١} (د) ∅

٢ أجب عما يأتى:

١ **ارسم** الشكل البيانى لمنحنى الدالة د حيث د (س) = س^{٢} − ٤ مستعينًا بالفترة [−٣، ٣]

ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة: −س^{٢}+٤ = ٠

٢ **أوجد مجموعة حل المعادلة:**

$\frac{١}{س} = \frac{٢ س + ١}{٣}$ حيث س ≠ صفر .

٣ **أوجد بيانيًّا فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين:**

٣س − ص + ٤ = ٠ ، ص = ٢ س + ٣ (الفيوم ٢٠١٩)

٤ مستطيل طول قطره يساوى ٥ سم ومحيطه ١٤ سم. **أوجد بعديه.**

٥ **أوجد مجموعة حل المعادلتين:**

س − ص = ٠ ، س ص = ٩ فى ح × ح (المنوفية ٢٠٢١)

٦ **أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة:**

٣س^{٢} − ٥س + ١ = ٠

باستخدام القانون العام مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين. (كفر الشيخ ٢٠٢٤)

٧ إذا علمت أن مجموع الأعداد المتتالية ١ ، ٢ ، ٣ ، .... ، ن .

يُعطَى بالعلاقة $\frac{١}{٢}$ ن (ن + ١) (حيث ن ∈ ص$^{+}$)

فكم عددًا متتاليًا بداية من ١ يُعطى المجموع ٦٦٦؟

١ أكمل ما يأتى:

١ إذا كان (٥ ، س − ٧) = (ص + ١ ، −٥) فإن س + ص = ...

٢ الدالة د حيث د (س) = $س^٦$ + ٢$س^٤$ − ٣ كثيرة حدود من الدرجة ....

٣ إذا كان منحنى الدالة د حيث د (س) = $س^٢$ − أ يمر بالنقطة (١ ، ٠) فإن أ = ...

---

٢ أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية:

١ س + ٣ص = ٧ ، ٥ س − ص = ٣ بيانيًا وجبريًا.

٢ $س^٢$ − ٤ س + ١ = ٠ باستخدام القانون العام مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

٣ ص − س = ٣ ، $س^٢$ + $ص^٢$ − س ص = ١٣

---

٣ ارسم الشكل البيانى للدالة د حيث د (س) = $س^٢$ − ٢س − ١ مستعينًا بالفترة [−٢ ، ٤]

ومن الرسم أوجد:

(أ) معادلة محور التماثل.

(ب) مجموعة حل المعادلة $س^٢$ − ٢س − ١ = ٠

---

٤ عددان مجموعهما ٩٠ ، وحاصل ضربهما يساوى ٢٠٠٠ . **أوجد العددين.**

---

٥ تحرك راكب دراجة من مدينة أ شرقًا قاصدًا المدينة ب، ثم تحرك من المدينة ب شمالًا قاصدًا المدينة حـ، فقطع مسافة ١٤ كم. فإذا كان مجموع مربعى المسافتين المقطوعتين ١٠٠ $كم^٢$ ، **فأوجد:** (كفر الشيخ ٢٠٢٣)

أولًا: المسافة بين المدينتين أ ، ب.

ثانيًا: المسافة بين المدينتين ب ، حـ.

ثالثًا: أقصر مسافة بين المدينتين أ ، حـ.

---

٦ عند قفز الدلفين فوق سطح الماء فإنه يرسم مسارًا يتبع العلاقة: ص = −٢, ٠ $س^٢$ + ٢ س

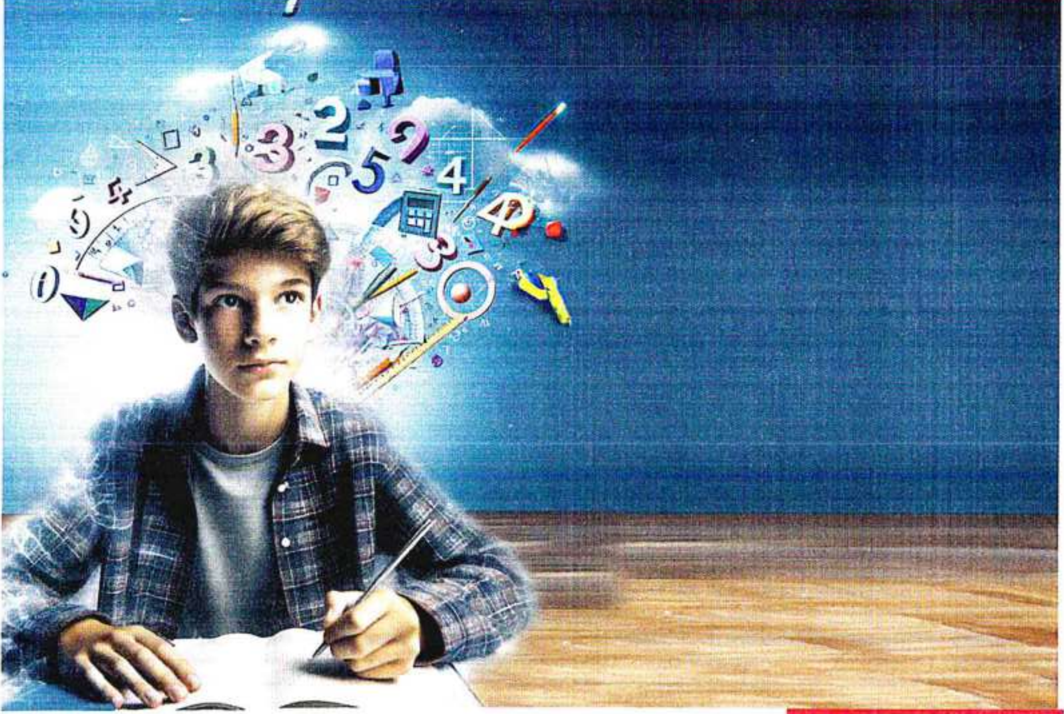
حيث ص ارتفاع الدلفين فوق سطح الماء ، س المسافة الأفقية بالقدم.

أوجد المسافة الأفقية التى يقطعها الدلفين عند قفزه من الماء.

الوحدة الثانية



الدوال الكسرية والعمليات عليها



أهداف دروس الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون الطالب قادرًا على أن:

الدرس الأول: مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود

يوجد مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود.

الدرس الثانى: الدالة الكسرية الجبرية

يتعرف دالة الكسر الجبرى.

يوجد مجال دالة الكسر الجبرى.

يوجد المجال المشترك لكسرين جبريين أو أكثر.

الدرس الثالث: تساوى كسرين جبريين

يختزل الكسر الجبرى إلى أبسط صورة.

يثبت أن كسرين جبريين متساويان.

الدرس الرابع: العمليات على الكسور الجبرية

يجرى عمليات الجمع والطرح والضرب والقسمة على الكسور الجبرية.

يتعرف المعكوس الجمعى للكسر الجبرى.

يتعرف المعكوس الضربى للكسر الجبرى.



ذاكر | الدرس ١

مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود

فكر وناقش

إذا كانت الدالـة د: ع ⟵ ع حيث د(س) = $س^٣ - ٣س^٢ - ١٠$ س

كثيرة الحدود من الدرجة **الثالثة** **فأوجـد** د (٠) ، د (–٢) ، د (٥)؛ **وماذا تلاحظ؟**

د (٠) = $(٠)^٣ - ٣(٠)^٢ - ١٠(٠) = ٠$

د (–٢) = $(–٢)^٣ - ٣(–٢)^٢ - ١٠(–٢) = –٨ - ١٢ + ٢٠ = ٠$

د (٥) = $(٥)^٣ - ٣(٥)^٢ - ١٠(٥) = ١٢٥ - ٧٥ - ٥٠ = ٠$

نلاحـظ أن: د(٠) = ٠ ، د(–٢) = ٠ ، د(٥) = ٠

لذلك تسمى الأعداد: ٠ ، –٢ ، ٥ «أصفار الدالة د»

وهى قيم س التى تجعل د (س) = ٠

مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود:

إذا كانت د دالة كثيرة الحدود فى س فإن مجموعة قيم س التى تجعل **د (س) = صفر**

تسمى: مجموعة أصفار الدالة د ، ونرمز لها بالرمز ص(د)

أى أن: ص(د) هى مجموعة الحل للمعادلة **د (س) = صفر** فى ع

فمثلًا: إذا كانت د : ع ⟵ ع حيث د(س) = س – ٣

وبوضع د(س) = ٠

∴ س – ٣ = ٠

∴ س = ٣

∴ ص (د) = {٣}

ونستنتج من ذلك أنه للحصول على أصفار الدالة د «نضع **د (س) = صفر**» ونحل المعادلة الناتجة.

مثال ١

أوجد مجموعة أصفار كل من الدوال كثيرات الحدود المعرفة بالقواعد الآتية:

١ د (س) = ٥س − ١٥

٢ د (س) = س^{٢} − ٣س + ٢

الحل

١ نضع د (س) = صفر

∴ ٥س − ١٥ = ٠

∴ ٥س = ١٥

∴ س = $\frac{١٥}{٥}$ = ٣

∴ ص (د) = {٣}

٢ نضع د (س) = ٠

∴ س^{٢} − ٣س + ٢ = ٠

∴ (س − ٢) (س − ١) = صفر

∴ س − ٢ = ٠ أو س − ١ = ٠

∴ س = ٢ أو س = ١

∴ ص (د) = {٢ ، ١}

مثال ٢

إذا كانت: د (س) = (س + ٤) (س + ٢) (س − ١) فأوجد ص (د).

الحل

نضع د (س) = ٠

∴ (س + ٤) (س + ٢) (س − ١) = ٠

س + ٤ = ٠ أو س + ٢ = ٠ أو س − ١ = ٠

س = −٤ أو س = −٢ أو س = ١

∴ ص (د) = {−٤ ، −٢ ، ١}

س؟ سؤال ١

أوجد ص (د) لكل من الدوال المعرَّفة بالقواعد الآتية :

١ د (س) = ٥ س

٢ د (س) = س^{٢} − س − ٦

٣ د (س) = (س − ٢) (س^{٢} − ٩)

٤ د (س) = س^{٣} − ٦س^{٢}

مثال ٣

أوجد ص (د) لكل من الدوال كثيرات الحدود المعرَّفة بالقواعد الآتية :

١ د (س) = ٦ ٢ د (س) = صفر ٣ د (س) = $س^٢ + ٤$ (الأزهر ٢٠٢٤)

الحل

١ ∵ د (س) = ٦ لا توجد قيمة لـ س تجعل الدالة تساوى صفرًا

∴ ص (د) = ∅

٢ ∵ د (س) = صفر أى قيمة لـ س تجعل الدالة تساوى صفرًا

∴ ص (د) = ح

٣ ∵ د (س) = $س^٢ + ٤$

∵ $س^٢ \geq$ ٠ لكل س ∈ ح

∴ $س^٢ + ٤ \geq ٤$ لكل س ∈ ح

∴ د (س) ≠ ٠ لكل س ∈ ح

∴ ص (د) = ∅

نقاط هامة

من المثال السابق نستنتج أن:

- إذا كان د (س) = أ حيث أ ∈ ح* فإن ص (د) = ∅
- إذا كان د (س) = ٠ فإن ص (د) = ح
- إذا كان د (س) = $س^٢$ + أ حيث أ ∈ $ح_+$ فإن ص (د) = ∅ وهذه الدالة ليس لها أصفار حقيقية.

حيث إنه إذا كان أ ≥ ٠ فإن $س^٢$ + أ ≥ أ لكل س ∈ ح

تذكر أن

ح* = ح − {٠}

سؤال ٢

أوجد ص (د) لكل من الدوال المعرَّفة بالقواعد الآتية :

١ د (س) = −٧ ٢ د (س) = $س^٢ - ٤$

٣ د (س) = $س^٣ + ١$ ٤ د (س) = $س^٢ + ١$ (قنا ٢٠٢٤)

مثال ٤

أوجد ص (د) لكل من الدوال كثيرات الحدود المعرَّفة بالقواعد الآتية:

١ د (س) = س^٦ − ٦٤ ٢ د (س) = س^٢ − س + ١

الحل

١ ∵ د (س) = س^٦ − ٦٤ بوضع س^٦ − ٦٤ = ٠ ∴ س^٦ = ٦٤

∴ س^٦ = (±٢)^٦ ∴ س = ±٢ ∴ ص (د) = {٢ ، −٢}

٢ د (س) = س^٢ − س + ١

بوضع: س^٢ − س + ١ = ٠ (نجد أن المعادلة يتعذر تحليلها) لذلك نستخدم القانون العام

حيث ا = ١ ، ب = −١ ، حـ = ١

∴ ب^٢ − ٤ ا حـ = (−١)^٢ − ٤ (١) (١) = −٣

فيكون س = (١ ± √−٣) / ٢ ∉ ع

∴ لا يوجد حل للمعادلة س^٢ − س + ١ = ٠ فى ع ∴ ص (د) = ∅

لاحظ أن

س^٢ − س + ١ = (س − ١/٢)^٢ + ٣/٤

مثال ٥

إذا كانت مجموعة أصفار الدالة د حيث: د (س) = ا س^٢ + س + ب هى {٠ ، ١}

فأوجد قيمة الثابتين ا ، ب (الإسكندرية ٢٠١٧)

الحل

∵ ص (د) = {٠ ، ١} ∴ د (٠) = ٠ ∴ ا × ٠ + ٠ + ب = ٠ ∴ ب = ٠

∴ د (س) = ا س^٢ + س

، ∵ د (١) = ٠ ⟸ ∴ ا × ١^٢ + ١ = ٠

∴ ا + ١ = ٠ ⟸ ∴ ا = −١

س؟ سؤال ٣

١ أوجد مجموعة أصفار كل من الدوال كثيرات الحدود التالية:

(ا) د (س) = س (س + ٢) (س − ١) (ب) د (س) = س^٣ − س

(جـ) د (س) = س^٣ − ٣٤٣ (د) د (س) = س^٣ + ٥ س^٢ − ٩س − ٤٥

٢ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة د: د (س) = ا س^٢ + ب س + ٨ هى {٢ ، ٤} فأوجد قيمة ا ، ب



◀ أسئلة الكتاب المدرسي ◀ أسئلة موقع الوزارة

تدريبات الأضــواء

مجموعة اصفار الدالة كثيرة الحدود:

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ مجموعة أصفار الدالة د: د (س) = س – ٥ فى ع هى .... (القاهرة ٢٠٢٤)

(أ) ∅ (ب) {٠} (جـ) {–٥} (د) {٥}

٢ مجموعة أصفار الدالة د: د (س) = $س^٢$ – ١ هى ....

(أ) ∅ (ب) {٠، –١} (جـ) {٠، ١} (د) {–١، ١}

٣ مجموعة أصفار الدالة د: د (س) = $س^٢$ + ٩ هى .... (كفر الشيخ ٢٠٢٢)

(أ) ع (ب) {٣} (جـ) {٣، –٣} (د) ∅

٤ مجموعة أصفار الدالة د: د (س) = (س – ١) (س + ٢) هى ....

(أ) {١، ٢} (ب) {١، –٢} (جـ) {–١، –٢} (د) {–١، ٢}

٥ مجموعة أصفار الدالة د: د (س) = $س^٢$ – ٣ س هى ....

(أ) {٠، –٣} (ب) {٠} (جـ) {٣} (د) {٠، ٣}

٦ مجموعة أصفار الدالة د: د (س) = صفر فى ع هى .... (الفيوم ٢٠٢٤)

(أ) ع (ب) ∅ (جـ) {صفر} (د) {١}

٧ مجموعة أصفار الدالة د: د (س) = ٧ فى ع هى .... (المنوفية ٢٠١٩)

(أ) {٧} (ب) ع (جـ) ع – {٧} (د) ∅

٨ مجموعة أصفار الدالة د: د (س) = –٥ س هى ....

(أ) {٠} (ب) {–٥} (جـ) {٥} (د) ∅

٩ مجموعة أصفار الدالة د: د (س) = $س^٢$ – ٧ س + ٦ هى ....

(أ) {٠} (ب) {٢، ٣} (جـ) {٦، ١} (د) {–٦، –١}

١٠ مجموعة أصفار الدالة د: د (س) = س^{٢} − (س − ١)^{٢} فى ح هى ....

(أ) {١}　　(ب) {$\frac{١}{٢}$}　　(جـ) ∅　　(د) {$\frac{-١}{٢}$}

١١ مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = س^{٢} + س + ١ هى ....

(أ) {١}　　(ب) {−١}　　(جـ) ∅　　(د) {−١ ، ١}

١٢ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = س^{٢} + ك هى ∅ فإن ك يمكن أن تكون ....

(أ) −٤　　(ب) −١　　(جـ) صفرًا　　(د) ٤

١٣ إذا كانت د (س) = س^{٢} + حـ ، ص (د) = {−٢ ، ٢} فإن حـ = ... (الشرقية ٢٠٢١)

(أ) ٢　　(ب) −٤　　(جـ) −٢　　(د) ٤

١٤ إذا كانت ص (د) = {٣} ، د (س) = س^{٣} − م فإن م = ...

(أ) ٣　　(ب) $\sqrt[٣]{٣}$　　(جـ) ٩　　(د) ٢٧

١٥ إذا كانت د (س) = أ س − ٣ ، ص (د) = ∅ فإن أ = ...

(أ) −٣　　(ب) صفر　　(جـ) ١　　(د) ٣

١٦ إذا كانت {٢} مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = س^{٢} − ٢ أ س + أ^{٢} فإن أ = ...

(أ) ٢　　(ب) −٢　　(جـ) ٤　　(د) −٤ (الوادى الجديد ٢٠١٤)

١٧ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = س^{٢} + ٤ س + حـ فى ح هى ∅ فإن : حـ ∈ ....

(أ)]−∞،٤[　　(ب)]٤ ، ∞[　　(جـ)]−∞ ، −٤[　　(د)]−٤ ، ∞[

١٨ إذا كانت ص (د) = {−٢ ، −١} ، د (س) = أ س^{٢} + ٣س + حـ ، فإن: د (١) + د (٢) = ...

(أ) ٣　　(ب) ١٨　　(جـ) −٣　　(د) −١٨

١٩ إذا كانت ص (د) = {−٢ ، ٠} حيث د (س) = أ س^{٢} + ب س + حـ، د (٣) = ١٥، فإن: د (٢) = ...

(أ) ٢　　(ب) ٤　　(جـ) −٨　　(د) ٨

٢ أوجد مجموعة أصفار الدوال كثيرات الحدود المعرفة بالقواعد التالية فى ع:

١ د (س) = – س

٢ د (س) = ٢

٣ د (س) = $\frac{٢ - س}{٧}$

٤ د (س) = ٤س^{٢} + ٢٥

٥ د (س) = س^{٢} – ٢

٦ د (س) = ٣٦ – ٤٩ س^{٢}

٧ د (س) = س^{٦} – ٣٢ س

٨ د (س) = س (س^{٢} –٩) –٣ (س^{٢} –٩) (البحيرة ٢٠٢٤)

٩ د (س) = س^{٢} – ٥ س + ٦ (المنيا ٢٠١٠)

١٠ د (س) = ٢ س^{٢} – ٥ س – ١٢

١١ د (س) = س^{٣} + ٦س^{٢} + ٩س

١٢ د (س) = س^{٤} – ١٣ س^{٢} + ٣٦

١٣ د (س) = س^{٣} + ٧ س^{٢} – ١٨ س

١٤ د (س) = ٢س^{٣} – ٢٥٠

١٥ د (س) = س^{٣} – ٥س^{٢} – ٤س + ٢٠

١٦ د (س) = (س–٣) (س + ٦) + ٨

١٧ د (س) = (٢س – ١)^{٢} – (س + ٣)^{٢}

١٨ د (س) = س^{٣} + ٢ س^{٢} – س – ٢

---

٣ إذا كانت {–١٦ ، ١٦} هى مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = س^{٢} + ل

فأوجد قيمة ل

---

٤ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة د: د (س) = ﻤ س^{٢} – ب س – ٩ هى {٣ ، –١}

فأوجد قيمة كل من ﻤ ، ب

تفكير إبداعى TIMSS

٥ إذا كانت د (س) = س^{٣} – ٤ س^{٢} – ١٤٧

فأثبت أن العدد ٧ هو صفر الدالة الوحيد فى ع.

٦ إذا كان ص (د) = {٣ ، $\frac{-١}{٢}$} حيث د (س) = ﻤ س^{٣} + ب س + حـ = ٠ ،

د (٠) = –٣ ، **فأوجد:** د $\left(\frac{١}{٢}\right)$

تدريبات الكتاب المدرسى

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = – ٣ س هى .... (الوادى الجديد ٢٠٢٢)

(أ) {٠}   (ب) {–٣}   (جـ) {–٣ ، ٠}   (د) ع

٢ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = س (س^{٢} - ٢ س + ١) هى .... (الإسماعيلية ٢٠١٧)

(أ) {٠ ، ١}   (ب) {٠ ، –١}   (جـ) {–١ ، ١}   (د) {١}

٣ إذا كانت ص (د) = {٢} ، د (س) = س^{٣} – م فإن م = ... (الأقصر ٢٠٢٢)

(أ) $\sqrt[٣]{٢}$ (ب) ٢   (جـ) ٤   (د) ٨

٤ إذا كانت ص (د) = {٥} ، د (س) = س^{٣} – ٣ س^{٢} + ٲ فإن ٲ = ...

(أ) –٥٠   (ب) –٥   (جـ) ٥   (د) ٥٠

٥ إذا كانت ص (د) = {١ ، –٢} ، د (س) = س^{٢} + س + ٲ فإن ٲ = ...

(أ) ٢٨   (ب) ١   (جـ) –١   (د) –٢

---

٢ أوجد مجموعة أصفار دوال كثيرات الحدود المعرفة بالقواعد الآتية فى ع :

(أ) د (س) = (س – ١) (س – ٢)   (ب) د (س) = س^{٢} – ٢ س

(جـ) د (س) = س^{٢} – ١٦   (د) د (س) = ٢٥ – ٩ س^{٢}

(هـ) د (س) = ٢ س^{٣} – ١٨ س   (و) د (س) = ٥ س^{٣} – ٢٠ س

(ز) د (س) = س^{٣} – ١٢٥   (ح) د (س) = ٢ س^{٣} + ١٦

(ط) د (س) = ٢ س^{٤} + ٥٤ س   (ى) د (س) = ٦ س^{٢} + س – ١٢

(ك) د (س) = س^{٣} + ٢ س^{٢} – ١٥ س   (ل) د (س) = ٢ س^{٤} + س^{٣} – ٦ س^{٢}

(م) د (س) = س (س – ٥) – ١٤   (ن) د (س) = (س – ٢) (س + ٣) + ٤

(س) د (س) = س^{٣} + س^{٢} – ٢ س – ٨   (ع) د (س) = س^{٣} – ٣ س^{٢} – ٤ س + ١٢

---

٣ إذا كانت د (س) = س^{٣} – ٢ س^{٢} – ٧٥ **فأثبت** أن العدد ٥ هو أحد أصفار هذه الدالة. (جنوب سيناء ٢٠١٨)

---

٤ إذا كانت {–٣ ، ٣} هى مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = س^{٢} + ٲ **فأوجد قيمة ٲ .** (قنا ٢٠١٨)

---

٥ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = ٲ س^{٢} + ب س + ١٥ هى {٣ ، ٥}

فأوجد قيمة كل من ٲ ، ب (الدقهلية ٢٠٢٢)

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ مجموعة أصفار الدالة د: د (س) = ٢ س هى .... (السويس ٢٠٢٢)

(أ) ع - {٠}　(ب) {٢}　(جـ) {٠}　(د) ع - {٢}

٢ مجموعة أصفار الدالة د: د (س) = $س^٣$ - ٩س هى.............. (البحيرة ٢٠٢٢)

(أ) {٠ ، ٣}　(ب) {٠ ، -٣، ٣}　(جـ) {-٣، ٣}　(د) ∅

٣ مجموعة أصفار الدالة د: د (س) = $س^٢$ + ١ فى ع هى.............. (القليوبية ٢٠٢٤)

(أ) {١}　(ب) {١ ، -١}　(جـ) ع　(د) ∅

٤ إذا كانت ص (د) = {٠ ، ٣} ، د (س) = $س^٢$ - ٣س + م فإن م = ... (دمياط ٢٠١٩)

(أ) ٦　(ب) صفر　(جـ) -٦　(د) -٣

٥ إذا كانت الدالة د : د (س) = م س + ٥ ، ص (د) = ∅ فإن م = ... (الفيوم ٢٠٠٨)

(أ) ١　(ب) صفر　(جـ) ٥　(د) -٥

٦ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $(س - ١)^٢$(س + ٢) هى.............. (الإسكندرية ٢٠٢٤)

(أ) {٢ ، -١}　(ب) {-٢ ، ١}　(جـ) {-٢ ، -١}　(د) {٢ ، ١}

---

٢ أجب عما يأتى:

١ **أوجد مجموعة أصفار الدالة** د: د (س) = $س^٣$ + $س^٢$ - ٢٠ س (بنى سويف ٢٠٢١)

٢ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = ك س + ٣ هى ∅

فأوجد قيمة ك. (توجيه الشرقية)

٣ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = $س^٢$ - ١٠ س + م هى {٥}،

فأوجد قيمة م .

٤ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة د حيث د : د (س) = $س^٢$ + ب س + حـ هى {٣ ، ٤}،

فأوجد قيمة كل من ب ، حـ. (قنا ٢٠٢٢)



فيديو الشرح

ذاكر الدرس ٢ الدالة الكسرية الجبرية

فكر وناقش

- العدد $\frac{أ}{ب}$ يكون نسبيًّا إذا كان أ ، ب عددين صحيحين ، ب ≠ ٠

فمثلًا: **إذا كانت:** د دالة حيث د (س) = س + ٢ فإن د : دالة كثيرة حدود من الدرجة **الأولى** مجالها ح

، **إذا كانت:** ر دالة حيث ر(س) = $س^٢$ − ٤ فإن ر : دالة كثيرة حدود من الدرجة **الثانية** مجالها ح

، **إذا كانت:** ن (س) = $\frac{د(س)}{ر(س)}$ = $\frac{س + ٢}{س^٢ - ٤}$ حيث س ≠ ٢ ، س ≠ −٢

فإن ن تسمى **دالة كسر جبرى** [سوف نتعلم فى هذا الدرس كيفية إيجاد مجالها]

تعريف

دالـة الكسـر الجبـرى ن : يقال إن الدالة ن دالة كسر جبرى إذا كانت ن (س) = $\frac{د(س)}{ر(س)}$

حيث د ، ر دالتين كثيرتى حدود ، ر(س) لا تساوى (صفرًا).

أى أن: إذا كان ن(س) = $\frac{د(س)}{ر(س)}$ ⟸ كثيرة الحدود (البسط) ، ⟸ كثيرة الحدود (المقام) ، ر (س) ≠ ٠ ، فإن ن دالة كسر جبرى.

أولًا مجال الدالة الكسرية الجبرية

مجال الدالـة الكسريـة الجبريـة = ح − مجموعـة أصفـار المقـام.

مثال ١

أوجد مجال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية:

١ $ن_١(س) = \frac{٢}{س - ٤}$ ٢ $ن_٢(س) = \frac{س^٢ - ٢}{س^٢ - ٥س + ٦}$ ٣ $ن_٣(س) = \frac{٥}{(س + ٧)^٢}$

الحل

١ بوضع س − ٤ = صفر

∴ س = ٤

∴ مجال $ن_١$ = ح − {٤}

٢ بوضع $س^٢$ − ٥ س + ٦ = ٠

∴ (س − ٣) (س − ٢) = ٠

∴ س = ٣ أو س = ٢

مجال $ن_٢$ = ح − {٣ ، ٢}

٣ بوضع $(س + ٧)^٢$ = ٠

∴ س + ٧ = ٠

س = −٧

مجال $ن_٣$ = ح − {−٧}

مثال ٢

أوجد مجال كل من الدوال الكسرية الجبرية المعرفة بالقواعد الآتية:

١ $ن_١(س) = \frac{س + ٧}{٣}$ ٢ $ن_٢(س) = \frac{١}{س^٢ + ١}$

الحل

١ ∵ $ن_١(س) = \frac{١}{٣} س + \frac{٧}{٣}$

∴ $ن_١$ دالة كثيرة الحدود من الدرجة الأولى.

∴ مجال $ن_١ = ح$

٢ ∵ $س^٢ ≥ ٠$ لكل $س ∈ ح$

∴ $س^٢ + ١ ≥ ١$ لكل $س ∈ ح$

∴ $س^٢ + ١ ≠ ٠$ لكل $س ∈ ح$

∴ مجال $ن_٢ = ح$

مثال ٣

أوجد مجال الدالة ن حيث $ن(س) = \frac{س + ١}{س^٢ - ٤}$ ، ثم أوجد إن أمكن كلًّا من ن (٣) ، ن (٠) ، ن(٢).

الحل

بوضع $س^٢ - ٤ = ٠$ ⟸ $(س - ٢)(س + ٢) = ٠$

∴ س = ٢ أو س = -٢

∴ مجموعة أصفار المقام = {٢ ، -٢}

مجال ن = ح - {-٢ ، ٢}

$ن(٣) = \frac{٣ + ١}{(٣)^٢ - ٤} = \frac{٤}{٥}$ ، $ن(٠) = \frac{٠ + ١}{(٠)^٢ - ٤} = \frac{-١}{٤}$

∴ ن (٢) غير معرفة لأن: ٢ ∉ مجال ن

س؟ سؤال ١

١ أوجد مجال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية:

(أ) $ن_١(س) = \frac{س^٣ - ٣ س}{٢ (س^٢ - ٤)}$ (ب) $ن_٢(س) = \frac{س^٢ - ٣ س - ٢}{س^٢ - ٢ س}$

٢ إذا كان مجال الدالة د : $د(س) = \frac{س + ٧}{س^٢ - أ}$ هو ح - {٦ ، -٦} فأوجد: قيمة أ

مثال ٤

إذا كان مجال الدالة ن حيث $ن(س) = \frac{س + ١}{س^٢ - أ س + ٤}$ هو ح - {٢} فأوجد قيمة أ

الحل

∵ س = ٢ تجعل المقام صفرًا

∴ $(٢)^٢ - أ(٢) + ٤ = ٠$

∴ $٤ - ٢أ + ٤ = ٠$

∴ $٨ = ٢أ \Leftarrow أ = ٤$

ثانيًا مجموعة أصفار الدالة الكسرية الجبرية

إذا كانت ن دالة كسر جبرى حيث $ن(س) = \frac{د(س)}{ر(س)}$ فإن مجموعة أصفار ن هى قيم المتغير س التى تجعل د(س) = صفر بشرط ر(س) ≠ صفر

أى أن: مجموعة أصفار دالة الكسر الجبرى = **مجموعة أصفار البسط - مجموعة أصفار المقام.**

مثال ٥

أوجد ص(ن) لكل مما يأتى:

١ $ن(س) = \frac{س^٢ + ٢س}{س^٢ - ٤}$

٢ $ن(س) = \frac{٤س + ٨}{س^٢ + س - ٢}$

الحل

١ $ن(س) = \frac{س^٢ + ٢س}{س^٢ - ٤}$

$ن(س) = \frac{س(س + ٢)}{(س - ٢)(س + ٢)}$

∴ مجموعة أصفار البسط = {٠، -٢}

∴ مجموعة أصفار المقام = {٢، -٢}

∴ ص(ن) = {٠، -٢} - {٢، -٢} = {٠}

٢ $ن(س) = \frac{٤س + ٨}{س^٢ + س - ٢}$

$ن(س) = \frac{٤(س + ٢)}{(س - ١)(س + ٢)}$

∴ مجموعة أصفار البسط = {-٢}

∴ مجموعة أصفار المقام = {١، -٢}

∴ ص(ن) = {-٢} - {١، -٢} = ∅

س؟ سؤال ٢

١ إذا كان مجال الدالة د حيث $د(س) = \frac{س}{س^٢ - ٥س + م}$ هو ح - {٢، حـ} فأوجد: قيمة كل من الثابتين م، حـ

٢ **أوجد ص(ن) لكل مما يأتى:**

(أ) $ن(س) = \frac{٣س - ٦}{س^٢ - ٣س - ١٠}$

(ب) $ن(س) = \frac{س^٢ - س}{س^٢ - ١}$

ثالثًا المجال المشترك لكسرين جبريين أو أكثر

- المجال المشترك لكسرين جبريين أو أكثر هو مجموعة الأعداد الحقيقية التى تكون فيها هذه الكسور مُعرفة معًا (فى آن واحد).
- **إذا كان $ن_1$ (س) ، $ن_2$ (س) كسرين جبريين وكان:**

مجال $ن_1$ = ع − $س_1$ حيث ($س_1$ هى مجموعة أصفار مقام $ن_1$ (س))

مجال $ن_2$ = ع − $س_2$ حيث ($س_2$ هى مجموعة أصفار مقام $ن_2$ (س))

(المجال المشترك للكسرين الجبريين) = ع − مجموعة أصفار مقامى الكسرين الجبريين.

= ع − ($س_1$ ∪ $س_2$)

وبصفة عامة: المجال المشترك لعدة كسور جبرية = ع − مجموعة أصفار مقامات هذه الكسور.

مثال ٦

أوجد المجال المشترك للكسرين الجبريين التاليين:

$ن_1$ (س) = $\frac{٢}{س - ٢}$ ، $ن_2$ (س) = $\frac{٣ س}{س + ١}$

الحل

مجموعة أصفار مقام $ن_1$ (س) هى {٢} ∴ مجال $ن_1$ = ع − {٢}

مجموعة أصفار مقام $ن_2$ (س) هى {−١} ∴ مجال $ن_2$ = ع − {−١}

∴ المجال المشترك للكسرين الجبريين $ن_1$ ، $ن_2$ = ع − {٢ ، −١}

مثال ٧

أوجد المجال المشترك للكسور الجبرية التالية:

$ن_1$ (س) = $\frac{س^٢}{س - ٣}$ ، $ن_2$ (س) = $\frac{٧}{س + ٣}$ ، $ن_3$ (س) = $\frac{-٢ س}{س^٣ + ٢٧}$

الحل

∵ $ن_1$ (س) = $\frac{س^٢}{س - ٣}$ ∴ مجال $ن_1$ = ع − {٣}

∵ $ن_2$ (س) = $\frac{٧}{س + ٣}$ ∴ مجال $ن_2$ = ع − {−٣}

∵ $ن_3$ (س) = $\frac{- ٢ س}{(س + ٣) (س^٢ - ٣س + ٩)}$ ∴ مجال $ن_3$ = ع − {−٣}

∴ المجال المشترك للدوال الكسرية الجبرية = ع − {٣ ، −٣}

لاحظ أن

القوس الأكبر الناتج من تحليل مجموع (أو الفرق بين) مكعبين لا يُحلل وليس له جذور حقيقية.

أى أن:

$س^٢ - ٣س + ٩ \neq ٠$ لكل س ∈ ع

مثـال ٨

أوجـد المجـال المشـترك للكسور الجبـرية التاليـة:

$ن_١(س) = \frac{١٢}{س^٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س - ٢}{س + ٤}$ ، $ن_٣(س) = \frac{س + ٦}{س^٢ + ١}$

الحـل

مجال $ن_١ = ح - \{٠\}$ ، مجال $ن_٢ = ح - \{-٤\}$ ، مجال $ن_٣ = ح$

∴ المجال المشترك للكسور الجبرية $ن_١$ ، $ن_٢$ ، $ن_٣ = ح - \{٠ ، -٤\}$

مثـال ٩

أوجـد المجـال المشـترك للكسـور الجـبرية الآتيـة:

$ن_١(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ - ٥س + ٦}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٧}{س^٢ - ٩}$ ، $ن_٣(س) = \frac{س^٢ - ٣س - ٤}{س^٢ + س - ٢}$

الحـل

∵ $ن_١(س) = \frac{س^٢ - ٤}{(س - ٢)(س - ٣)}$ ∴ مجال $ن_١ = ح - \{٢ ، ٣\}$

∵ $ن_٢(س) = \frac{٧}{(س - ٣)(س + ٣)}$ ∴ مجال $ن_٢ = ح - \{٣ ، -٣\}$

∵ $ن_٣(س) = \frac{س^٢ - ٣س - ٤}{(س + ٢)(س - ١)}$ ∴ مجال $ن_٣ = ح - \{-٢ ، ١\}$

∴ المجال المشترك للكسور الجبرية $ن_١$ ، $ن_٢$ ، $ن_٣ = ح - \{٢ ، ٣ ، -٣ ، -٢ ، ١\}$

س؟ سؤال ٣

أوجـد المجـال المشـترك للكسـور الجبريـة التاليـة:

١ $ن_١(س) = \frac{س - ٨}{س^٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س - ٢}{س^٢ - ١٦}$

٢ $ن_١(س) = \frac{١٢}{س^٢ - ٥س - ٦}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س - ٢}{س}$ ، $ن_٣(س) = \frac{س + ٦}{٢س^٢ + ١}$

٣ $ن_١(س) = \frac{س + ٣}{٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٣}{س^٢ - ٩}$ ، $ن_٣(س) = \frac{٣س}{س^٢ - ٣س}$



أسئلة تفاعلية

الدالة الكسرية الجبرية

تدرب — الدرس ٢

▲ تذكر ▲ فهم ▲ تطبيق ▲ تحليل

◀ أسئلة الكتاب المدرسى ◀ أسئلة موقع الـوزارة

تدريبات الأضـــواء

أولاً مجال الدالة الكسرية الجبرية

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ مجال الدالة ن حيث ن (س) = $\frac{س + ٢}{س - ٣}$ هو .... (أسوان ٢٠٢١)

(أ) ح - {٣} (ب) ح - {-٢ ، ٣} (جـ) ح - {-٢} (د) ح

٢ إذا كان مجال الكسر الجبرى ن(س) هو ح - {٢ ، ٣ ، ٤} فإن ن (٣) .... (الشرقية ٢٠٢١)

(أ) = ٣ (ب) = ٢ (جـ) = ٤ (د) غير معرف

٣ مجال الدالة ن حيث ن (س) = $\frac{٣}{س (س + ١)}$ هو ....

(أ) ح - {٠، ١} (ب) ح - {١} (جـ) ح - {٠} (د) ح - {٠ ، -١}

٤ مجال الكسر الجبرى $\frac{س - ٥}{٣}$ يساوى مجال الكسر الجبرى ....

(أ) $\frac{س}{س^٢ + ١}$ (ب) $\frac{س}{س - ٣}$ (جـ) $\frac{٣}{س - ٥}$ (د) $\frac{س - ٥}{س - ٣}$

٥ مجال الدالة ن حيث ن (س) = $\frac{س}{س^٢ - ١}$ هو .... (الجيزة ٢٠١٩)

(أ) {-١} (ب) ح - {١} (جـ) {١، -١} (د) ح - {١ ، -١}

٦ الدالة ن حيث ن (س) = $\frac{س - ٦}{س - ٣}$ غير معرفة عندما ....

(أ) س ∈ ح - {٣} (ب) س = ٦ (جـ) س = - ٣ (د) س = ٣

٧ مجال الدالة د حيث د (س) = ٣ $س^{-٢}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح - {٠} (جـ) ح - {٢} (د) ح - {٣}

٨ إذا كان مجال ن حيث ن(س) = $\frac{س - ٢}{س^٢ + أ}$ هو ح فإن أ .... صفر (الدقهلية ٢٠٢١)

(أ) = (ب) < (جـ) ≥ (د) >

٩ إذا كان مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{س + ٣}{س + ك}$ هو ح - {٥} فإن قيمة ك = ... (الأزهر ٢٠٢٤)

(أ) -٣ (ب) -٥ (جـ) -٣ (د) ٥

١٠ إذا كان مجال الدالة ن : ن(س) = $\frac{س - ٢}{٦ س^٢ + أ س + ب}$ هو ح - $\{\frac{-٣}{٢} ، \frac{-٢}{٣}\}$ فإن قيمة أ - ب = ...

(أ) ٦ (ب) ١٣ (جـ) ٧ (د) ١٩

٢ أكمل ما يلى:

١ مجال الدالة ن حيث ن (س) = $\frac{٥س + ١}{٣س - ١}$ هو ....

٢ مجال الدالة ن حيث ن (س) = $\frac{س - ٢}{س + ١}$ هو ....

٣ إذا كانت ن (س) = $\frac{٧}{س + أ}$ وكان مجال الدالة ن هو ح - { -٢ } فإن: أ = ...

٤ إذا كان مجال الدالة ن حيث ن (س) = $\frac{٣س}{س^٢ - م}$ هو ح - { ٣، -٣ } فإن: م = ...

٥ إذا كان مجال الدالة ن حيث ن (س) = $\frac{س + ١}{س^٢ - ٥س + أ}$ هو ح - { ١، ٤ } فإن: أ = ...

٦ إذا كانت ن (س) = $\frac{٣س - ٥}{٢س}$ فإن: ن (صفر) ....

---

٣ إذا كان مجال الدالة ن حيث ن (س) = $\frac{س}{س^٢ - ٥س + م}$ هو ح - { ٢، ك }

فأوجد قيمة كل من الثابتين م ، ك (القليوبية ٢٠٢١)

---

٤ إذا كان مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{س + ب}{س + أ}$ هو ح - { -٢ } وكان د (٠) = ٣

فأوجد قيمة كل من أ ، ب (الفيوم ٢٠١٦)

---

٥ إذا كان مجال الدالة ن : ن (س) = $\frac{ب}{س + أ}$ هو ح - { -٥ }

وكان ن (٣) = ١، فأوجد قيمة كل من: أ ، ب

ثانيًا مجموعة أصفار الدالة الكسرية الجبرية

٦ اختر الإجابة الصحيحة:

١ مجموعة قيم س التى تجعل د (س) = صفر تسمى .... (دمياط ٢٠١٥)

(أ) مجموعة أصفار المقام (ب) مجموعة أصفار الدالة د

(جـ) المجال (د) المدى

٢ مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = $\frac{-٣}{س - ٢}$ هى ....

(أ) ح - {٢} (ب) ح - {٣} (جـ) {٢} (د) ∅ (الغربية ٢٠١٩)

٣ مجموعة أصفار الدالة ن حيث ن (س) = $\frac{س^٢ - س - ٢}{س^٢ - ٤}$ هى .... (المنوفية ٢٠١٨)

(أ) {٢، -٢} (ب) {-٢} (جـ) {-١} (د) {٢، -١}

٤ مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = $\frac{٥}{س^٢ + ٢٥}$ هى ....

(أ) {٥، -٥}　(ب) {٥}　(جـ) {-٥}　(د) ∅

٥ مجموعة أصفار الدالة ن حيث ن (س) = $\frac{س^٢ + ٢}{س}$ هى ....

(أ) {-٢}　(ب) ح - {-٢}　(جـ) ح - {٠}　(د) ∅

٦ مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = $\frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$ هى .... (الأقصر ٢٠٢٤)

(أ) {٣، -٣}　(ب) ح -{٣، -٣}　(جـ) ح -{٣}　(د) {-٣}

٧ مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = $\frac{٢س - ٣}{س^٢ - ٩}$ هى ....

(أ) {$\frac{-٣}{٢}$، ٣، -٣}　(ب) {$\frac{٣}{٢}$}　(جـ) {$\frac{٢}{٣}$}　(د) {٣، -٣}

٨ إذا كان س = ٣ أحد أصفار الدالة د : د (س) = $\frac{س^٢ - ٢ س - ك}{س^٢ - ٢٥}$ فإن ك = ... (أسيوط ٢٠٢٤)

(أ) ٣　(ب) ٦　(جـ) -٣　(د) -٦

---

٧ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة ن حيث ن (س) = $\frac{س^٢ - أ س + ٩}{ب س + ٤}$ هى {٣} ومجالها هو ح - {٢}

فأوجد: قيمة كل من الثابتين أ ، ب (الفيوم ٢٠٢٢)

ثالثًا المجال المشترك لكسرين جبريين أو أكثر

٨ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان $ن_١$ (س)، $ن_٢$ (س) كسرين جبريين وكان مجال $ن_١$ هو ح - {-١}،
ومجال $ن_٢$ هو ح - {٥}، فإن المجال المشترك للكسرين $ن_١$ ، $ن_٢$ هو ....

(أ) ح - {-١}　(ب) ح　(جـ) ح - {-١، ٥}　(د) ح - {٥}

٢ المجال المشترك للدالتين $د_١$ (س) = ٣ - س ، $د_٢$ (س) = $\frac{٢}{س - ٤}$ هو ....

(أ) ح　(ب) ح -{٣، ٤}　(جـ) ح -{٣، ٢}　(د) ح - {٤}

٣ المجال المشترك للدالتين $ن_١$ ، $ن_٢$ حيث $ن_١$(س) = $\frac{-١}{س}$، $ن_٢$(س) = $\frac{١}{س - ٢}$ هو ....

(أ) ح　(ب) ح -{٠}　(جـ) ح -{٢}　(د) ح - {٠، ٢}

٤ المجال المشترك للكسرين الجبريين $\frac{٢}{س^٢ - ١}$ ، $\frac{٥ س}{س^٢ - س}$ هو .... (الفيوم ٢٠١٨)

(أ) ح - {١}　(ب) ح -{٠، ١}　(جـ) ح -{٠، ١، -١}　(د) ح - {١، -١}

٥ إذا كان $ن_١(س) = \frac{-٥}{س + ٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س}{س + ك}$ وكان المجال المشترك للدالتين $ن_١$ ، $ن_٢$ هو ح − {−٢ ، ٧} فإن ك = ...

(أ) −٢ (ب) ٧ (جـ) −٧ (د) ٢

٦ إذا كان المجال المشترك للدالتين $ن_١$ ، $ن_٢$ هو ح − {٣ ، ٤} ، وكان $ن_١(س) = \frac{٥س}{س^٢ + ٦٤}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٧س}{س^٢ - ٧س + أ}$ ، فإن قيمة أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٧ (د) ١٢

٩ أوجد المجال المشترك للكسور الجبرية الآتية:

١ $ن_١(س) = \frac{١}{س - ١}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٣}{س^٢ - ٤}$

٢ $ن_١(س) = \frac{-٥}{س^٢ - ١}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٢}{س}$ (القاهرة ٢٠١٦)

٣ $ن_١(س) = \frac{س - ٣}{٥س}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٧}{س - ١}$

٤ $ن_١(س) = \frac{٢}{س^٢ - ٩}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٤س}{س^٢ - ٣س - ١٨}$

٥ $ن_١(س) = \frac{س^٢ + ٢س + ١}{س^٢ - ١}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ + ٥س + ٦}{س^٢ - ٢س - ٨}$

٦ $ن_١(س) = \frac{٣س^٢ - ١٠س^٢ + ١٢س}{س^٢ - ٨س + ١٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٢س^٢ - ٢٤س + ٧٠}{٢س^٣ - ٢٠س^٢ + ٥٠س}$

٧ $ن_١(س) = \frac{١٥س^٢ - ٢٤س}{٢١س^٣ + ٣٣س^٢ + ١٢س}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٧س^٢ + ٢٨س}{٢س^٢ + ٦س - ٨}$ ،

$ن_٣(س) = \frac{٢س^٢ - ٤س - ٧٠}{س^٣ - س^٢ - ٤٩س + ٤٩}$



١٠ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة د حيث $د(س) = \frac{أس^٢ - ٦س + ٨}{بس - ٤}$ هي {٤} ،

ومجالها هو ح − {٢} فأوجد: قيمة كل من أ ، ب (الشرقية ٢٠١٧)

١١ إذا كانت $د(س) = ٢س^٣ - ٨س$ فأثبت أن: د(٠) = د(٢) = د(−٢)

ثم استنتج أصفار الدالة (د) وأوجد مجال $\frac{١}{د(س)}$

تدريبات الكتاب المدرسى

1 ١ عيِّن مجال كلٍّ من الدوال الكسرية الجبرية الآتية، ثم أوجد ن(٠)، ن(٢)، ن(−٢) إن أمكن:

(أ) $ن(س) = \frac{س + ٣}{٤}$ (ب) $ن(س) = \frac{س - ٢}{٢س}$ (جـ) $ن(س) = \frac{١}{س + ٢}$

(د) $ن(س) = \frac{س^٢ + ٩}{س^٢ - ١٦}$ (هـ) $ن(س) = \frac{س^٢ + ١}{س^٢ - س}$ (و) $ن(س) = \frac{س^٢ - ١}{س^٢ + ١}$

٢ إذا كان مجال الدالة ن: $ن(س) = \frac{س - ١}{س^٢ - أس + ٩}$ هو ح − {٣} **فأوجد قيمة أ** (القليوبية ٢٠٢٤)

---

2 أوجد المجال المشترك لكل من الكسور الجبرية الآتية:

١ $ن_١(س) = \frac{١}{س}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٢}{س + ١}$

٢ $ن_١(س) = \frac{٣}{س^٢ - س}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٢س - ٣}{س^٢ - ١}$

٣ $ن_١(س) = \frac{٣}{س - ٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٥}{س + ٢}$ ، $ن_٣(س) = \frac{س}{س^٣ - ٤س}$

٤ $ن_١(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ - ٥س + ٦}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٣س}{س^٢ - س}$ ، $ن_٣(س) = \frac{س^٢ - ٣س - ٤}{س^٢ + س - ٢}$

---

3 أوجد المجال المشترك لكل من الكسور الجبرية الآتية:

١ $\frac{س}{٣}$ ، $\frac{٣}{س}$

٢ $\frac{١}{٢س}$ ، $\frac{س - ١}{٥}$

٣ $\frac{س + ٢}{س + ٥}$ ، $\frac{س - ٤}{س - ٧}$

٤ $\frac{٤}{س - ٤}$ ، $\frac{س - ٥}{٥س}$

٥ $\frac{س}{س^٢ - ٤}$ ، $\frac{٣}{٢ - س}$

٦ $\frac{٥}{س - ٢}$ ، $\frac{س + ١}{س^٢ - ٢س}$

٧ $\frac{١}{س^٣ - ١}$ ، $\frac{س}{١ - س^٢}$

٨ $\frac{س^٢ + ٤}{س^٢ - ٤}$ ، $\frac{٧}{س^٢ + ٤س + ٤}$ (الإسكندرية ٢٠٢١)

٩ $\frac{س - ٢}{س + ٤}$ ، $\frac{٧}{س - ٣}$ ، $\frac{س}{س^٢ + ٤}$

١٠ $\frac{س + ٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{س^٢ - ٩}$ ، $\frac{٣س}{س^٢ - ٣س}$

١١ $\frac{س^٢}{س - ٣}$ ، $\frac{٧}{س + ٣}$ ، $\frac{-٢س}{س^٣ + ٢٧}$

١٢ $\frac{٤س - ٣}{س^٢ - س}$ ، $\frac{س - ١}{س^٢ + ١٦}$ ، $\frac{٥س}{س^٢ - ٢س - ٣}$

١٣ $\frac{س^٢ - ٤}{س^٢ - ٥س + ٦}$ ، $\frac{٧}{س^٢ - ٩}$ ، $\frac{س^٢ - ٣س - ٤}{س^٢ + س - ٢}$

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ مجال الدالة ن : ن (س) = $\frac{س + ١}{س - ٤}$ هو .... (القاهرة ٢٠٢٢)

(أ) ع (ب) ع - {١} (جـ) ع - {٤} (د) ع - {-١ ، ٤}

٢ مجال الدالة ن :ن (س) = $\frac{س}{س^٢ - ١}$ هو .... (الجيزة ٢٠١٩)

(أ) {-١} (ب) ع - {١} (جـ) {١ ، -١} (د) ع - {١ ، -١}

٣ مجموعة أصفار الدالة د : د(س) = $\frac{(س+١)(س-٣)}{س^٢ - ٤}$ هى .... (المنيا ٢٠١٨)

(أ) {٣ ، -٣} (ب) {-٣ ، -١} (جـ) {٣ ، -١} (د) {١ ، -١}

٤ إذا كان $ن_١$ ، $ن_٢$ كسرين جبريين وكان مجال $ن_١$ = ع - $س_١$ (حيث $س_١$ مجموعة أصفار مقام $ن_١$)

، مجال $ن_٢$ = ع - $س_٢$ (حيث $س_٢$ مجموعة أصفار مقام $ن_٢$). (بورسعيد ٢٠٢١)

فإن المجال المشترك للكسرين $ن_١$ ، $ن_٢$ هو ع - ....

(أ) $س_١$ - $س_٢$ (ب) $س_١ \cup س_٢$ (جـ) $س_١ \cap س_٢$ (د) $\emptyset$

٥ المجال المشترك للكسرين $\frac{٧}{س - ٥}$ ، $\frac{٨}{س - ٣}$ هو .... (شمال سيناء ٢٠٢١)

(أ) ع (ب) ع - {٥ ، ٣} (جـ) ع - {٥} (د) ع - {٣}

---

٢ أجب عما يأتى:

١ **أوجد** مجال الدالة د : د (س) = $\frac{س^٢ - ١}{س^٢ + ١}$ **ثم أوجد:** د (٠) ، د (٢) إن أمكن. (البحر الأحمر ٢٠١٨)

٢ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة ن حيث ن (س) = $\frac{٦ - أ س}{س^٢ - ٦ س + ٩}$ هى {-٣} **فأوجد قيمة** أ

(أسيوط ٢٠٢٢)

٣ **أوجد** المجال المشترك للكسرين $ن_١$ (س) = $\frac{س - ٤}{س^٢ - ٥ س + ٦}$ ، $ن_٢$ (س) = $\frac{٢ س}{س^٣ - ٩ س}$ (الأقصر ٢٠١٩)



ذاكر الدرس ٣

تساوى كسرين جبريين

فكر وناقش

- إذا كان $ن$ كسرًا جبريًّا حيث $ن(س) = \frac{س^٢ + س}{س^٢ - ١}$ فإن:

$ن(س) = \frac{س(س + ١)}{(س - ١)(س + ١)}$ ، مجال $ن = ح - \{١ ، -١\}$

بعد حذف العوامل المشتركة بين البسط والمقام فإن: $ن(س) = \frac{س}{س - ١}$

- هل يتغير مجال الكسر الجبرى $ن$ بعد وضعه فى أبسط صورة؟

أولًا اختزال الكسر الجبرى

تعريف

اختزال الكسر الجبرى: هو وضع الكسر الجبرى فى أبسط صورة.

يقال إن الكسر الجبرى فى أبسط صورة إذا كان العامل المشترك الأعلى بين بسطه ومقامه هو الواحد الصحيح؛ أى أنه لا توجد عوامل مشتركة بين بسطه ومقامه «غير الواحد الصحيح».

خطوات اختزال الكسر الجبرى:

لاختزال الكسر الجبرى $ن(س) = \frac{س^٢ + ٣س}{س^٢ - ٩}$

خطوة (١): نحلل كلًّا من البسط والمقام تحليلًا كاملًا.

أى أن: $ن(س) = \frac{س(س + ٣)}{(س - ٣)(س + ٣)}$

خطوة (٢): نعين مجال الكسر الجبرى قبل حذف العوامل المشتركة بين البسط والمقام.

فيكون مجال $ن = ح - \{٣ ، -٣\}$

خطوة (٣): نحذف العوامل المشتركة من البسط والمقام للحصول على أبسط صورة.

$ن(س) = \frac{س(س + ٣)}{(س - ٣)(س + ٣)} = \frac{س}{س - ٣}$ فى أبسط صورة

أى أن: $ن(س) = \frac{س}{س - ٣}$ ومجال $ن = ح - \{٣ ، -٣\}$

مثـال ١

اختـزل الكسـرين الجبريين التاليين، واذكـر مجـال كل منهـما:

١ $ن_{١}(س) = \frac{٢س^{٢} - ٦س}{٦س^{٢}}$

٢ $ن_{٢}(س) = \frac{٤ - س^{٢}}{س^{٢} - س - ٢}$

الحـل

١ $ن_{١}(س) = \frac{٢س^{٢} - ٦س}{٦س^{٢}} = \frac{٢س(س-٣)}{٦س^{٢}}$ خطوة (١) [التحليل]

مجال $(ن_{١}) = ح - \{٠\}$ خطوة (٢) [إيجاد المجال] قبل الاختزال

$ن_{١}(س) = \frac{٢س(س-٣)}{٦س^{٢}} = \frac{س-٣}{٣س}$ خطوة (٣) [حذف العوامل المشتركة]

٢ $ن_{٢}(س) = \frac{٤ - س^{٢}}{س^{٢} - س - ٢}$

$= \frac{-(س^{٢}-٤)}{(س-٢)(س+١)}$

$= \frac{-(س-٢)(س+٢)}{(س-٢)(س+١)}$ خطوة (١) [التحليل]

مجال $(ن_{٢}) = ح - \{٢ ، -١\}$ خطوة (٢) [إيجاد المجال] قبل الاختزال

$ن_{٢}(س) = \frac{-(س-٢)(س+٢)}{(س-٢)(س+١)} = -\frac{(س+٢)}{س+١}$ خطوة (٣) [حذف العوامل المشتركة]

سؤال ١

١ **اختـزل الكسور الجـبرية التالية، واذكـر مجـال كل منها:**

(أ) $ن_{١}(س) = \frac{١٢ - ٥س}{١٠س^{٢} - ٢٤س}$

(ب) $ن_{٢}(س) = \frac{س^{٣} + ٩س^{٢} + ١٤س}{س^{٣} + ٨}$

(جـ) $ن_{٣}(س) = \frac{س^{٣} + س^{٢} - ٦س}{س^{٤} - ١٣س^{٢} + ٣٦}$

٢ **اكتشـف الخطـأ:**

(أ) $\frac{٣ + س}{٥ + ٢س} = \frac{٣ + ١}{٥ + ٢} = \frac{٤}{٧}$

(ب) $\frac{(س+٤)}{٢(س+٤)} = \frac{٠}{٢} = $ صفر

ثانيًا تساوى كسرين جبريين

يقال لكسرين جبريين $ن_1$ ، $ن_2$ **إنهما متساويان (أى أن:** $ن_1 = ن_2$**) إذا تحقق الشرطان الآتيان معًا:**

١ مجال $ن_1$ = مجال $ن_2$

٢ $ن_1(س) = ن_2(س)$ لكل $س \in$ **المجال المشترك.** أى أن: [قاعدة $ن_1$ = قاعدة $ن_2$]

مثال ٢

فى كل مما يأتى، بيِّن ما إذا كان $ن_1 = ن_2$ أم لا مع ذكر السبب:

١ $ن_1(س) = \frac{س^2 - ٥س}{س^2 - ٧س + ١٠}$ ، $ن_2(س) = \frac{٣س - ١٥}{٣س^2 - ٢١س + ٣٠}$

٢ $ن_1(س) = \frac{س^2 + ٩س + ١٤}{س + ٧}$ ، $ن_2(س) = \frac{س(س + ٣) + ٢(س + ٣)}{(س + ٣)}$

٣ $ن_1(س) = \frac{س^2}{س^3 - س^2}$ ، $ن_2(س) = \frac{س^3 + س^2 + س}{س^4 - س}$ (موقع الوزارة ٢٠٢٤)

الحل

١ $ن_1(س) = \frac{س^2 - ٥س}{س^2 - ٧س + ١٠} = \frac{س(س - ٥)}{(س - ٢)(س - ٥)}$

مجال $ن_1 = ح - \{٢ ، ٥\}$

$ن_1(س) = \frac{س}{س - ٢}$

، $ن_2(س) = \frac{٣س - ١٥}{٣س^2 - ٢١س + ٣٠} = \frac{٣(س - ٥)}{٣(س - ٢)(س - ٥)}$

مجال $ن_2 = ح - \{٢ ، ٥\}$

$ن_2(س) = \frac{١}{س - ٢}$

$\because$ مجال $ن_1$ = مجال $ن_2$ ، $ن_1(س) \neq ن_2(س)$

$\therefore ن_1 \neq ن_2$

٢ $ن_١(س) = \frac{س^٢ + ٩س + ١٤}{س + ٧} = \frac{(س+٢)(س+٧)}{(س + ٧)}$

مجال $ن_١ = ع - \{-٧\}$ ، $ن_١(س) = س + ٢$

$ن_٢(س) = \frac{س(س + ٣) + ٢(س + ٣)}{(س + ٣)} = \frac{(س + ٣)(س + ٢)}{(س + ٣)}$

مجال $ن_٢ = ع - \{-٣\}$ ، $ن_٢(س) = س + ٢$

∵ مجال $ن_١$ ≠ مجال $ن_٢$ ، $ن_١(س) = ن_٢(س)$ ∴ $ن_١ ≠ ن_٢$

ونظرًا لأن الكسرين الجبريين بعد الاختصار لهما نفس القاعدة: $ن_١(س) = ن_٢(س) = س + ٢$
يقال إنهما (متساويان فى المجال المشترك) وهو: ع - {-٣ ، -٧}.

---

٣ $ن_١(س) = \frac{س^٢}{س^٣ - س^٢} = \frac{س^٢}{س^٢(س - ١)}$

مجال $ن_١ = ع - \{٠ ، ١\}$ ، $ن_١(س) = \frac{١}{س - ١}$

$ن_٢(س) = \frac{س^٣ + س^٢ + س}{س^٤ - س} = \frac{س(س^٢ + س + ١)}{س(س^٣ - ١)} = \frac{س(س^٢ + س + ١)}{س(س - ١)(س^٢ + س + ١)}$

مجال $ن_٢ = ع - \{٠ ، ١\}$ ، $ن_٢(س) = \frac{١}{س - ١}$

∵ مجال $ن_١$ = مجال $ن_٢$ ، $ن_١(س) = ن_٢(س)$ ∴ $ن_١ = ن_٢$

نقاط هامة

- إذا كان $ن_١$ ، $ن_٢$ كسرين جبريين، مجالها $م_١$ ، $م_٢$ وتم اختزال $ن_١$ ، $ن_٢$ إلى نفس الكسر، فيقال إن $ن_١$ ، $ن_٢$ يأخذان نفس القيم فى المجال المشترك $م_١ \cap م_٢$ **(كما بالمثال السابق رقم (٢))**

س؟ سؤال ٢

فى كل ما يلى ضع $ن_١(س)$ ، $ن_٢(س)$ فى أبسط صورة محددًا مجال كلٍّ منهما، مبينًا هل هما متساويان أم لا.

١ $ن_١(س) = \frac{٢س - ٤}{٤س^٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٧س - ١٤}{١٤س^٢}$

٢ $ن_١(س) = \frac{س + ٣}{س^٢ - ٩}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٢}{٢س - ٦}$

٣ $ن_١(س) = \frac{س^٢ + ٣س + ٢}{س^٢ - ٤}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ - ١}{س^٢ - ٣س + ٢}$

مثـال ٣

إذا كان $ن_١(س) = \frac{س^٢ + س - ٦}{س^٢ - ٣س + ٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ - ٢س - ١٥}{س^٢ - ٦س + ٥}$ **فأثبت أن:**

$ن_١ = ن_٢$ لجميع قيم س التى تنتمى إلى المجال المشترك، **وأوجد هذا المجال.**

الحـل

$\because ن_١(س) = \frac{س^٢ + س - ٦}{س^٢ - ٣س + ٢} = \frac{(س - ٢)(س + ٣)}{(س - ١)(س - ٢)}$

$\therefore ن_١(س) = \frac{س + ٣}{س - ١}$ ، مجال $ن_١ = ع - \{١ ، ٢\}$

، $\because ن_٢(س) = \frac{س^٢ - ٢س - ١٥}{س^٢ - ٦س + ٥} = \frac{(س + ٣)(س - ٥)}{(س - ١)(س - ٥)}$

$\therefore ن_٢(س) = \frac{س + ٣}{س - ١}$ ، مجال $ن_٢ = ع - \{١ ، ٥\}$

$\therefore ن_١ = ن_٢$ لجميع قيم س التى تنتمى للمجال المشترك للدالتين $ن_١$ ، $ن_٢$ وهو: $ع - \{١ ، ٢ ، ٥\}$

مثـال ٤

إذا كان $ن_١(س) = \frac{م س - م}{س^٢ - ٣س + ٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٤س + ٨}{س^٢ - ٤}$

فأوجد المجال المشترك الذى يتساوى فيه الكسران الجبريان، ثم أوجد قيمة م (الأقصر ٢٠٢٤)

الحـل

$ن_١(س) = \frac{م س - م}{س^٢ - ٣س + ٢} = \frac{م(س - ١)}{(س - ١)(س - ٢)}$

$ن_٢(س) = \frac{٤س + ٨}{س^٢ - ٤}$

$ن_٢(س) = \frac{٤(س + ٢)}{(س + ٢)(س - ٢)}$

المجال المشترك الذى يتساوى فيه الكسران هو : $ع - \{١ ، ٢ ، -٢\}$

$ن_١(س) = \frac{م}{س - ٢}$

$ن_٢(س) = \frac{٤}{س - ٢}$

$\because ن_١(س) = ن_٢(س) \quad \therefore م = ٤$

سؤال ٣

فى كل مما يأتى أثبت أن: $ن_١ = ن_٢$ لجميع قيم س التى تنتمى للمجال المشترك للدالتين، **وأوجد هذا المجال.**

١ إذا كان: $ن_١(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ + س - ٦}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٣ - س^٢ - ٦س}{س^٣ - ٩س}$ (الفيوم ٢٠١٩)

٢ إذا كان: $ن_١(س) = \frac{س^٢ + ٥س + ٢٥}{س^٣ - ١٢٥}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س + ٥}{س^٢ - ٢٥}$ (سوهاج ٢٠٢٣)



تدريبات الأضـــواء

أولًا اختزال الكسر الجبرى

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كانت س ≠ ٤ ؛ فإن أبسط صورة للكسر $\frac{٤ - س}{س - ٤}$ هى .... (دمياط ٢٠١٨)

(أ) ٤ (ب) صفر (جـ) ١ (د) −١

٢ إذا كانت س ∈ ح − {٣ ، ٢} ؛ فإن أبسط صورة للكسر الجبرى: $\frac{س - ٢}{س^٢ - ٥س + ٦}$ هى ....

(أ) $\frac{١}{س - ٢}$ (ب) $\frac{١}{س - ٣}$ (جـ) $\frac{١}{س - ٥}$ (د) $\frac{١}{س + ٣}$

٣ إذا كانت د : د (س) = $\frac{٩س^٢ + ٣س}{٣س}$ حيث س ≠ صفر؛ فإن د (س) فى أبسط صورة تساوى ....

(أ) ٩س^٢ + ١ (ب) ٩س^٢ (جـ) ٦س (د) ٣س + ١

٤ إذا كانت س ∈ ح − {١} ؛ فإن أبسط صورة للكسر الجبرى: $\frac{س^٢ - ١}{س - ١}$ هى ....

(أ) $\frac{١}{س + ١}$ (ب) س − ١ (جـ) س + ١ (د) $\frac{١}{س - ١}$

٥ إذا كانت أبسط صورة للكسر الجبرى ن (س) = $\frac{٣س (س - ٥)}{س + أ}$ ، س ≠ ٥

هى ن (س) = ٣س فإن: أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) −٥ (د) −٣

٦ إذا كانت أبسط صورة للكسر الجبرى ن (س) = $\frac{س^٢ - ٦س + ٩}{س^٢ - أ}$ ،

حيث س ∈ ح − {٣ ، −٣} هى ن (س) = $\frac{س - ٣}{س + ٣}$ ؛ فإن: أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) −٩ (د) −٣

٧ إذا كانت أبسط صورة للدالة د حيث د(س) = $\frac{س^٢ - ٥س - أ}{س^٢ - ٧س + ٦}$ ،

حيث س ∈ ح − {١ ، ٦} هى د(س) = $\frac{س + ١}{س - ١}$ ؛ فإن: أ = ...

(أ) −٦ (ب) ١ (جـ) −١ (د) ٦

٨ إذا كان مجال الدالة ن حيث ن (س) = $\frac{س - ٣}{س + جـ}$ ، هو ح − {−٢} ؛ فإن: جـ = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ٣ (د) −٣

٢ اختصر كلًّا من الكسور الجبرية الآتية إلى أبسط صورة مبينًا مجالها:

١ $ن(س) = \frac{٢س - ٦}{٥س - ١٥}$

٢ $ن(س) = \frac{س}{س(س - ٢)}$

٣ $ن(س) = \frac{س^{٢} - ٤}{٢س - ٤}$

٤ $ن(س) = \frac{س^{٢} - س - ٢}{س^{٢} - ١}$

٥ $ن(س) = \frac{س^{٢} - ٩}{س^{٢} - ٣س - ١٨}$

٦ $ن(س) = \frac{س^{٢} - ٢س + ١}{س^{٣} - ١}$

٧ $ن(س) = \frac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} + ٣س + ٩}$

٨ $ن(س) = \frac{س^{٣} + ١}{س^{٢} + ٢س + ١}$

٩ $ن(س) = \frac{س^{٣} + س^{٢} - ٦س}{س^{٤} - ١٣س^{٢} + ٣٦}$

١٠ $ن(س) = \frac{(س - ١)(س^{٢} + ١)}{س^{٣} + س}$

ثانيًا تساوي كسرين جبريين

٣ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كانت $ن_{١}(س) = -١$ ، $ن_{٢}(س) = \frac{س - ١}{١ - س}$ ؛ فإن ....

(أ) مجال $ن_{١}$ = مجال $ن_{٢}$ (ب) $ن_{١} = ن_{٢}$ لكل $س \in ح - \{١\}$

(جـ) $ن_{١} = ن_{٢}$ لكل $س \in ح$ (د) $ن_{١} = ن_{٢}$ لكل $س \in ح - \{٠ ، ١\}$

٢ إذا كان $ن_{١}(س) = \frac{٣ + أ}{س - ٥}$ ، $ن_{٢}(س) = \frac{٦}{س - ٥}$ وكان $ن_{١}(س) = ن_{٢}(س)$؛

لكل $س \in ح - \{٥\}$ فإن: أ = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) −٣ (د) −٦

٣ المجال المشترك للكسرين $\frac{٣}{س - ٦}$ ، $\frac{٩}{٢س - ١٢}$ هو ....

(أ) $\varnothing$ (ب) $\{٦\}$ (جـ) $ح - \{٦\}$ (د) $ح - \{٦ ، ١٢\}$

٤ إذا كان: $ن_{١}(س) = \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢}$ ، $ن_{٢}(س) = س + ٢$ ؛ فإن $ن_{١} = ن_{٢}$ عندما

يكون لهما نفس المجال وهو ....

(أ) ح (ب) $ح - \{٢\}$ (جـ) $ح - \{-٢\}$ (د) $ح - \{١\}$

٥ إذا كان مجال $ن_{١}$ = مجال $ن_{٢}$ حيث $ن_{١}(س) = \frac{٥}{س - ٨}$ ، $ن_{٢}(س) = \frac{س - ٣}{س + ك}$ ؛ فإن: ك = ...

(أ) ٨ (ب) −٨ (جـ) −٣ (د) ٢٤

٦ إذا كانت $ن_١(س) = \frac{س}{س - ١}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س}{١ - س}$ ؛ فإن $ن_١ \ne ن_٢$ لأن ....

(أ) $ن_١(س) = ن_٢(س)$ (ب) مجال $ن_١$ = مجال $ن_٢$

(جـ) $ن_١(س) \ne ن_٢(س)$ (د) مجال $ن_١ \ne$ مجال $ن_٢$

---

٤ فى كل مما يأتى بين ما إذا كان $ن_١ = ن_٢$ أم لا، مع ذكر السبب:

١ $ن_١(س) = \frac{س}{س^٢ - ٢س}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س + ١}{س^٢ - س - ٢}$ (قنا ٢٠٢٢)

٢ $ن_١(س) = \frac{٥س}{٥س + ٢٥}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ + ٥س}{س^٢ + ١٠س + ٢٥}$ (بنى سويف ٢٠١٩)

٣ $ن_١(س) = \frac{س^٢ + ٣س + ٩}{س^٣ - ٢٧}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س + ١}{س^٢ - ٢س - ٣}$ (الجيزة ٢٠١٨)

٤ $ن_١(س) = \frac{س^٢ + ٥س + ٦}{س^٢ + س - ٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ - ٢س - ١٥}{س^٢ - ٦س + ٥}$ (المنوفية ٢٠١٩)

٥ $ن_١(س) = ١ - \frac{١}{س}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س - ١}{س}$ (الشرقية ٢٠١٩)

---

٥ إذا كان $ن_١(س) = \frac{س^٢ + س - ١٢}{س^٢ + ٥س + ٤}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ - ٢س - ٣}{س^٢ + ٢س + ١}$

فأوجد المجال المشترك الذى يجعل $ن_١ = ن_٢$ (الإسكندرية ٢٠١٩)

---

٦ فى كل مما يأتى أثبت أن $ن_١ = ن_٢$:

١ $ن_١(س) = \frac{٢س}{٢س + ٤}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ + ٢س}{س^٢ + ٤س + ٤}$ (الغربية ٢٠٢٢)

٢ $ن_١(س) = \frac{س + ٢}{س - ٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ - ٤س + ٤}$ (الشرقية ٢٠١٨)

٣ $ن_١(س) = \frac{س^٢ - ٣س + ٩}{س^٣ + ٢٧}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٢}{٢س + ٦}$ (الإسماعيلية ٢٠١٩)

٤ $ن_١(س) = \frac{س}{س^٢ + س}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٤ - س^٣ + س^٢}{س^٥ + س^٢}$ (جنوب سيناء ٢٠١٩)



٧ حل المعادلة: $\frac{س^٢ + ٥س + ٦}{س^٢ - ٢س - ٨} = \frac{س^٢ - ٤س - ٥}{س^٢ - ٨س + ١٥}$

---

٨ إذا كانت $ن_١(س) = \frac{س + ٣}{س^٢ - ٩}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٢}{٢س - ٦}$ فأثبت أن: $ن_١ = ن_٢$ لجميع قيم س التى تنتمى للمجال المشترك للدالتين، وأوجد هذا المجال. (بورسعيد ٢٠١٩)

تدريبات الكتاب المدرسى

١ أكمل ما يلى:

١ أبسط صورة للدالة ن حيث ن(س) = $\frac{٤س^٢ - ٢س}{٢س}$ ، س ≠ ٠ هى .... (قنا ٢٠١٧)

٢ المجال المشترك للدالتين $ن_١$ ، $ن_٢$ حيث إن : $ن_١(س) = \frac{س - ٢}{س^٢ - ٤}$ ، $ن_٢(س) = \frac{١}{س + ١}$ هو ....

٣ إذا كانت $ن_١(س) = \frac{١ + أ}{س - ٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٤}{س - ٢}$ ، وكان $ن_١(س) = ن_٢(س)$،

فإن أ = ...

٤ إذا كان أبسط صورة للكسر الجبرى $ن(س) = \frac{س^٢ - ٤س + ٤}{س^٢ - أ}$ هى $ن(س) = \frac{س - ٢}{س + ٢}$ ،

فإن أ = ...

٥ إذا كانت $ن_١(س) = \frac{-٧}{س + ٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س}{س - ك}$ وكان المجال المشترك للدالتين $ن_١$ ، $ن_٢$

هو ح − {−٢ ، ٧}، فإن ك = ...

---

٢ ١ اختصر كلًا من الكسور الجبرية الآتية إلى أبسط صورة، مبينًا مجالها:

(أ) $\frac{س^٢ - ٤}{س^٣ - ٨}$ (ب) $\frac{س + ١}{س^٢ + ٣س + ٢}$ (جـ) $\frac{س^٢ - ٤}{س^٢ - ٥س + ٦}$

(د) $\frac{س^٣ - ١}{(س - ١)(س + ٥)}$ (هـ) $\frac{س^٢ - ٦س + ٩}{٢س^٣ - ١٨س}$ (و) $\frac{س^٣ + ١}{س^٣ - س^٢ + س}$

(ز) $\frac{٢س^٢ + ٧س + ٦}{٤س^٢ + ٤س - ٣}$ (ح) $\frac{(س - ٢)^٢ - ١}{س(س - ٣)}$ (ط) $\frac{س^٣ + س^٢ - ٢}{س - ١}$ (الوادى الجديد ٢٠٢٢)

٢ فى كل مما يأتى، بين ما إذا كان $ن_١ = ن_٢$ أم لا، مع ذكر السبب:

(أ) $ن_١(س) = \frac{س - ١}{س}$ ، $ن_٢(س) = \frac{(س - ١)(س^٢ + ١)}{س(س^٢ + ١)}$ (أزهر البحيرة ٢٠٢٢)

(ب) $ن_١(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ + س - ٦}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ - س - ٦}{س^٢ - ٩}$ (الأقصر ٢٠٢٢)

(جـ) $ن_١(س) = \frac{٢س^٣ + ٦س}{(س - ١)(س^٢ + ٣)}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٢س}{س - ١}$

(د) $ن_١(س) = \frac{س^٣ + ١}{س^٣ - س^٢ + س}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٣ + س^٢ + س + ١}{س^٣ + س}$ (قنا ٢٠١٩)

٣ فى كل مما يلى أثبت أن $ن_١ = ن_٢$:

(أ) $ن_١(س) = \frac{١}{س}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ + ٤}{س^٣ + ٤س}$ (الدقهلية ٢٠١٤)

(ب) $ن_١(س) = \frac{٢س}{٢س + ٨}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ + ٤س}{س^٢ + ٨س + ١٦}$ (الشرقية ٢٠٢٢)

(جـ) $ن_١(س) = \frac{س^٣ - ١}{س^٣ + س^٢ + س}$ ، $ن_٢(س) = \frac{(س - ١)(س^٢ + ١)}{س^٣ + س}$ (مطروح ٢٠١٨)

(د) $ن_١(س) = \frac{س^٣ + س}{س^٣ + س^٢ + س + ١}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س}{س + ١}$

٤ أوجد المجال المشترك للدالتين $ن_١$ ، $ن_٢$ لكلٍّ مما يأتى:

(أ) $ن_١(س) = \frac{س + ٢}{٣}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س - ٣}{س}$

(ب) $ن_١(س) = \frac{-٥}{س^٢ - ١}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٢}{س}$

(جـ) $ن_١(س) = \frac{س - ٥}{٣ - س}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٣س}{س^٢ + ١}$

(د) $ن_١(س) = \frac{س}{س^٣ - ٨}$ ، $ن_٢(س) = \frac{١١}{س^٢ - ٤}$

(هـ) $ن_١(س) = \frac{٣س + ١}{٧س}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ + ١}{س^٤ - ٨١}$

(و) $ن_١(س) = \frac{س^٢ + ٩س + ٢٠}{س^٢ - ١٦}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ + ٥}{س^٢ - ٤س}$ (بورسعيد ٢٠١٧)

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ أبسط صورة للدالة ن: ن (س) = $\frac{٣ - س}{س - ٣}$ حيث س ≠ ٣ هي .... (السويس ٢٠١٦)

(أ) ٣ (ب) ١ (جـ) -١ (د) صفر

٢ المجال المشترك للكسرين الجبريين: $\frac{٢}{س^٢ - ١}$ ، $\frac{٥س}{س^٢ - س}$ هو .... (الفيوم ٢٠١٨)

(أ) ع - {١} (ب) ع - {٠ ، ١} (جـ) ع - {٠، ١، -١} (د) ع - {١، -١}

٣ مجال الدالة ن : ن (س) = $\frac{س-٧}{٣ (س+١)}$ هو .... (البحيرة ٢٠١٦)

(أ) ع (ب) ع - {-١} (جـ) ع - {١} (د) ع - {-١، ٣}

٤ إذا كان س = ٣ هو أحد أصفار الدالة د : د (س) = $\frac{س^٢ - ٢س - ك}{س^٢ - ٢٥}$ فإن ك = ...

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) -٣ (د) -٦ (كفر الشيخ ٢٠١٨)

٥ إذا كان $ن_١$ (س) = $\frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$ ، $ن_٢$ (س) = س + ٢ فإن $ن_١$ = $ن_٢$ عندما يكون

لهما نفس المجال المشترك وهو .... (الفيوم ٢٠٠٣)

(أ) ع (ب) ع - {٢} (جـ) ع - {-٢} (د) ع - {١}

٦ إذا كانت د : د (س) = $\frac{س^٢ - ٩}{س - ٣}$ ، فإن مجموعة أصفار الدالة د = ... (الأقصر ٢٠٢٤)

(أ) {٣} (ب) {٣ ، -٣} (جـ) {-٣} (د) ع - {٣}

---

٢ أجب عما يأتي:

١ اكتب الدالة ن : ن (س) = $\frac{س + \frac{١}{س}}{٤س + \frac{٤}{س}}$ في أبسط صورة، موضحًا مجالها. (دمياط ٢٠١٧)

٢ إذا كان $ن_١$ (س) = $\frac{س}{س^٢-س}$ ، $ن_٢$ (س) = $\frac{٢س}{٢س^٢-٢س}$ **فأثبت أن:** $ن_١$ = $ن_٢$ (سوهاج ٢٠٢٢)

٣ أوجد المجال المشترك الذى تتساوى فيه $ن_١$ = $ن_٢$ حيث:

$ن_١$ (س) = $\frac{س^٢ + ٣س + ٢}{س^٢ - ٤}$ ، $ن_٢$ (س) = $\frac{س^٢ - ١}{س^٢ - ٣س + ٢}$ (الإسكندرية ٢٠١٧)

العمليات على الكسور الجبرية

فيديو الشرح



فكر وناقش

درسنا فيما سبق العمليات على الأعداد النسبية، وهى نفس العمليات على الكسور الجبرية.

جمع وطرح عددين نسبيين متحدى المقام فمثلًا: $\frac{٣}{٥} + \frac{١}{٥} = \frac{٣ + ١}{٥} = \frac{٤}{٥}$ ، $\frac{٣}{٥} - \frac{١}{٥} = \frac{٣ - ١}{٥} = \frac{٢}{٥}$

جمع وطرح عددين نسبيين مختلفى المقام فمثلًا: $\frac{٢}{٣} + \frac{١}{٢} = \frac{٤ + ٣}{٣ \times ٢} = \frac{٧}{٦}$ ، $\frac{٢}{٣} - \frac{١}{٢} = \frac{٤ - ٣}{٣ \times ٢} = \frac{١}{٦}$

ضرب عددين نسبيين فمثلًا: $\frac{٢}{٣} \times \frac{٤}{٥} = \frac{٨}{١٥}$

قسمة عددين نسبيين فمثلًا: $\frac{٢}{٣} \div \frac{٤}{٥} = \frac{٢}{٣} \times \frac{٥}{٤} = \frac{١٠}{١٢} = \frac{٥}{٦}$

أولًا جمع وطرح الكسور الجبرية

إذا كانت $\text{س} \in$ المجال المشترك للكسرين الجبريين $\text{ن}_١$ ، $\text{ن}_٢$:

١ جمع وطرح كسرين جبريين متحدى المقام:

إذا كان: $\text{ن}_١(\text{س}) = \frac{\text{د}_١(\text{س})}{\text{د}_٢(\text{س})}$ ، $\text{ن}_٢(\text{س}) = \frac{\text{د}_٣(\text{س})}{\text{د}_٢(\text{س})}$

فإن الجمع: $\text{ن}_١(\text{س}) + \text{ن}_٢(\text{س}) = \frac{\text{د}_١(\text{س})}{\text{د}_٢(\text{س})} + \frac{\text{د}_٣(\text{س})}{\text{د}_٢(\text{س})} = \frac{\text{د}_١(\text{س}) + \text{د}_٣(\text{س})}{\text{د}_٢(\text{س})}$

الطرح: $\text{ن}_١(\text{س}) - \text{ن}_٢(\text{س}) = \frac{\text{د}_١(\text{س})}{\text{د}_٢(\text{س})} - \frac{\text{د}_٣(\text{س})}{\text{د}_٢(\text{س})} = \frac{\text{د}_١(\text{س}) - \text{د}_٣(\text{س})}{\text{د}_٢(\text{س})}$

٢ جمع وطرح كسرين جبريين مختلفى المقام:

إذا كان: $\text{ن}_١(\text{س}) = \frac{\text{د}_١(\text{س})}{\text{د}_٢(\text{س})}$ ، $\text{ن}_٢(\text{س}) = \frac{\text{د}_٣(\text{س})}{\text{د}_٤(\text{س})}$

فإن الجمع: $\text{ن}_١(\text{س}) + \text{ن}_٢(\text{س}) = \frac{\text{د}_١(\text{س})}{\text{د}_٢(\text{س})} + \frac{\text{د}_٣(\text{س})}{\text{د}_٤(\text{س})} = \frac{\text{د}_١(\text{س}) \times \text{د}_٤(\text{س}) + \text{د}_٢(\text{س}) \times \text{د}_٣(\text{س})}{\text{د}_٢(\text{س}) \times \text{د}_٤(\text{س})}$

الطرح: $\text{ن}_١(\text{س}) - \text{ن}_٢(\text{س}) = \frac{\text{د}_١(\text{س})}{\text{د}_٢(\text{س})} - \frac{\text{د}_٣(\text{س})}{\text{د}_٤(\text{س})} = \frac{\text{د}_١(\text{س}) \times \text{د}_٤(\text{س}) - \text{د}_٢(\text{س}) \times \text{د}_٣(\text{س})}{\text{د}_٢(\text{س}) \times \text{د}_٤(\text{س})}$

خطوات جمع أوطرح كسرين جبريين

١ ترتيب حدود كل من بسط ومقام كل كسر على حدةٍ تنازليًّا أو تصاعديًّا حسب أُس المتغير.

٢ تحليل بسط ومقام كل كسر إن أمكن تحليلًا تامًّا. ٣ إيجاد المجال المشترك.

٤ اختزال كل كسر على حدةٍ. ٥ توحيد المقامات.

٦ إجراء عملية الجمع أو الطرح. ٧ وضع الناتج فى أبسط صورة ممكنة.

مثال ١

فى كل مما يأتى أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال الدالة ن:

١ $ن(س) = \frac{س^{٢} + ٢س}{س^{٢} + ٤س + ٤} + \frac{٦}{٣س + ٦}$

٢ $ن(س) = \frac{٢س + ٦}{س^{٢} + س - ٦} + \frac{٣س - ٤}{س^{٢} - ٥س + ٦}$

الحل

١ $ن(س) = \frac{س^{٢} + ٢س}{س^{٢} + ٤س + ٤} + \frac{٦}{٣س + ٦}$

$ن(س) = \frac{س(س + ٢)}{(س + ٢)^{٢}} + \frac{٦}{٣(س + ٢)}$ ، المجال $= ح - \{-٢\}$ **اختزال كل كسر على حدةٍ**

$ن(س) = \frac{س}{س + ٢} + \frac{٢}{س + ٢} = \frac{س + ٢}{س + ٢} = ١$ **الكسران متحدا المقام**

---

٢ $ن(س) = \frac{٢س + ٦}{س^{٢} + س - ٦} + \frac{٣س - ٤}{س^{٢} - ٥س + ٦}$

$ن(س) = \frac{٢(س + ٣)}{(س + ٣)(س - ٢)} + \frac{٣س - ٤}{(س - ٣)(س - ٢)}$ ، مجال ن $= ح - \{-٣ ، ٢ ، ٣\}$

$ن(س) = \frac{٢}{(س - ٢)} + \frac{٣س - ٤}{(س - ٣)(س - ٢)}$

$ن(س) = \frac{٢ \times (س - ٣)}{(س - ٢)(س - ٣)} + \frac{٣س - ٤}{(س - ٣)(س - ٢)}$ **نضرب حدى الكسر الأول × (س −٣) لتوحيد المقامات.**

$ن(س) = \frac{٢س - ٦ + ٣س - ٤}{(س - ٢)(س - ٣)} = \frac{٥س - ١٠}{(س - ٢)(س - ٣)} = \frac{٥(س - ٢)}{(س - ٢)(س - ٣)} = \frac{٥}{س - ٣}$

س؟ سؤال ١

أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن حيث $ن(س) = \frac{٥ + ٥س}{س^{٢} - ١} + \frac{س + ٣}{س^{٢} + ٢س - ٣}$

مثال ٢

أوجد $\text{ن}(\text{س})$ فى أبسط صورة مبينًا مجال ن فى كل مما يأتى:

١ $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٢} - ٤}{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٢} - \dfrac{\text{س}^{٢} - ٢\text{س}}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢}$

ثم أوجد $\text{ن}(١)$ إن أمكن.

٢ $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} - ٩} + \dfrac{٢\text{س}}{٢\text{س} - ٦}$

ثم أوجد $\text{ن}(٢)$ إن أمكن.

الحل

١ $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)}{(\text{س} + ٢)(\text{س} + ١)} - \dfrac{\text{س}(\text{س} - ٢)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ١)}$

مجال ن $= \text{ح} - \{-٢ ، -١ ، ٢\}$

$\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} - ٢}{\text{س} + ١} - \dfrac{\text{س}}{\text{س} + ١}$

$= \dfrac{\text{س} - ٢ - \text{س}}{\text{س} + ١} = \dfrac{-٢}{\text{س} + ١}$

$\therefore \text{ن}(١) = \dfrac{-٢}{١ + ١} = \dfrac{-٢}{٢} = -١$

٢ $\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} + ٣}{\text{س}^{٢} - ٩} + \dfrac{٢\text{س}}{٢\text{س} - ٦}$

$\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} + ٣}{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)} + \dfrac{٢\text{س}}{٢(\text{س} - ٣)}$

مجال ن $= \text{ح} - \{٣ ، -٣\}$

$\text{ن}(\text{س}) = \dfrac{١}{(\text{س} - ٣)} + \dfrac{\text{س}}{(\text{س} - ٣)} = \dfrac{\text{س} + ١}{\text{س} - ٣}$

$\text{ن}(٢) = \dfrac{٢ + ١}{٢ - ٣} = \dfrac{٣}{-١} = -٣$

مثال ٣

إذا كان $\text{ن}_{١}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٩}{\text{س}^{٢} - ٩}$ ، $\text{ن}_{٢}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}}$ فأوجد $\text{ن}(\text{س})$

حيث $\text{ن}(\text{س}) = \text{ن}_{١}(\text{س}) + \text{ن}_{٢}(\text{س})$ مبينًا مجال ن.

الحل

$\because \text{ن}(\text{س}) = \text{ن}_{١}(\text{س}) + \text{ن}_{٢}(\text{س})$

$\therefore \text{ن}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٩}{\text{س}^{٢} - ٩} + \dfrac{\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}} = \dfrac{(\text{س} + ٣)^{٢}}{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)} + \dfrac{\text{س}}{\text{س}(\text{س} + ٣)}$

مجال ن $= \text{ح} - \{٣ ، -٣ ، ٠\}$

$\therefore \text{ن}(\text{س}) = \dfrac{\text{س} + ٣}{\text{س} - ٣} + \dfrac{١}{\text{س} + ٣}$

∴ م.م.أ للمقامين هو $(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)$

$= \dfrac{(\text{س} + ٣)^{٢} + (\text{س} - ٣)}{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)} = \dfrac{\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٩ + \text{س} - ٣}{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)}$

$\therefore \text{ن}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٢} + ٧\text{س} + ٦}{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)} = \dfrac{(\text{س} + ٦)(\text{س} + ١)}{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)}$

مثـال ٤

أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال الدالة ن حيث:

$$ن(س) = \frac{٧}{س - ٤} + \frac{٧ س + ٢}{١٦ - س^٢}$$

الحـل

$$ن(س) = \frac{٧}{س - ٤} + \frac{٧ س + ٢}{١٦ - س^٢}$$

$$ن(س) = \frac{٧}{س - ٤} - \frac{٧ س + ٢}{س^٢ - ١٦}$$

لأن: $\frac{أ}{-ب} = -\frac{أ}{ب}$

$$ن(س) = \frac{٧}{س - ٤} - \frac{٧ س + ٢}{(س - ٤)(س + ٤)}$$ ، المجال = ح − {٤ ، −٤}

الكسران مختلفا المقام

$$ن(س) = \frac{٧(س + ٤) - (٧ س + ٢)}{(س - ٤)(س + ٤)}$$

م.م.أ للمقامين هو (س − ٤)(س + ٤)

$$= \frac{٧ س + ٢٨ - ٧ س - ٢}{(س - ٤)(س + ٤)}$$

$$\therefore ن(س) = \frac{٢٦}{(س - ٤)(س + ٤)}$$

نقاط هامة

- مجال الكسر الجبرى = مجال معكوسه الجمعى.

فمثلًا: إذا كان: $د(س) = \frac{س - ٣}{س - ٧}$ ، مجال د هو ح − {٧}

فإن: المعكوس الجمعى للدالة هو $-\frac{(س - ٣)}{(س - ٧)}$ أو $\frac{(س - ٣)}{(٧ - س)}$ أو $\frac{(٣ - س)}{(س - ٧)}$ ،

ويكون مجال المعكوس الجمعى هو ح − {٧}

س؟ سؤال ٢

١ **اختصر** $ن(س) = \frac{٢ س + ١٠}{س^٢ + ٧ س + ١٠} - \frac{س + ٣}{س^٢ + ٥ س + ٦}$ **لأبسط صورة موضحًا مجال ن**

ثم أوجد إن أمكن كلًا من ن (−٢) ، ن (٢) .

٢ **أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن حيث:**

$ن(س) = \frac{١٢}{١٢ س^٢ - ٣} + \frac{٢}{٢ س - ٤ س^٢}$ **ثم أوجد إن أمكن كلًا من ن (٠) ، ن (−١) .**

ثانيًا ضرب الكسور الجبرية

تعريف

ضرب كسرين جبريين:

إذا كان: $ن_1$ ، $ن_2$ كسرين جبريين حيث $ن_1(س) = \frac{د_1(س)}{د_2(س)}$ ، $ن_2(س) = \frac{د_3(س)}{د_4(س)}$

فإن: $ن_1(س) \times ن_2(س) = \frac{د_1(س)}{د_2(س)} \times \frac{د_3(س)}{د_4(س)}$

$= \frac{د_1(س) \times د_3(س)}{د_2(س) \times د_4(س)}$

ويكون مجال $[ن_1 \times ن_2] = ع - (ص(د_2) \cup ص(د_4))$

مثال ٥

إذا كان $ن(س) = \frac{س^2 + س + 1}{س^2 - 9} \times \frac{س^2 - 4س + 3}{س^3 - 1}$

فأوجد ن (س) فى أبسط صورة موضحًا مجال ن.

الحل

$ن(س) = \frac{س^2 + س + 1}{(س - 3)(س + 3)} \times \frac{(س - 3)(س - 1)}{(س - 1)(س^2 + س + 1)}$

تحليل بسـط ومقام كل كسر جبرى إن أمكن.

مجال $ن = ع - \{3 ، -3 ، 1\}$

$\therefore ن(س) = \frac{1}{س + 3}$

حذف العوامل المشتركة بين بسوط ومقامات الكسرين الجبريين بعد إيجاد المجال.

سؤال ٣

أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا المجال:

$ن(س) = \frac{س^2 - 4 - 3س}{س^2 - 1} \times \frac{س^2 - س}{3س + س^2}$

مثـال ٦

أوجد ن (س) فى أبسط صورة محددًا مجال ن:

$$ن(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}} \times \frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٩\text{س} + ١٨}$$

الحـل

$$ن(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - ٩}{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}} \times \frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٩\text{س} + ١٨} = \frac{(\text{س} + ٣)(\text{س} - ٣)}{\text{س}(\text{س} + ٣)} \times \frac{\text{س}}{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ٦)}$$

مجال ن = ع − $\{٠ ، -٣ ، ٣ ، ٦\}$

$$ن(\text{س}) = \frac{١}{\text{س} - ٦}$$

مثـال ٧

أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن:

$$ن(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} + ٥\text{س}}{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦} \times \frac{\text{س}^{٢} - ٧\text{س} + ١٠}{\text{س}^{٢} - ٢٥}$$

الحـل

$$ن(\text{س}) = \frac{\text{س}(\text{س} + ٥)}{(\text{س} + ٣)(\text{س} - ٢)} \times \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٥)}{(\text{س} - ٥)(\text{س} + ٥)}$$

$ن(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س} + ٣}$ ، مجال ن = ع − $\{-٣ ، ٢ ، -٥ ، ٥\}$

س؟ سؤال ٤

١ **أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن حيث:**

$$ن(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٣} + ٨}{\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ٦} \times \frac{٣\text{س}^{٢} + ٩\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ٤}$$

٢ **أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن حيث:**

$$ن(\text{س}) = \frac{\text{س} + ١}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢} \times \frac{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ١٠}{٣\text{س}^{٢} + ١٦\text{س} + ٥}$$

ثم أوجد إن أمكن ن (٠) ، ن (−١) . (سوهاج ٢٠٢٣)

ثالثًا قسمة الكسور الجبرية

تعريـف

المعكوس الضربى للكسر الجبرى:

لكل كسر جبرى ن (س) ≠ ٠ حيث ن (س) = $\frac{د_1 (س)}{د_2 (س)}$

يوجد «معكوس ضربى» يرمز له بالرمز $ن^{-1}$ (س) حيث $ن^{-1}$ (س) = $\frac{د_2 (س)}{د_1 (س)}$ ،

ويكون مجال ن = ع − ص ($د_2$) ، مجال $ن^{-1}$ = ع − (ص ($د_1$) ∪ ص ($د_2$))

ويكون ن (س) × $ن^{-1}$ (س) = ١

فمثلًا: إذا كان ن (س) = $\frac{س + ١}{س - ٣}$ فإن: $ن^{-1}$ (س) = $\frac{س - ٣}{س + ١}$

حيث مجال ن = ع − {٣} ، مجال $ن^{-1}$ = ع − {−١ ، ٣}

مثـال ٨

إذا كان ن (س) = $\frac{س - ٢}{س - ٤}$ ، **فأوجد:** $ن^{-1}$ (س) محددًا مجاله.

لاحظ أن

مجال المعكوس الضربى هو
ع − مجموعة أصفار البسط والمقام.

الحـل

$ن^{-1}$ (س) = $\frac{س - ٤}{س - ٢}$ ، مجال $ن^{-1}$ = ع − {٢ ، ٤}

مثـال ٩

أوجد $ن^{-1}$ (س) محددًا مجال $ن^{-1}$ ، ثم أوجد إن أمكن قيمة كل من $ن^{-1}$ (٤)، $ن^{-1}$ (٠)

حيث: ن (س) = $\frac{٢ س^2 + ٤ س}{س^2 - س - ٦}$

الحـل

∵ ن (س) = $\frac{٢ س (س + ٢)}{(س + ٢) (س - ٣)}$ = $\frac{٢ س}{س - ٣}$

∴ $ن^{-1}$ (س) = $\frac{(س + ٢) (س - ٣)}{٢ س (س + ٢)}$ = $\frac{س - ٣}{٢ س}$

، مجال $ن^{-1}$ = ع − {−٢ ، ٣ ، ٠}

∴ $ن^{-1}$ (٤) = $\frac{٤ - ٣}{٢ × ٤}$ = $\frac{١}{٨}$

، ∵ ٠ ∉ مجال $ن^{-1}$

∴ $ن^{-1}$ (٠) غير معرفة

س؟ سؤال ٥

إذا كانت ن (س) = $\frac{س^2 - ٥ س + ٦}{س^2 - ٩}$ **فأوجد:**

❶ المجال الذى يكون فيه للكسر معكوس ضربى. ❷ قيمة س التى تجعل $ن^{-1}$ (س) = $\frac{٣}{٥}$

تعريف

قسمة كسرين جبريين:

إذا كان $ن_1$ ، $ن_2$ كسرين جبريين حيث $ن_1(س) = \frac{د_1(س)}{د_2(س)}$ ، $ن_2(س) = \frac{د_3(س)}{د_4(س)}$

فإن: $ن_1(س) \div ن_2(س) = \frac{د_1(س)}{د_2(س)} \div \frac{د_3(س)}{د_4(س)} = \frac{د_1(س)}{د_2(س)} \times \frac{د_4(س)}{د_3(س)}$

ويكون مجال $[ن_1 \div ن_2] = ع - (ص(د_2) \cup ص(د_3) \cup ص(د_4))$

وهو المجال المشترك لكل من $ن_1$ ، $ن_2^{-1}$

مثال ١٠

ضع $ن(س)$ في أبسط صورة موضحًا مجال ن حيث:

$$ن(س) = \frac{1}{س^2 - 4} \div \frac{س^2 + 6س + 9}{س^2 + س - 6}$$

الحل

$$ن(س) = \frac{1}{س^2 - 4} \div \frac{س^2 + 6س + 9}{س^2 + س - 6} = \frac{1}{(س - 2)(س + 2)} \div \frac{(س + 3)(س + 3)}{(س + 3)(س - 2)}$$

مجال ن = ع - {-٢، ٢، -٣}

$$ن(س) = \frac{1}{(س - 2)(س + 2)} \times \frac{(س + 3)(س - 2)}{(س + 3)(س + 3)} = \frac{1}{(س + 2)(س + 3)}$$

مثال ١١

إذا كانت $ن(س) = \frac{س^2 + س + 1}{س^2 - 9} \div \frac{س^3 - 1}{س^2 - 4س + 3}$

فأوجد $ن(س)$ في أبسط صورة موضحًا مجال ن.

الحل

$$ن(س) = \frac{س^2 + س + 1}{(س - 3)(س + 3)} \div \frac{(س - 1)(س^2 + س + 1)}{(س - 3)(س - 1)}$$

مجال ن = ع - {٣، -٣، ١}

$$ن(س) = \frac{س^2 + س + 1}{(س - 3)(س + 3)} \times \frac{(س - 3)(س - 1)}{(س - 1)(س^2 + س + 1)}$$

$$\therefore ن(س) = \frac{1}{س + 3}$$

مثال ١٢

أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن حيث

$$ن(س) = \frac{٣س}{س^٢ - س - ٢} \div \frac{س - ١}{١ - س^٢}$$

الحل

$$ن(س) = \frac{٣س}{(س - ٢)(س + ١)} \div \frac{س - ١}{-(س - ١)(س + ١)}$$

المجال = ع − {٢ ، −١ ، ١}

$$ن(س) = \frac{٣س}{(س - ٢)(س + ١)} \times \frac{-(س - ١)(س + ١)}{(س - ١)}$$

$$ن(س) = \frac{-٣س}{س - ٢} = \frac{٣س}{٢ - س}$$

لاحظ أن

$$١ - س^٢ = -(س^٢ - ١)$$

$$= -(س - ١)(س + ١)$$

مثال ١٣

أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن حيث ن (س) = $\frac{س^٢ + ٢س}{س^٣ - ٢٧} \div \frac{س + ٢}{س^٢ + ٣س + ٩}$

ثم أوجد إن أمكن ن (٢) ، ن (−٢).

الحل

$$ن(س) = \frac{س(س + ٢)}{(س - ٣)(س^٢ + ٣س + ٩)} \div \frac{س + ٢}{س^٢ + ٣س + ٩}$$

مجال ن = ع − {٣ ، −٢}

$$ن(س) = \frac{س(س + ٢)}{(س - ٣)(س^٢ + ٣س + ٩)} \times \frac{س^٢ + ٣س + ٩}{س + ٢} = \frac{س}{(س - ٣)}$$

$$ن(٢) = \frac{٢}{٢ - ٣} = -٢$$

ن (−٢) غير معرفة؛ لأن −٢ $\not\in$ مجال ن.

تذكر أن

المقدار (س^٢ + ٣ س + ٩)

لا يحلَّل وليس له أصفار حقيقية.

سؤال ٦

أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن حيث ن(س) = $\frac{٥س^٢ - ٣٠س + ٤٥}{س + ٢} \div (٥س - ١٥)$

أسئلة الكتاب المدرسى | أسئلة موقع الوزارة

تدريبات الأضواء

أولا جمع وطرح الكسور الجبرية

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ $\frac{٣ أ}{٥ ب} + \frac{٢ أ}{٥ ب} = $ .... ، ب ≠ ٠ فى أبسط صورة.

(أ) $\frac{٥ أ}{ب}$ (ب) $\frac{أ}{٥ ب}$ (جـ) $\frac{أ}{ب}$ (د) $\frac{أ}{ب^٢}$

٢ أبسط صورة للمقدار $\frac{س^٢ + ٦}{س^٢ + ٩} + \frac{٣}{س^٢ + ٩}$ هى ....

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ١ (د) $\frac{١}{س^٢ + ٩}$

٣ إذا كانت س ≠ ٢ فإن د (س) = $\frac{س + ٢}{س - ٢} - \frac{س - ٦}{٢ - س}$ فى أبسط صورة تساوى ....

(أ) $\frac{٤}{س - ٢}$ (ب) $\frac{-٢}{س - ٢}$ (جـ) ٢ (د) ١ (الشرقية ٢٠١٢)

٤ إذا كان ن (س) = $\frac{٣}{س} + \frac{س}{٣}$ فإن مجال ن هو .... (الشرقية ٢٠١٨)

(أ) ح - {٣، ٠} (ب) ح - {٠} (جـ) ح - {٤} (د) ح

٥ المعكوس الجمعى للكسر الجبرى $\frac{٢}{س + ١}$ هو .... (القليوبية ٢٠١٣)

(أ) $\frac{٢}{س - ١}$ (ب) $\frac{-٢}{س + ١}$ (جـ) $\frac{س - ١}{٢}$ (د) $\frac{س + ١}{-٢}$

٦ المعكوس الجمعى للكسر: $\frac{س + ٧}{س - ٥}$ هو ....

(أ) $\frac{٧ - س}{س + ٥}$ (ب) $\frac{س + ٧}{٥ - س}$ (جـ) $\frac{-(س + ٧)}{٥ - س}$ (د) $\frac{س - ٧}{٥ - س}$

٧ يكون للدالة د: د (س) = $\frac{س + ٣}{س - ٤}$ معكوس جمعى فى المجال .... (شمال سيناء ٢٠١٩)

(أ) ح - {-٣} (ب) ح - {٤} (جـ) ح - {-٣، ٤} (د) {٤، ٣}

٨ إذا كان ن (س) = $\frac{٢}{س - ٢} - \frac{س}{س - ٢}$ فإن مجموعة أصفار الدالة ن هى ....

(أ) {٢} (ب) ∅ (جـ) ح - {٢} (د) {صفر}

٩ إذا كان د: دالة مجالها ح - {١ ، ٩} فإن مجال معكوسها الجمعي هو ....

(أ) ح - {-١ ، -٩}　　(ب) ح - {-١ ، ٩}

(جـ) ح - {١ ، -٩}　　(د) ح - {١ ، ٩}

١٠ إذا كانت: $ن(س) = \frac{١}{س - ٣}$ ، $د(س) = \frac{٩}{س + ٨}$ فإن مجال (ن - د) هو ....

(أ) {٣ ، -٨}　　(ب) ح - {٣}　　(جـ) ح - {٣ ، -٨}　　(د) ح - {-٨}

٢ أوجد ن (س) في أبسط صورة مبينًا المجال:

١ $ن(س) = \frac{س}{س + ٣} + \frac{٣}{س + ٣}$

٢ $ن(س) = \frac{٥س}{س - ٢} - \frac{١٠}{س - ٢}$

٣ $ن(س) = \frac{١}{س + ٢} + \frac{٤}{س^٢ - ٤}$

٤ $ن(س) = \frac{س^٢ - ٣س}{س^٢ - ٩} + \frac{س - ١}{س^٢ + ٢س - ٣}$ (قنا ٢٠١٩)

٥ $ن(س) = \frac{س^٢ + س + ١}{س^٣ - ١} + \frac{س^٢ - س - ٢}{س^٢ - ١}$ (بني سويف ٢٠١٩)

٦ $ن(س) = \frac{س^٢ - ٢س - ١٥}{س^٢ - ٩} - \frac{١٠ - ٢س}{س^٢ - ٨س + ١٥}$ (المنيا ٢٠١٩)

٧ $ن(س) = \frac{س}{س^٢ - س} + \frac{س + ١}{س^٢ - ١}$

٨ $ن(س) = \frac{٢س - ٥}{٤س^٢ - ٢٥} + \frac{س - ١}{٢س^٢ + ٣س - ٥}$

٩ $ن(س) = \frac{س^٢ + ٣س + ٩}{س^٣ - ٢٧} + \frac{(س - ٤)^٢}{س^٢ - ٧س + ١٢}$

١٠ $ن(س) = \frac{٣س - ٤}{س^٢ - ٥س + ٦} + \frac{٢س + ٦}{س^٢ + س - ٦}$ (كفر الشيخ ٢٠١٩)

١١ $ن(س) = \frac{٤}{٤س^٢ - ١} - \frac{س}{٢س^٢ - س}$

١٢ $ن(س) = \frac{س - ٣}{س^٢ - ٧س + ١٢} - \frac{٤}{س^٢ - ٤س}$ (البحيرة ٢٠١٩)

١٣ $ن(س) = \frac{٨}{س - ٦} + \frac{٤}{٣س}$

١٤ $ن(س) = \frac{س}{٨} - \frac{س - ٤}{س - ٢}$

١٥ $ن(س) = \frac{٤}{س + ٧} - \frac{٧}{س - ٢}$

١٦ $ن(س) = \frac{٥س - ١}{٢س^٢ - ٧س - ١٥} - \frac{٤ - ٣س}{٢س^٢ + ٥س + ٣}$

١٧ $ن(س) = \frac{٢س + ١٠}{س^٢ + ٧س + ١٠} - \frac{س + ١}{س^٢ + س - ٢}$

١٨ $ن(س) = \frac{س + ٤}{س^٢ - س - ٢٠} + \frac{س + ٣}{٩س^٣ + ٢٧س^٢}$

٣ إذا كان $ن_١$ (س) = $\frac{س}{س^٢ + ٢س}$ ، $ن_٢$ (س) = $\frac{س + ٢}{س^٢ - ٤}$ ؛ (أسوان ٢٠١٧)

فأوجد ن (س) = $ن_١$ (س) + $ن_٢$ (س) مبينًا مجال ن.

٤ **أوجد** ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن حيث ن (س) = $\frac{س + ٣}{س^٢ + ٦س + ٩}$ + $\frac{س + ٢}{س + ٣}$ ،

ثم أوجد إن أمكن كلًا من ن (–٣) ، ن (٢٠٢٦) .

٥ إذا كان ن (س) = $\frac{س^٢ - ٢س}{س^٤ - ٣س^٣ + ٢س^٢}$ - $\frac{٤ - س^٢}{س^٢ + س - ٢}$ **فأوجد ن (س) فى أبسط صورة، مبينًا مجال ن، ثم أوجد مجموعة حل المعادلة ن (س) = ٠** (المنوفية ٢٠١٥)

٦ إذا كان مجال الدالة ن حيث ن (س) = $\frac{ب}{س}$ + $\frac{٩}{س + أ}$ هو ح - {٠ ، ٤}

، ن (٥) = ٢ **فأوجد قيمتى أ ، ب** (الغربية ٢٠٢٤)

ثانيًا ضرب الكسور الجبرية

٧ **أوجد فى أبسط صورة مبينًا المجال فى كل مما يأتى:**

١ ن (س) = $\frac{س^٢ - ٩}{س + ٣} \times \frac{١}{س - ٣}$

٢ ن (س) = $\frac{٢س + ٢}{٥س - ١٥} \times \frac{٣س - ٩}{٤س + ٤}$

٣ ن (س) = $\frac{س^٢ + ٢س + ١}{٢س - ٨} \times \frac{س - ٤}{س + ١}$ (السويس ٢٠١٧)

٤ ن (س) = $\frac{س^٢ - ٣س}{س^٢ - ٥س + ٦} \times \frac{(س - ٢)^٢}{٢س}$

٥ ن (س) = $\frac{س^٢ + ٢س}{س^٣ - ٢٧} \times \frac{س^٢ + ٣س + ٩}{س + ٢}$ ، ثم أوجد إن أمكن ن (٦)، ن (–٢) . (جنوب سيناء ٢٠١٧)

٦ ن (س) = $\frac{٦س^٢ + ٣س}{س + ٢} \times \frac{س^٢ + ٤س + ٤}{٦س + ٤}$ (أسيوط ٢٠١٥)

٧ ن (س) = $\frac{س^٣ - ١}{س^٢ - ٢س + ١} \times \frac{٢س - ٢}{س^٢ + س + ١}$ (السويس ٢٠٢٢)

٨ ن (س) = $\frac{س - ٢}{٢س^٢ - ٣س} \times \frac{٩ - ٤س^٢}{٦ + س - ٢س^٢}$

٩ ن (س) = $\frac{س^٣ - س^٢ - ٢س}{س^٢ - ٥س + ٦} \times \frac{س^٢ + ٢س - ١٥}{س^٣ + ٦س^٢ + ٥س}$ ، ثم أوجد إن أمكن ن (٧)، ن (٣) . (الدقهلية ٢٠١٧)

ثالثًا قسمة الكسور الجبرية

٨ اختر الإجابة الصحيحة:

١ مجال الدالة $ن^{-1}$ حيث $ن(س) = \frac{س + ٤}{س - ٤}$ هو .... (المنوفية ٢٠١٩)

(أ) ع (ب) ع - {٤} (جـ) ع - {-٤} (د) ع - {٤ ، -٤}

٢ إذا كان س ∈ ع - {٠ ، ١} ، فإن: $\frac{١ - س}{س} \div \frac{س - ١}{س} =$ .... (سوهاج ٢٠١٨)

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) س - ١ (د) س

٣ إذا كان $ن(س) = \frac{س}{س + ٥}$ ، فإن: مجال $ن^{-1}$ هو .... (شمال سيناء ٢٠١٩)

(أ) ع (ب) ع - {٠} (جـ) ع - {٥} (د) ع - {٠ ، -٥}

٤ إذا كان $ن(س) = \frac{س + ٤}{٧}$ ، فإن: $ن^{-1}(-٤)$ .... (المنيا ٢٠١٣)

(أ) = صفر (ب) = $\frac{٧}{٨}$ (جـ) = -٤ (د) غير مُعَرف

٥ إذا كان للكسر الجبرى $\frac{س - أ}{س + ٣}$ معكوس ضربى هو: $\frac{س + ٣}{س + ٥}$ ، فإن: أ = ... (جنوب سيناء ٢٠١٧)

(أ) -٥ (ب) -٣ (جـ) ٣ (د) ٥

٦ إذا كان $ن(س) = \frac{س^{٢} - ٢س}{-(س - ٢)(س^{٢} + ٢)}$ ، فإن: مجال $ن^{-1}$ هو .... (الفيوم ٢٠١٩)

(أ) ع (ب) ع - {٢} (جـ) ع - {٠} (د) ع - {٠ ، ٢}

٧ إذا كانت $د(س) = \frac{٧ + س}{٧ - س}$ حيث س ∈ ع - {٧ ، -٧} ، فإن: $د^{-1}(-٢) =$ .... (الدقهلية ٢٠١٦)

(أ) $\frac{-١}{د(-٢)}$ (ب) $\frac{-١}{د(٢)}$ (جـ) $\frac{١}{د(٢)}$ (د) $\frac{١}{د(-٢)}$

٨ إذا كان $ن(س) = \frac{س}{س^{٢} + ٩}$ فإن: مجال $ن^{-1}$ هو ....

(أ) ع - {٠} (ب) ∅ (جـ) ع - {٠ ، -٣ ، ٣} (د) ع

٩ إذا كان $ن(س) = \frac{س^{٢} - لس + ١٢}{س^{٢} - ١٦}$ ، $ن^{-1}(س) = \frac{س + ٤}{س - ٣}$ فإن: قيمة ل = ...

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) -٣ (د) ٧

١٠ إذا كان المعكوس الضربى للكسر: $\frac{س^{٢} + ٢س}{س^{٢} - ٢س - ب}$ هو $\frac{س - ٤}{س}$ فإن: قيمة ب = ... (الدقهلية ٢٠٢٤)

(أ) -٨ (ب) ٨ (جـ) ٤ (د) -٤

١١ إذا كانت $ن_{١}(س) = س + \frac{١}{س - ٢}$ ، $ن_{٢}(س) = ٤ + س + \frac{٤}{س - ٢}$ ، س ≠ ٢ ،

وكانت $ن(س) = ن_{١}(س) \div ن_{٢}(س)$ فإن: ن(س) = ... (فى أبسط صورة)

(أ) ٤ (ب) -٤ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{-١}{٤}$

٩ أوجد ن (س) فى أبسط صورة، مبينًا المجال فى كل مما يأتى:

١ $ن(س) = \frac{س - ١}{س^٢ - ١} \div \frac{س^٢ - ٥س}{س^٢ - ٤س - ٥}$

٢ $ن(س) = \frac{س^٢ - ٤٩}{س^٣ - ٨} \div \frac{س + ٧}{س - ٢}$ ، **ثم احسب قيمة ن (١) إن أمكن** (أسيوط ٢٠١٩)

٣ $ن(س) = \frac{س^٢ - ٩}{٢س^٢ + ٦س} \div \frac{٣س^٢ + ٦س - ٤٥}{٤س^٢ - ٤}$

٤ $ن(س) = \frac{س^٣ - ١}{س^٢ - س} \div \frac{س^٢ + س + ١}{س + ٣}$ (الغربية ٢٠١٩)

٥ $ن(س) = \frac{س^٢ - ٢س - ١٥}{س^٢ - ٩} \div \frac{١٠ - ٢س}{س^٢ - ٦س + ٩}$ (الشرقية ٢٠١٩)

٦ $ن(س) = \frac{س^٣ - ٨}{س^٣ - ٧س^٢ + ١٠س} \div \frac{س^٢ + ٢س + ٤}{٣س^٢ - ١٥س}$ (الإسكندرية ٢٠١٦)

٧ $ن(س) = \frac{س - ٢}{س + ٦} \div \frac{س - ٨}{٤س + ٢٤} \times \frac{س - ٨}{س - ٢}$

١٠ إذا كان $ن(س) = \frac{س^٢ + ٣س}{س^٢ + س - ٦}$ **فأوجد:**

١ $ن^{-١}(س)$ فى أبسط صورة، موضحًا مجالها.

٢ **قيمة س إذا كان** $ن^{-١}(س) = ٢$

١١ إذا كان $ن(س) = \frac{س^٢ - ٢س}{(س - ٢)(س^٢ + ٢)}$ **فأوجد:**

١ $ن^{-١}(س)$ فى أبسط صورة، وأوجد مجالها.

٢ **قيمة س إذا كان** $ن^{-١}(س) = ٣$ (بنى سويف ٢٠٢٢)

TIMSS تفكير إبداعى

١٢ إذا كان $ن(س) = \frac{س^٢ - ٩}{س + ب}$ ، $ن(٤) = ٧$؛ **فأوجد قيمة ب، ثم أوجد $ن^{-١}(س)$ فى أبسط صورة، مبينًا مجال $ن^{-١}$**

١٣ أوجد ن (س) فى أبسط صورة، مبينًا المجال حيث: (المنوفية ٢٠١٧)

$ن(س) = \frac{س^٢ + س + ١}{س^٤ - س} + \frac{س + ٣}{٣ - ٢س - س^٢}$ ، وإذا كان $ن(أ) = -٢$؛ **فأوجد قيمة أ**

١٤ إذا كان $ن(س) = \frac{س^٢ - ٣س + ٢}{س^٢ - ١} \times \frac{س^٢ - ٤س - ٥}{س - ٥}$ ، $ن(س) = ٢$؛ **فأوجد قيمة س**

تدريبات الكتاب المدرسى

١ أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن حيث:

١ $ن(س) = \frac{س - ٢}{س} + \frac{س + ٣}{٢س}$

٢ $ن(س) = \frac{٢س}{س + ٢} + \frac{٤}{س + ٢}$

٣ $ن(س) = \frac{٢}{س + ٣} + \frac{س + ٣}{س^٢ + ٣س}$

٤ $ن(س) = \frac{س}{س - ٤} - \frac{س + ٤}{س^٢ - ١٦}$

٥ $ن(س) = \frac{٣}{س - ١} - \frac{٢}{س - ١}$

٦ $ن(س) = \frac{٥}{س - ٣} + \frac{٤}{٣ - س}$

٧ $ن(س) = \frac{س^٢}{س - ١} + \frac{س}{١ - س}$

٨ $ن(س) = \frac{س}{س - ٢} - \frac{س}{س + ٢}$

٩ $ن(س) = \frac{س + ٣}{٢س} - \frac{س}{٢س - ١}$

١٠ $ن(س) = \frac{٣}{س + ١} + \frac{٢س + ١}{١ - س^٢}$

---

٢ أوجد ن (س) فى أبسط صورة محددًا مجال ن فى كلٍّ مما يلى:

١ $ن(س) = \frac{س^٢ + س + ١}{س} \times \frac{س^٢ - س}{س^٣ - ١}$ (الفيوم ٢٠٢٢)

٢ $ن(س) = \frac{س^٣ - ١}{س^٢ - س} \times \frac{س + ٣}{س^٢ + س + ١}$ (الأقصر ٢٠٢٢)

٣ $ن(س) = \frac{٣س - ١٥}{س + ٣} \div \frac{٥س - ٢٥}{٤س + ١٢}$ (أسيوط ٢٠٢٢)

٤ $ن(س) = \frac{س^٢ + ٢س - ٣}{س + ٣} \div \frac{س^٢ - ١}{س + ١}$

---

٣ أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن:

١ $ن(س) = \frac{س - ٦}{٢س^٢ - ١٥س + ١٨} + \frac{س - ٥}{١٥ - ١٣س + ٢س^٢}$

٢ $ن(س) = \frac{س^٢ - ٨س + ١٢}{س^٢ - ٤س + ٤} + \frac{س^٢ - ٤س - ٥}{س^٢ - ٧س + ١٠}$

٣ $ن(س) = \frac{س^٢ + ٢س + ٤}{س^٣ - ٨} - \frac{٩ - س^٢}{س^٢ + س - ٦}$ (الأقصر ٢٠٢٢)

٤ $ن(س) = \frac{س - ٣}{س^٢ - ٧س + ١٢} - \frac{س - ٣}{٣ - س}$ (أسيوط ٢٠١٩)

٥ $ن(س) = \frac{س - ٥}{٢س^٢ - ١٣س + ١٥} + \frac{س + ٣}{١٥س - ١٨ - ٢س^٢}$

٦ $ن(س) = \frac{س^٢ - ٣س}{٢س^٢ - س - ٦} \div \frac{٢س^٢ - ٣س}{٤س^٢ - ٩}$

٧ $ن(س) = \frac{س^٢ - ١٢س + ٣٦}{س^٢ - ٦س} \times \frac{٤س + ٢٤}{٣٦ - س^٢}$

٨ $ن(س) = \frac{س^٢ - ٢س + ١}{س^٣ - ١} \div \frac{س - ١}{س^٢ + س + ١}$

٩ $ن(س) = \frac{س^٢ - ٢س - ١٥}{س^٢ - ٩} \div \frac{٢س - ١٠}{س^٢ - ٦س + ٩}$ (الدقهلية ٢٠٢٤)

١٠ $ن(س) = \frac{س^٢ - ٣س + ٢}{١ - س^٢} \div \frac{٣س - ١٥}{س^٢ - ٦س + ٥}$

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كانت د (س) = $\frac{س + ٣}{س - ٢}$ فإن مجال المعكوس الجمعى للدالة هو .... (الشرقية ٢٠٢٢)

(أ) ع - {٢}   (ب) ع - {٢ ، -٣}   (جـ) ع - {-٣}   (د) ع

٢ إذا كان ن (س) = $\frac{س - ١}{س}$ فإن مجال $ن^{-١}$ هو .... (دمياط ٢٠٢٢)

(أ) ع   (ب) ع - {١}   (جـ) ع - {٠}   (د) ع - {٠ ، ١}

٣ المجال المشترك للدالتين $\frac{٢ س}{س - ٣}$ ، $\frac{س}{س + ٥}$ هو .... (بورسعيد ٢٠٢٣)

(أ) {٣ ، -٥}   (ب) ع - {٠ ، ٣ ، -٥}   (جـ) ع - {٣ ، -٥}   (د) ع

٤ مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س)= $\frac{س^٢ - ٣س + ٢}{س - ٢}$ هى .... (سوهاج ٢٠٢٣)

(أ) {٢}   (ب) {١}   (جـ) ع - {٢}   (د) {١ ، ٢}

٥ مجال الكسر الجبرى $\frac{س - ٥}{٣}$ يساوى مجال الكسر الجبرى .... (القليوبية ٢٠١٦)

(أ) $\frac{س}{س^٢ + ٩}$ (ب) $\frac{س}{س - ٣}$ (جـ) $\frac{٣}{س - ٥}$ (د) $\frac{س - ٥}{س - ٣}$

٦ إذا كانت $ن_١$ (س) = $\frac{١}{س - ٣}$ ، $ن_٢$ (س) = $\frac{١}{٣ - س}$ فإن : $ن_١ \neq ن_٢$ لأن .... (سوهاج ٢٠٠٤)

(أ) $ن_١$ (س) = $ن_٢$ (س)   (ب) مجال $ن_١$ = مجال $ن_٢$

(جـ) $ن_١$ (س) ≠ $ن_٢$ (س)   (د) مجال $ن_١$ ≠ مجال $ن_٢$

٢ أجب عن الأسئلة الآتية:

١ فى كل مما يأتى أوجد: ن(س) فى أبسط صورة موضحًا المجال:

(أ) ن (س) = $\frac{س^٢ - ١}{س^٣ - ١} - \frac{١}{س^٢ + س + ١}$ (القاهرة ٢٠٢٢)

(ب) ن (س) = $\frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س^٣ - ٨} \div \frac{٢ س - ٦}{س^٢ + ٢س + ٤}$ (الأقصر ٢٠٢٢)

٢ إذا كان مجال الدالة ن : ن (س) = $\frac{(س - ١) (س - ٣)}{س^٢ - أ}$ هو ع - {٣ ، -٣} (أسيوط ٢٠٢٢)

فأوجد:

(أ) قيمة أ   (ب) $ن^{-١}$(س) فى أبسط صورة، موضحًا مجالها.

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ مجموعة أصفار الدالة د : د(س) = $\frac{-٥}{س-٤}$ هى …………

(أ) ع -{٤}　(ب) ع -{٥}　(جـ) {٤}　(د) ∅

٢ مجال المعكوس الضربى للدالة د : د(س) = $\frac{س-٣}{س+٥}$ هو …………

(أ) ع -{-٥}　(ب) ع -{٣ ، -٥}　(جـ) ع -{٣}　(د) {-٥،٣}

٣ أبسط صورة للدالة ى حيث ى (س) = $\frac{س}{س-٣} \div \frac{٣س}{س^٢-٩}$ ، س ∈ ع - {٠ ، ٣، -٣} هى………

(أ) $\frac{٣}{س-٣}$　(ب) $\frac{٣}{س+٣}$　(جـ) $\frac{س+٣}{٣}$　(د) $\frac{س-٣}{٣}$

٤ إذا كان: $ى_١$ ، $ى_٢$ ، $ى_٣$ ، $ى_٤$ أربع دوال ، حيث $ى_١$ (س) =س ، $ى_٢$ (س) = $\frac{س^٢}{س}$ ،

$ى_٣$ (س) = $\frac{س(س^٢+٤)}{س^٢+٤}$ ، $ى_٤$ (س) = $\frac{س + ٥}{س^٢}$ فإن الدالتين المتساويتين هما …………

(أ) $ى_١$ ، $ى_٢$　(ب) $ى_١$ ، $ى_٣$　(جـ) $ى_١$ ، $ى_٤$　(د) $ى_٢$ ، $ى_٣$

٥ إذا كان ى (س) = $\frac{١}{س} - \frac{٣}{س}$ فإن $ى^{-١}$(س) = …………

(أ) س - $\frac{س}{٣}$　(ب) $\frac{٢}{س}$　(جـ) $\frac{-س}{٢}$　(د) $\frac{س}{٢}$

٦ إذا كانت د (س) = $\frac{س+ ٧}{س-٣}$ فإن د ليست معرفة عندما س = …………

(أ) ٣　(ب) ٧　(جـ) -٣　(د) -٧

٧ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $\frac{س^٢ - س - ٢}{س^٢ + ٤}$ هى………… (كفر الشيخ ٢٠٢٤)

(أ) {٢ ، ١}　(ب) {-٢ ، -١}　(جـ) {٢ ، -١}　(د) {-٢ ، ٢}

٨ إذا كان $ى_١$ (س) = $\frac{١}{س-٣}$ ، $ى_٢$(س) = $\frac{س}{س-٣}$ (الشرقية ٢٠٢٤)

وكان ى (س) = $ى_١$ (س) + $ى_٢$ (س) فإن مجال $ى^{-١}$ = …………

(أ) ع -{٠}　(ب) ع -{٣}　(جـ) ع　(د) ع -{-١ ، ٣}

٩ المجال المشترك للدالتين $ن_١$ ، $ن_٢$ حيث: (بورسعيد ٢٠٢٤)

$ن_١(س) = \frac{-١}{س}$ ، $ن_٢(س) = \frac{١}{س-٧}$ هو :

(أ) ح $-\{٧ ، ٠\}$ (ب) ح $-\{٧\}$ (جـ) ح $-\{٠\}$ (د) ح

---

٢ أجب عن الأسئلة الآتية:

١ إذا كان مجال الدالة د هو ح$-\{١ ، ٣\}$، حيث د (س) = $\frac{س+٥}{س^٢+ أ س+ ب}$

فأوجد قيمة كل من أ ، ب

٢ **أوجد** ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجالها حيث ن (س) = $\frac{س}{س - ٤} - \frac{س + ٤}{س^٢ - ١٦}$ (الجيزة ٢٠٢١)

٣ اختزل الكسر الجبرى ن (س) = $\frac{٢س-٦}{س^٢ - ٥ س+٦}$ إلى أبسط صورة موضحًا المجال.

٤ إذا كان ن (س) = $\frac{س^٣+ ٨}{س^٢ + س - ٦} \times \frac{س+ ٣}{س^٢ - ٢ س + ٤}$ (القليوبية ٢٠٢١)

فأوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجالها.

٥ إذا كان $ن_١(س) = \frac{س^٢ + س - ١٢}{س^٢ + ٥ س + ٤}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ - ٢ س - ٣}{س^٢ + ٢ س + ١}$

فأثبت أن: $ن_١(س) = ن_٢(س)$ لجميع قيم س التى تنتمى للمجال المشترك، **وأوجد** هذا المجال.

٦ إذا كان ن (س) = $\frac{٢ س - ٧}{س + ٤}$ **فأوجد** إن أمكن ن (-١) ، $ن^{-١}(٤)$

٧ إذا كان: ن (س) = $\frac{س^٢-٢س}{س^٢-٣س+٢}$ **فأوجد:** $ن^{-١}(س)$ فى أبسط صورة وعيِّن مجال $ن^{-١}$

وإذا كان: $ن^{-١}(س) = ٣$ **فما قيمة** س؟

١ أكمل ما يأتى:

١ أبسط صورة للدالة ن حيث $ن(س) = \frac{٣س}{س + ١} \div \frac{س}{س + ١}$ ، هى .... ومجالها ....

٢ إذا كان للكسر الجبرى $\frac{س - أ}{س - ٣}$ معكوس ضربى هو $\frac{س - ٣}{س + ٢}$ فإن أ = ...

٣ إذا كان $ن_١(س) = \frac{س + ١}{س - ٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ + س}{س^٢ - ٢س}$

فإن المجال المشترك الذى تتساوى فيه $ن_١$ ، $ن_٢$ هو ....

٢ أوجد المجال المشترك الذى تتساوى فيه $ن_١(س)$ ، $ن_٢(س)$ حيث:

$$ن_١(س) = \frac{س^٢ + س - ١٢}{س^٢ + ٥س + ٤} ، ن_٢(س) = \frac{س^٢ - ٢س - ٣}{س^٢ + ٢س + ١}$$

٣ إذا كان: $ن(س) = \frac{س^٢ - ٤٩}{س^٣ - ٨} \div \frac{س + ٧}{س - ٢}$ فأوجد ن(س) فى أبسط صورة مبينًا مجالها ، واحسب قيمة ن(١) إن أمكن.

٤ إذا كان $ن_١(س) = \frac{س^٢}{س^٣ - س^٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٣ + س^٢ + س}{س^٤ - س}$ فأثبت أن: $ن_١ = ن_٢$

٥ إذا كان مجال الدالة ن حيث $ن(س) = \frac{ب}{س} + \frac{٩}{س + أ}$ هو ح − {٠ ، ٤}، ن(٥) = ٢ ، فأوجد قيمتى أ ، ب.

(الغربية ٢٠٢٤)

٦ أوجد الدالة ن فى أبسط صورة مبينًا مجالها، حيث:

١ $ن(س) = \frac{س^٢ - س}{س^٢ - ١} + \frac{س - ٥}{س^٢ - ٦س + ٥}$

٢ $ن(س) = \frac{س^٣ - ١}{س^٢ - ٢س + ١} \times \frac{٢س - ٢}{س^٢ + س + ١}$

٧ إذا كان $ن(س) = \frac{س^٢ - ٢س}{(س - ٢)(س^٢ + ٢)}$ فأجب عما يأتى:

١ أوجد: $ن^{-١}(س)$ وعين مجاله.

٢ إذا كان $ن^{-١}(س) = ٣$ فما قيمة س؟

الوحدة ٣ الاحتمال



أهداف دروس الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون الطالب قادرًا على أن:

الدرس الأول: العمليات على الأحداث

- يحسب احتمال وقوع حدثين معًا.
- يحسب احتمال وقوع أحد حدثين على الأقل.

الدرس الثانى: الحدث المكمل والفرق بين حدثين

- يحسب احتمال عدم وقوع حدث ما.
- يحسب احتمال وقوع حدث ما، وعدم وقوع حدث آخر.



ذاكر الدرس العمليات على الأحداث


فكر وناقش:

- **قبل دراستنا للعمليات على الأحداث، سوف نتذكر معًا ما درسناه عن الاحتمال:**

التجربة العشوائية: هى تجربة نستطيع تحديد جميع النواتج الممكنة لها قبل إجرائها ولكن لا نستطيع تحديد أى من هذه النواتج سيتحقق فعلًا عند إجراء التجربة.

فضاء العينة (ف): هو مجموعة جميع النواتج الممكنة للتجربة العشوائية.

الحدث: هو مجموعة جزئية من فضاء العينة «ف».

أنواع الأحداث:

1. **الحدث المؤكد (ف):** وهو حدث يشتمل على جميع عناصر فضاء العينة.
2. **الحدث المستحيل (∅):** وهو حدث لا يشتمل على أى عنصر من فضاء العينة.
3. **الحدث الممكن:** وهو حدث يشتمل على بعض العناصر من فضاء العينة.

احتمال وقوع الحدث

يقال إن حدثًا ما قد وقع إذا كان ناتج التجربة العشوائية «عنصرًا من عناصر هذا الحدث».

تعريف

إذا كان ؟ ⊂ ف فإن احتمال وقوع الحدث ؟ ويرمز له بالرمز ل (؟) هو:

$$\text{ل}(\text{؟}) = \frac{\text{عدد عناصر الحدث ؟}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة ف}} = \frac{\text{ن}(\text{؟})}{\text{ن}(\text{ف})}$$

حيث ٠ ≤ ل (؟) ≤ ١


نقاط هامة

- يمكن كتابة الاحتمال فى صورة كسر أو نسبة مئوية.

والشكل التالى يوضح إمكانية وقوع الحدث طبقًا لقيمة احتماله:

مؤكد	غالبًا	أحيانًا	نادرًا	مستحيل
١	$\frac{٣}{٤}$ = ٠,٧٥	$\frac{١}{٢}$ = ٠,٥	$\frac{١}{٤}$ = ٠,٢٥	٠
١٠٠٪	٧٥٪	٥٠٪	٢٥٪	٠٪

مثـال ١

عند إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى

وكان أ هو حدث ظهور عدد أقل من أو يساوى ٦



، ب هو حدث ظهور عدد أكبر من ٦

، حـ هو حدث ظهور عدد أكبر من ١ وأقل من ٦

، ء هو حدث ظهور عدد مكعب كامل

احسـب كلًّا من ل (أ) ، ل (ب) ، ل (حـ) ، ل (ء)

الحـل

الحدث أ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

∴ ن (أ) = ٦

∴ ل (أ) = $\frac{٦}{٦}$ = ١

∴ الحدث (أ) حدث مؤكد

الحدث ب = ∅

∴ ن (ب) = صفر

∴ ل (ب) = $\frac{\text{صفر}}{٦}$ = ٠

∴ الحدث (ب) حدث مستحيل

الحدث حـ = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥}

∴ ن (حـ) = ٤

∴ ل (حـ) = $\frac{٤}{٦}$ = $\frac{٢}{٣}$

∴ الحدث (حـ) حدث ممكن

الحدث ء = {١}

∴ ن (ء) = ١

∴ ل (ء) = $\frac{١}{٦}$

∴ الحدث (ء) حدث ممكن

س؟ سؤال ١

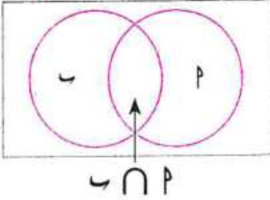
فى تجـربة سحب بطاقة عشوائيًا من ٩ بطاقات متماثلة ومرقمة بالأرقام من ١ إلى ٩، وكان أ هو حـدث البطاقة المسحوبة تحمل عددًا مربعًا كاملًا، ب هو حـــدث البطاقة المسحوبة تحمل عـددًا فرديًا، حـ هو حـدث البطاقة المسحوبة تحمل عـددًا يقبل القسمة على ٥، **أوجـــد:**

١ فضاء العينة.

٢ ل (أ) ، ل (ب) ، ل (حـ)

العمليات على الأحداث

أولًا التقاطع:



تقاطع حدثين:

إذا كان أ ، ب حدثين فى فضاء العينة «ف» فإن:

«الحدث أ ∩ ب يعنى حدث وقوع الحدثين أ ، ب معًا».

ويكون: احتمال وقوع الحدثين أ ، ب معًا = ل (أ ∩ ب) = $\frac{ن(أ \cap ب)}{ن(ف)}$

مثال ٢

فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى.

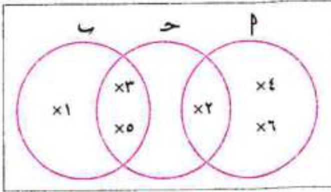
إذا كان أ «حدث الحصول على عدد زوجى»، ب «حدث الحصول على عدد فردى»،

حـ «حدث الحصول على عدد أولى»، **فأوجد مستعينًا بشكل ڤن :**

١ احتمال وقوع الحدثين أ ، حـ معًا.

٢ احتمال وقوع الحدثين ب ، حـ معًا.

٣ احتمال وقوع الحدثين أ ، ب معًا.



الحل

ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} ، ن (ف) = ٦

أ = {٢ ، ٤ ، ٦} ، ن (أ) = ٣

ب = {١ ، ٣ ، ٥} ، ن (ب) = ٣

حـ = {٢ ، ٣ ، ٥} ، ن (حـ) = ٣

١ احتمال وقوع الحدثين أ ، حـ معًا = ل (أ ∩ حـ) = $\frac{ن(أ \cap حـ)}{ن(ف)} = \frac{١}{٦}$

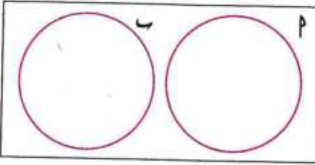
٢ احتمال وقوع الحدثين ب ، حـ معًا = ل (ب ∩ حـ) = $\frac{ن(ب \cap حـ)}{ن(ف)} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

٣ احتمال وقوع الحدثين أ ، ب معًا = ل (أ ∩ ب) = $\frac{ن(أ \cap ب)}{ن(ف)} = \frac{صفر}{٦}$ = صفر

سؤال ٢

فى تجربة سحب بطاقة عشوائيًا من ١١ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ١١، إذا كان أ هو حدث البطاقة المسحوبة تحمل عددًا زوجيًا، ب هو حدث البطاقة المسحوبة تحمل عددًا أقل من ٩ **فأوجد احتمال وقوع الحدثين أ ، ب معًا.**

الأحداث المتنافية:



يقال لحدثين أ ، ب من فضاء العينة لتجربة عشوائية:

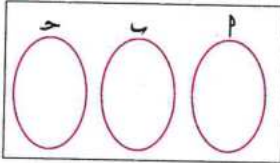
إنهما متنافيان إذا كان $أ \cap ب = \varnothing$

أي أن: وقوع أحدهما يمنع وقوع الآخر.

ويكون: $ل(أ \cap ب) = ل(\varnothing) = \frac{\text{عدد عناصر } \varnothing}{\text{عدد عناصر ف}} = \frac{\text{صفر}}{\text{عدد عناصر ف}} =$ صفر. أي أن: $ل(أ \cap ب) = 0$



نقاط هامة



- **يقال لعدة أحداث إنها متنافية، إذا كانت متنافية مثنى مثنى.**

لأي ثلاثة أحداث أ ، ب ، ح من فضاء عينة ف

إذا كان: $أ \cap ب = \varnothing$ ، $ب \cap ح = \varnothing$ ، $أ \cap ح = \varnothing$

فإن: أ ، ب ، ح أحداث متنافية مثنى مثنى.

مثال ٣

في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة، إذا كان أ هو حدث ظهور عدد فردي، ب هو حدث ظهور عدد زوجي، **فأوجد** $ل(أ \cap ب)$

الحل

فضاء العينة (ف) = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} $\therefore$ ن (ف) = ٦

$\because$ أ = {١ ، ٣ ، ٥} ، ب = {٢ ، ٤ ، ٦}

$\therefore أ \cap ب = \varnothing$

$\therefore$ أ ، ب حدثان متنافيان

ويكون: $ل(أ \cap ب) = ل(\varnothing) = \frac{\text{عدد عناصر } \varnothing}{\text{عدد عناصر ف}} = \frac{\text{صفر}}{٦} =$ صفر

سؤال ٣

إذا ألقي حجر نرد منتظم مرة واحدة عشوائيًا ولوحظ العدد الظاهر على الوجه العلوي، فإذا كان:

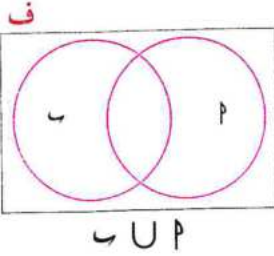
أ : حدث ظهور عدد زوجي. ب : حدث ظهور عدد فردي. ح : حدث ظهور عدد أولي.

١ أوجد: $ل(أ \cap ب)$

٢ هل الأحداث أ ، ب ، ح أحداث متنافية مثنى مثنى؟

ثانيًا **الاتحاد:**

اتحاد حدثين:



إذا كان ٮ ، ب حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية **فإن:**

الحدث (ٮ ∪ ب) يعنى حدث وقوع الحدث ٮ أو الحدث ب أو كليهما معًا.

أو بعبارة أخرى **هو حدث وقوع أحد الحدثين على الأقل**

ويكون: ل (ٮ ∪ ب) = $\frac{\text{ن (ٮ ∪ ب)}}{\text{ن (ف)}}$

مثال ٤

صندوق به ١٠ كرات منها ٤ كرات حمراء مرقمة بالأرقام من ١ إلى ٤ ، ٦ كرات خضراء مرقمة من ٥ إلى ١٠ ، سحبت كرة واحدة عشوائيًّا من الصندوق.

أوجد احتمال كلٍّ من الحدثين الآتيين:

١ حدث أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو تحمل عددًا فرديًّا.

٢ حدث أن تكون الكرة المسحوبة خضراء وتحمل عددًا زوجيًّا.

الحل

ف = {ح$_{١}$ ، ح$_{٢}$ ، ح$_{٣}$ ، ح$_{٤}$ ، خ$_{٥}$ ، خ$_{٦}$ ، خ$_{٧}$ ، خ$_{٨}$ ، خ$_{٩}$ ، خ$_{١٠}$}

١ نفرض أن حدث أن تكون المسحوبة حمراء = ٮ وحدث أن تحمل الكرة عددًا فرديًّا = ب

ٮ = {ح$_{١}$ ، ح$_{٢}$ ، ح$_{٣}$ ، ح$_{٤}$} ، ب = {ح$_{١}$ ، ح$_{٣}$ ، خ$_{٥}$ ، خ$_{٧}$ ، خ$_{٩}$}

ٮ ∪ ب = {ح$_{١}$ ، ح$_{٢}$ ، ح$_{٣}$ ، ح$_{٤}$ ، خ$_{٥}$ ، خ$_{٧}$ ، خ$_{٩}$} ، ن(ٮ ∪ ب) = ٧

∴ ل (ٮ ∪ ب) = $\frac{\text{ن (ٮ ∪ ب)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{٧}{١٠}$

٢ نفرض أن حدث أن تكون الكرة المسحوبة خضراء = حـ وحدث أن تحمل الكرة عددًا زوجيًّا = ء

حـ = {خ$_{٥}$ ، خ$_{٦}$ ، خ$_{٧}$ ، خ$_{٨}$ ، خ$_{٩}$ ، خ$_{١٠}$} ، ء = {ح$_{٢}$ ، ح$_{٤}$ ، خ$_{٦}$ ، خ$_{٨}$ ، خ$_{١٠}$}

حـ ∩ ء = {خ$_{٦}$ ، خ$_{٨}$ ، خ$_{١٠}$} ، ن(حـ ∩ ء) = ٣

∴ ل (حـ ∩ ء) = $\frac{\text{ن (حـ ∩ ء)}}{\text{ن (ف)}}$ = $\frac{٣}{١٠}$

مثـال ٥

فى تجربة سحب بطاقة عشوائيًا من بين ١٥ بطاقة متماثلة ومخلوطة جيدًا ومرقمة بالأرقام من ١ إلى ١٥

أولًا: اكتـب فضـاء العينـة.

ثانيًا: اكتـب الأحـداث الآتيـة ثم مثلها فى شكـل فـن:

١ أ حدث أن تحمل البطاقة المسحوبة عددًا يقبل القسمة على ٣

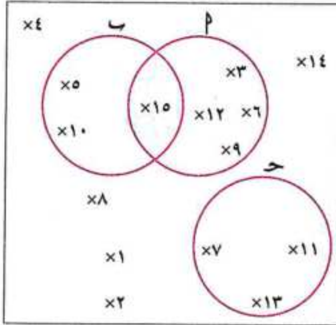
٢ ب حدث أن تحمل البطاقة المسحوبة عددًا يقبل القسمة على ٥

٣ حـ حدث أن تحمل البطاقة المسحوبة عددًا أوليًا أكبر من ٥

ثالثًا: باستخدام شكل فن أوجد ما يلى:

١ ل (أ ∪ ب) ، ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب). **ومـاذا تلاحـظ؟**

٢ ل (أ ∪ حـ) ، ل (أ) + ل (حـ). **ومـاذا تلاحـظ؟**



الحـل

أولًا: ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ... ، ... ، ١٥}، ن (ف) = ١٥

ثانيًا: ١ أ = {٣، ٦، ٩، ١٢، ١٥} ، ن (أ) = ٥

٢ ب = {٥، ١٠، ١٥} ، ن (ب) = ٣

٣ حـ = {٧، ١١، ١٣} ، ن (حـ) = ٣

ثالثًا: ١ ∵ أ ∪ ب = {٣، ٥، ٦، ٩، ١٠، ١٢، ١٥}

∵ ل(أ ∪ ب) = $\frac{\text{ن (أ ∪ ب)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{٧}{١٥}$

، ل(أ) = $\frac{\text{ن (أ)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{٥}{١٥} = \frac{١}{٣}$ ، ل(ب) = $\frac{\text{ن (ب)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{٣}{١٥} = \frac{١}{٥}$ ، ل(أ ∩ ب) = $\frac{\text{ن (أ ∩ ب)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{١}{١٥}$

∴ ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب) = $\frac{١}{٣} + \frac{١}{٥} - \frac{١}{١٥} = \frac{٧}{١٥}$ (٢)

من (١) ، (٢) **نلاحظ أن:** ل(أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

٢ ∵ أ ∪ حـ = {٣ ، ٦ ، ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ٧ ، ١١ ، ١٣}

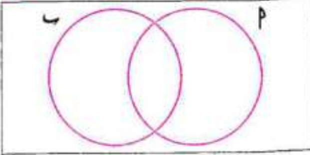
∴ ل(أ ∪ حـ) = $\frac{\text{ن (أ ∪ حـ)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{٨}{١٥}$ (٣)

ل (حـ) = $\frac{\text{ن (حـ)}}{\text{ن (ف)}} = \frac{٣}{١٥} = \frac{١}{٥}$

ل (أ) + ل (حـ) = $\frac{١}{٣} + \frac{١}{٥} = \frac{٨}{١٥}$ (٤)

من (٣) ، (٤) **نلاحظ أن:** ل(أ ∪ حـ) = ل (أ) + ل (حـ) حيث أ ، حـ حدثان متنافيان.

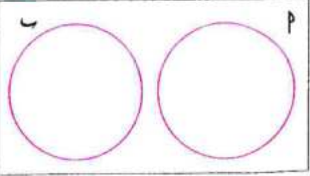
قاعـدة



- لأى حدثين أ ، ب من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية يكون:

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب)

، ل (أ ∩ ب) = ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∪ ب)



- إذا كان أ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة «ف» لتجربة عشوائية فيكون:

ل (أ ∩ ب) = صفر ، ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)

مثـال ٦

إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف وكان ل (أ) = ٠,٣ ، ل (ب) = ٠,٤ **فأوجد كلًّا مما يأتى:**

١ ل (أ ∪ ب) إذا كان: ل (أ ∩ ب) = ٠,١

٢ ل (أ ∪ ب) إذا كان: أ ، ب حدثين متنافيين.

٣ ل (أ ∩ ب) إذا كان: ل (أ ∪ ب) = ٠,٥

الحـل

١ ∵ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب)

= ٠,٣ + ٠,٤ - ٠,١ = ٠,٦

٢ ∵ أ ، ب حدثان متنافيان

∴ أ ∩ ب = Ø

ويكون ل (أ ∩ ب) = صفر

∴ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)

= ٠,٣ + ٠,٤ = ٠,٧

٣ ∵ ل (أ ∩ ب)

= ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∪ ب)

∴ ل (أ ∩ ب)

= ٠,٣ + ٠,٤ - ٠,٥ = ٠,٢

سؤال ٤

١ فـى تجربـة إلقاء حجر نرد منتظـم مرة واحدة وملاحظة العـدد الظاهر على الوجه العلـوى، إذا كان:
أ «حـدث الحصـول على عدد أولى فـردى»، ب «حدث الحصول على عدد يقبل القسـمة على ٣»،
فأوجـد احتمـال وقـوع أحد الحدثيـن على الأقـل.

٢ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة «ف» لتجربة عشوائية وكان:

ل (أ) = ٠,٧ ، ل (ب) = ٠,٦ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٥

فأوجد: احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل.

مثال ٧

إذا كان ؟ ، ب حدثين من فضاء العينة «ف» لتجربة عشوائية، **فأجب عما يأتي:**

١ إذا كان: ل (؟) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٣}$ ، ل (؟ ∩ ب) = $\frac{١}{٨}$ ، **فأوجد** ل (؟ ∪ ب)

٢ إذا كان: ل (؟) = ٠,٤ ، ل (ب) = ٠,٥ ، ل (؟ ∪ ب) = ٠,٦ ، **فأوجد** ل (؟ ∩ ب)

الحل

١ ∵ ل (؟ ∪ ب) = ل (؟) + ل (ب) - ل (؟ ∩ ب)

∴ ل (؟ ∪ ب) = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٣}$ - $\frac{١}{٨}$ = $\frac{١٧}{٢٤}$

٢ ∵ ل (؟ ∪ ب) = ل (؟) + ل (ب) - ل (؟ ∩ ب)

∴ ل (؟ ∩ ب) = ل (؟) + ل (ب) - ل (؟ ∪ ب)

∴ ل (؟ ∩ ب) = ٠,٤ + ٠,٥ - ٠,٦ = ٠,٣

مثال ٨

إذا كان ؟ ، ب حدثين متنافيين من تجربة عشوائية ما، وكان ل (؟) = $\frac{١}{٣}$ ، ل (؟ ∪ ب) = $\frac{٧}{١٢}$

فأوجد ل (ب).

الحل

∵ ؟ ، ب حدثان متنافيان ∴ ل (؟ ∩ ب) = صفر

∴ ل (؟ ∪ ب) = ل (؟) + ل (ب)

∴ $\frac{٧}{١٢}$ = $\frac{١}{٣}$ + ل (ب) ∴ ل (ب) = $\frac{٧}{١٢}$ - $\frac{١}{٣}$ = $\frac{١}{٤}$

سؤال ٥

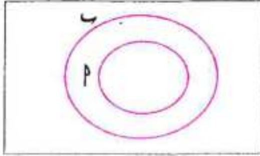
١ إذا كان ل (؟) = ٠,٢ ، ل (ب) = ٠,٧ ، ل (؟ ∩ ب) = ٠,١٥ **فأوجد** ل (؟ ∪ ب).

٢ إذا كان ؟ ، ب حدثين متنافيين من تجربة عشوائية ما، وكان ل (؟) = ٠,٥ ، ل (ب) = ٠,٣

فأوجد: ل (؟ ∩ ب) ، ل (؟ ∪ ب)



نقاط هامة



من شكل فن المقابل: لأى حدثين أ ، ب

• إذا كان أ ⊂ ب فإن:

١ أ ∩ ب = أ ∴ ل (أ ∩ ب) = ل (أ)

٢ أ ∪ ب = ب ∴ ل (أ ∪ ب) = ل (ب)

مثال ٩

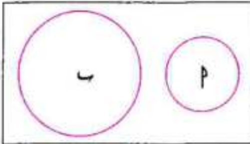
إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان ل (أ ∪ ب) = $\frac{١}{٤}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٨}$

فأوجـــد: ل (أ) إذا كان:

١ أ ، ب حدثين متنافيين.

٢ ب ⊂ أ

الحـل



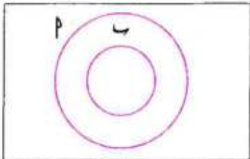
«أ ، ب حدثان متنافيان»

١ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين فإن ل (أ ∩ ب) = صفر

∴ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)

∴ $\frac{١}{٤}$ = ل (أ) + $\frac{١}{٨}$

∴ ل (أ) = $\frac{١}{٤}$ − $\frac{١}{٨}$ = $\frac{١}{٨}$



«ب ⊂ أ»

٢ ∵ ب ⊂ أ ∴ أ ∪ ب = أ

ل (أ ∪ ب) = ل (أ) ⟸ $\frac{١}{٤}$ = ل (أ)

∴ ل (أ) = $\frac{١}{٤}$

س؟ سؤال ٦

١ إذا كان ل (أ) = ٠,٥ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٨ ، أ ⊂ ب فأوجد ل (ب).

٢ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان ل (أ) = ٠,٤ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٧ ، ل(ب) = ص فأوجد قيمة ص إذا كان :

(أ) ل (أ ∩ ب) = ٠,٢ (ب) أ ⊂ ب (جـ) الحدثان أ ، ب متنافيين

مثال ١٠

سحبت بطاقة عشوائيًا من بين ٢٥ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٥، أوجد احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة:

١ تحمل عددًا فرديًا يقبل القسمة على ٣ ٢ تحمل عددًا فرديًا يقبل القسمة على ٥

٣ تحمل عددًا فرديًا يقبل القسمة على ٣ أو ٥

الحل

ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، .... ، ٢٥} ، ن (ف) = ٢٥

١ بفرض أن أ هو حدث أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عددًا فرديًا يقبل القسمة على ٣

∴ أ = {٣ ، ٩ ، ١٥ ، ٢١} ، ن (أ) = ٤ ∴ ل (أ) = $\frac{ن (أ)}{ن (ف)} = \frac{٤}{٢٥}$

٢ بفرض أن ب هو حدث أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عددًا فرديًا يقبل القسمة على ٥

∴ ب = {٥ ، ١٥ ، ٢٥} ، ن (ب) = ٣ ∴ ل (ب) = $\frac{ن (ب)}{ن (ف)} = \frac{٣}{٢٥}$

٣ احتمال أن تحمل البطاقة عددًا فرديًا يقبل القسمة على ٣ أو ٥ يعنى ل (أ ∪ ب)

∵ أ ∪ ب = {٣ ، ٩ ، ١٥ ، ٢١ ، ٥ ، ٢٥} ، ن (أ ∪ ب) = ٦

∴ ل (أ ∪ ب) = $\frac{ن (أ ∪ ب)}{ن (ف)} = \frac{٦}{٢٥}$

أو ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = $\frac{٤}{٢٥} + \frac{٣}{٢٥} - \frac{١}{٢٥} = \frac{٦}{٢٥}$

سؤال ٧

١ صندوق به ٣٠ بطاقة متماثلة مرقمة من ١ إلى ٣٠ ، سحبت بطاقة واحدة عشوائيًا. **احسب احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل:**

(أ) عددًا يقبل القسمة على ٤ (ب) عددًا أوليًا. (جـ) عددًا أوليًا أو يقبل القسمة على ٤

٢ إذا سحبت كرة من سلة بها كرات ملونة : ٨ حمراء، ٧ زرقاء ، ٦ خضراء؛ **فأوجد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو خضراء.**



تدريبات الأضـــواء

أولًا التقاطع

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ احتمال وقوع الحدث المؤكد يساوى ....

(أ) ٠,١ (ب) صفرًا (جـ) ١ (د) $\frac{١}{٢}$

٢ احتمال وقوع الحدث المستحيل يساوى .... (دمياط ٢٠٢٢)

(أ) ∅ (ب) صفرًا (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

٣ يُقال أن الحدثين ﺃ ، ﺏ متنافيين إذا كان: ﺃ ∩ ﺏ = ... (بني سويف ٢٠٢٤)

(أ) ﺃ (ب) ﺏ (جـ) صفر (د) ∅

٤ فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد أقل من ٣ يساوى .... (الجيزة ٢٠١٣)

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

٥ إذا ألقيت قطعة نقود منتظمة مرة واحدة فإن احتمال ظهور صورة وكتابة معًا يساوى ....

(أ) صفرًا (ب) ٠,٥ (جـ) ٠,٧٥ (د) ١

٦ إذا كان ﺃ ، ﺏ حدثين متنافيين، وكان ل (ﺃ) = ٠,٢ ، ل (ﺏ) = ٠,٣ فإن ل (ﺃ ∪ ﺏ) = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٤}$

٧ إذا كان ﺃ ⊂ ﺏ فإن ل (ﺃ ∩ ﺏ) = ... (قنا ٢٠٢٢)

(أ) ل (ﺏ) (ب) ل (ﺃ) (جـ) صفر (د) ∅

٨ إذا سُحبت بطاقة عشوائيًا من بين ٥٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٥٠، فإن احتمال أن يكون الرقم المسحوب مضاعفًا للعدد ٨ هو ....٪ (البحيرة ٢٠١٧)

(أ) ١٠ (ب) ١٥ (جـ) ٥٠ (د) ١٢

٩ إذا كان ل (ﺃ ∩ ﺏ) = ل (ﺏ) حيث ﺃ ، ﺏ حدثان من فضاء عينة لتجربة عشوائية فإن: .... (الإسماعيلية ٢٠١٣)

(أ) ﺃ ، ﺏ حدثان متنافيان (ب) ﺃ ⊂ ﺏ

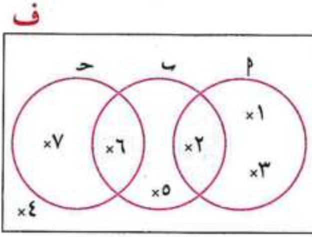
(جـ) ﺏ ⊂ ﺃ (د) ﺃ = ∅

٢ ١ باستخدام شكل ڤن المقابل أوجد:

(أ) ل (أ ∩ ب)

(ب) ل (أ ∩ حـ)

(جـ) ل (ب ∩ حـ)

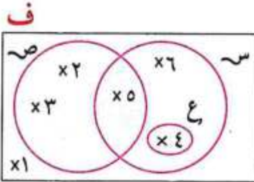


٢ باستخدام شكل ڤن المقابل أوجد:

(أ) ل (س ∩ ص)

(ب) ل (س ∩ ع)

(جـ) ل (ص ∩ ع)

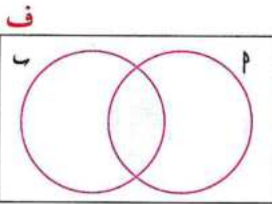


٣ أكمل شكل ڤن المقابل باستخدام الأعداد من ١ إلى ١٠ حيث:

أ = {١ ، ٤ ، ٥ ، ٧ ، ٨}

ب = {٢ ، ٦ ، ٨ ، ١٠} ، ثم أوجد:

١ ل (أ) ٢ ل (ب) ٣ ل (أ ∩ ب)



٤ صندوق به ١٥ كرة، منها ٥ كرات حمراء مرقمة بالأرقام من ١ إلى ٥ ، ١٠ كرات خضراء مرقمة بالأرقام من ٦ إلى ١٥ ، سحبت كرة واحدة عشوائيًا من هذا الصندوق. أوجد احتمال كل من الحدثين الآتيين:

١ أن تكون الكرة المسحوبة حمراء وتحمل عددًا فرديًا.

٢ أن تكون الكرة المسحوبة خضراء وتحمل عددًا زوجيًا.

٥ كيس به ٣٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٣٠ ، فإذا سحبت بطاقة واحدة عشوائيًا.

فأوجد احتمال أن يكون العدد المكتوب على البطاقة المسحوبة فرديًا ويقبل القسمة على ٣.

٦ سحب كارت عشوائيًا من ٥٠ كارتًا متماثلًا مرقمة من ١ إلى ٥٠

احسب احتمال أن يكون الكارت المسحوب يحمل رقمًا:

١ أقل من ١١ ٢ أكبر من ٣٠ ٣ أكبر من ١١ وأقل من ٣٠

ثانيًا الاتحاد

٧ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان ب ⊂ أ فإن ل (أ ∪ ب) = ... (دمياط ٢٠١٩)

(أ) ل (ب) (ب) ل (أ) (جـ) ل (أ ∩ ب) (د) صفر

٢ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية فإن ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ....

(أ) ل (∅) (ب) ل (ف) (جـ) ل (أ ∩ ب) (د) ل (أ ∪ ب)

٣ فى تجربة إلقاء قطعة نقود منتظمة مرة واحدة كان أ هو حدث ظهور صورة، ب هو حدث ظهور كتابة، فإن: ل (أ ∪ ب) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) صفر (د) ∅ (الغربية ٢٠١٩)

٤ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، ل (أ) = ٠,٥ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٨ فإن: ل (ب) = ...

(أ) صفر (ب) ٠,٣ (جـ) ٠,٥ (د) ٠,٦ (البحيرة ٢٠١٨)

٥ فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد أكبر من أو يساوى ١ هو ....

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) ١

٦ صندوق يحتوى على ٥ كرات حمراء، ٤ كرات بيضاء، ٣ كرات سوداء، جميعها متماثلة الحجم، فإذا سحبت كرة من الصندوق فإن احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو سوداء يساوى ....

(أ) $\frac{٥}{١٢}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) $\frac{١}{٣}$

٧ إذا كان ب ⊂ أ فإن ل (أ ∪ ب) − ل (أ ∩ ب) = ...

(أ) ل (أ) − ل (ب) (ب) ∅

(جـ) ل (أ ∩ ب) (د) ل (ب) − ل (أ)

٨ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = $\frac{٣}{٨}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٤}$ فإن ل (أ ∪ ب) = ...

(أ) $\frac{٣}{٨}$ (ب) $\frac{٥}{٨}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٤}$

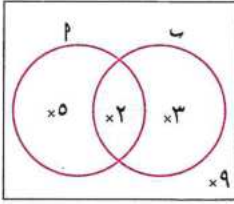
٩ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين، ل (أ) = ٠,٤ ، ل (ب) = ٠,٦ فإن احتمال وقوع أ أو ب يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٠,٢ (جـ) ٠,٤ (د) ٠,٦

١٠ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما، وكان ل (أ) = ٢ ل (ب)، ل (أ ∪ ب) = ٠,٧ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٢ فإن ل (أ) = ...

(أ) ٠,٦ (ب) ٠,٣ (جـ) ٠,٢ (د) ٠,٧

١١ **من شكل ڤن المقابل:** ل (أ ∪ ب) − ل (أ ∩ ب) = ...

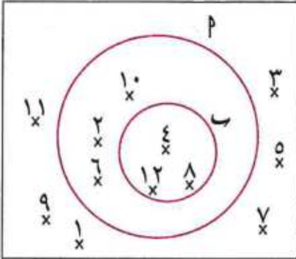


(أ) $\frac{٣}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٢}$

(جـ) ١ (د) صفر

---

٨ تم توزيع الأرقام من ١ إلى ١٢ فى شكل ڤن المقابل:



١ اكتب بطريقة السرد المجموعة ب

٢ اكتب بطريقة السرد المجموعة أ

٣ ما المجموعة التى تحتوى على أعداد زوجية فقط؟

٤ ما المجموعة التى تحتوى على مضاعفات للعدد ٤؟

٥ **أوجد كلًّا من:** ل (أ) ، ل (ب) ، ل (أ ∩ ب) ، ل (أ ∪ ب)

---

٩ إذا كان ل (أ) = ٠,٢ ، ل (ب) = ٠,٧ ، أ ، ب حدثين متنافيين **فأوجد** ل (أ ∪ ب).

---

١٠ فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى،
إذا كان أ هو حدث الحصول على عدد زوجى ، ب هو حدث الحصول على عدد أولى،
فأوجد: ل (أ) ، ل (ب) ، ل (أ ∪ ب). (الشرقية ٢٠١٩)

---

١١ إذا كان أ ، ب حدثين فى فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان ل (أ) = ٠,٥ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٨ ،
ل (ب) = س ، فأوجد قيمة س إذا كان:

١ ل (أ ∩ ب) = ٠,١ ٢ أ ⊂ ب

---

١٢ فى تجربة عشوائية تم سحب بطاقة واحدة عشوائيًّا من عشر بطاقات متماثلة ومرقمة بالأرقام من ١ إلى ١٠، فإذا كان أ هو حدث أن تحمل البطاقة المسحوبة رقمًا زوجيًّا، ب هو حدث أن تحمل البطاقة المسحوبة رقمًا أوليًّا؛ فأجب عما يلى:

١ عبر عن كل من الحدثين أ ، ب كمجموعة جزئية من فضاء العينة. ٢ **أوجد** ل (أ) ، ل (ب).

٣ **أوجد** ل (أ ∩ ب) ، ل (أ ∪ ب).

١٣ فصل دراسى مكون من ٥٠ طالبًا، نجح منهم ٣٧ طالبًا فى اللغة الإنجليزية ، ٢٥ طالبًا فى الرياضيات، ١٨ طالبًا فى المادتين معًا، فإذا اختير طالب عشوائيًا، فأوجد احتمال أن يكون الطالب المختار:

١ ناجحًا فى اللغة الإنجليزية. ٢ ناجحًا فى الرياضيات.

٣ ناجحًا فى اللغة الإنجليزية أو الرياضيات.

---

١٤ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية، وكان ل (أ) = ٠,٨ ، ل (ب) = ٠,٧ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٦ فأوجد احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل. (الأقصر ٢٠٢٢)

---

١٥ صندوق يحتوى على ١٦ كرة متماثلة، منها ٩ كرات زرقاء، ٥ كرات حمراء، وبقية الكرات بيضاء، سُحبت كرة واحدة عشوائيًا من الصندوق، أوجد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة:

١ ليست زرقاء. ٢ حمراء أو زرقاء. ٣ بيضاء أو زرقاء.

---

١٦ صندوق به بطاقات متماثلة ومرقمة من ٢ إلى ٢١ ، سحبت منها بطاقة واحدة عشوائيًا، وبملاحظة العدد الذى تحمله البطاقة أوجد:

١ فضاء العينة.

٢ احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عددًا زوجيًا ويقبل القسمة على ٥

تفكير إبداعى TIMSS

١٧ سُحبت بطاقة عشوائيًا من بين ١٠٠ بطاقة متماثلة مرقمة من ١ إلى ١٠٠ ، أوجد:

١ احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عددًا مربعًا كاملًا.

٢ احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عددًا مكعبًا كاملًا.

٣ احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عددًا مربعًا كاملًا أو مكعبًا كاملًا.

٤ احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عددًا مربعًا كاملًا ومكعبًا كاملًا.

---

١٨ فصل دراسى به ٢٥ طالبًا، نجح منهم ١٥ طالبًا فى مادة العلوم، ونجح ١٧ طالبًا فى مادة الرياضيات ولم ينجح ٣ طلاب فى المادتين. فإذا اختير طالب عشوائيًا؛ فما احتمال أن يكون الطالب ناجحًا فى مادتى العلوم والرياضيات.

تدريبات الكتاب المدرسى

١ **ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة:**

١ اكتب فضاء العينة.

٢ اكتب الأحداث الآتية:

(أ) «أ» حدث الحصول على عدد زوجى. (ب) «ب» حدث الحصول على عدد فردى.

(جـ) «حـ» حدث الحصول على عدد أولى زوجى.

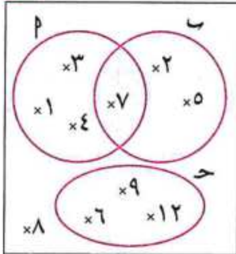
٣ **أوجد كلًّا من الاحتمالين الآتيين:**

(أ) وقوع الحدثين أ و ب معًا. (ب) وقوع الحدثين أ و حـ معًا.

---

٢ ١ **إذا كان أ ، ب حدثين فى فضاء العينة لتجربة عشوائية، فأكمل:** (الغربية ٢٠٢٢)

(أ)	(ب)	(جـ)
ل (أ) = ٠,٣	ل (أ) = ٠,٥٥	ل (أ) = ...
ل (ب) = ٠,٦	ل (ب) = $\frac{٣}{١٠}$	ل (ب) = $\frac{١}{٤}$
ل (أ ∩ ب) = ٠,٢	ل (أ ∩ ب) = ...	ل (أ ∩ ب) = صفر
ل (أ ∪ ب) = ...	ل (أ ∪ ب) = $\frac{١٣}{٢٠}$	ل (أ ∪ ب) = ٠,٩



٢ **باستخدام شكل ﭬن المقابل أوجد:**

(أ) ل (أ ∩ ب) ، ل (أ ∪ ب)

(ب) ل (أ ∩ حـ) ، ل (أ ∪ حـ)

(جـ) ل (ب ∩ حـ) ، ل (ب ∪ حـ)

---

٣ **إذا كان أ ، ب حدثين فى فضاء العينة لتجربة عشوائية، فأجب عن الآتى:**

١ ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = $\frac{٢}{٣}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٣}$ ، **أوجد** ل (أ ∪ ب) (الأقصر ٢٠٢٠)

٢ ل (أ) = $\frac{٣}{٨}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٥}{٨}$ ، **أوجد** ل (أ ∩ ب)

٣ ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٣}$ ، **أوجد** ل (أ ∪ ب) فى الحالتين الآتيتين: (الدقهلية ٢٠١٣)

(أ) ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٨}$ (ب) أ ، ب حدثان متنافيان

٤ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان ٲ ، ب حدثين متنافيين فإن ل (ٲ ∩ ب) تساوى .... (البحيرة ٢٠٢٤)

(ا) ∅ (ب) صفرًا (جـ) ٠,٥٦ (د) ١

٢ إذا كان ٲ ⊂ ب ، فإن ل (ٲ ∪ ب) تساوى .... (الإسماعيلية ٢٠٢٢)

(ا) صفرًا (ب) ل (ٲ) (جـ) ل (ب) (د) ل (ٲ ∩ ب)

٣ إذا ألقيت قطعة نقود منتظمة مرة واحدة فإن احتمال ظهور صورة أو كتابة يساوى ....٪

(ا) صفرًا (ب) ٢٥ (جـ) ٥٠ (د) ١٠٠

٤ إذا أُلقى حجر نرد منتظم مرة واحدة فإن احتمال ظهور عدد زوجى وظهور عدد فردى معًا يساوى ....

(ا) صفرًا (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) ١ (الإسكندرية ٢٠١٦)

---

٥ ١ صندوق يحتوى على ١٢ كرة؛ منها ٥ كرات زرقاء ، ٤ كرات حمراء، وباقى الكرات بيضاء، سحبت كرة واحدة عشوائيًا من الصندوق. أوجد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة:

(ا) زرقاء (ب) ليست حمراء (جـ) زرقاء أو حمراء

٢ كيس به ٢٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٠، سحبت منها بطاقة واحدة عشوائيًا.

أوجد احتمال أن يكون العدد المكتوب على البطاقة المسحوبة:

(ا) يقبل القسمة على ٥. (ب) فرديًا ويقبل القسمة على ٥

٣ إذا كان ٲ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان ل (ب) = $\frac{١}{١٢}$ ، ل (ٲ ∪ ب) = $\frac{١}{٣}$

فأوجد ل (ٲ) إذا كان:

(ا) ٲ ، ب حدثين متنافيين. (ب) ب ⊂ ٲ (كفر الشيخ ٢٠٢٤)

٤ سحبت بطاقة عشوائيًا من ٢٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٠.

احسب احتمال أن تكون البطاقة المختارة تحمل عددًا:

(ا) يقبل القسمة على ٣ (ب) يقبل القسمة على ٥

(جـ) يقبل القسمة على ٣ ويقبل القسمة على ٥

(د) يقبل القسمة على ٣ أويقبل القسمة على ٥

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا ألقيت قطعة نقود مرة واحدة فإن احتمال ظهور كتابة على الوجه العلوى = ... (بنى سويف ٢٠١٩)

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) ١

٢ إذا سحبت بطاقة عشوائيًا من بين ٢٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٠ فإن احتمال أن يكون الرقم المسحوب مضاعفًا للعدد ٧ هو .... ٪ (البحيرة ٢٠١٧)

(أ) ١٠ (ب) ١٥ (جـ) ٢٠ (د) ٢٥

٣ إذا كان ٩ ، ب حدثين متنافيين لتجربة عشوائية، وكان ل (٩) = $\frac{٣}{٥}$ ، ل (ب) = $\frac{٢}{٥}$ ، (القاهرة ٢٠١٨)

فإن ل (٩ ∩ ب) = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) ١ (د) ∅

٤ ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة فإذا كان الحدث ٩ هو حدث ظهور عدد أولى، والحدث ب هو حدث ظهور عدد فردى، فإن ل (٩ ∩ ب) = ... (الشرقية ٢٠١٥)

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) صفر (د) $\frac{٢}{٣}$

٥ احتمال الحدث المؤكد يساوى .... (الجيزة ٢٠١٨)

(أ) صفرًا (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) ١

٦ إذا كان: ٩ ، ب حدثين من فضاء عينة، وكان: ب ⊂ ٩ فإن ل (٩ ∪ ب) = ...

(أ) ل (ب) (ب) ل (٩) (جـ) ∅ (د) صفر

---

٢ أجب عن الأسئلة الآتية:

١ إذا كان ٩ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما، وكان ل (٩) = $\frac{١}{٤}$ ، ل (ب) = $\frac{٢}{٣}$ ، (الدقهلية ٢٠١٨)

فأوجد: ل (٩ ∪ ب) فى الحالتين الآتيتين:

(أ) ل (٩ ∩ ب) = $\frac{١}{٦}$ (ب) ٩ ⊂ ب

٢ مجموعة بطاقات مرقمة من ١ إلى ٢٠ خلطت جيدًا، فإذا سُحبت بطاقة واحدة عشوائيًا؛ (بورسعيد ٢٠١٩)

فاحسب احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عددًا:

(أ) مضاعفًا للعدد ٤ (ب) مضاعفًا للعدد ٥

(جـ) مضاعفًا للعدد ٤ أو مضاعفًا للعدد ٥



ذاكر الدرس ٢

فيديو الشرح

الحـدث المكمـل والفرق بين حدثين



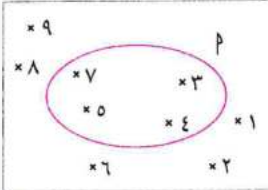
فكر وناقش:

في الشكـل المقـابل:

ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩}

أ = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧} ، ل (أ) = $\frac{٤}{٩}$

هل يمكـن إيجـاد احتمـال عدم وقـوع الحـدث أ ؟



أولًا الحدث المكمل

- إذا كان أ ⊂ ف فإن الحدث المكمل للحدث أ يرمز له بالرمز أَ

ويعني حدث عدم وقوع الحدث أ حيث:

أ ∪ أَ = ف ، أ ∩ أَ = ∅

ل (أ ∪ أَ) = ل (ف) = ١ ، ∴ ل (أ) + ل (أَ) = ١

ويكون ل (أَ) = ١ – ل (أ) ، ل (أ) = ١ – ل (أَ)

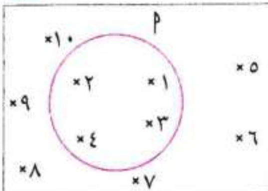
مثـال ١

بالاستعانة بشكل ڤن المقابل: إذا كانت ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠}، وكان الحدث أ ⊂ ف فأوجـد:

١ ن (ف) ٢ أ ، ن (أ) ٣ أَ ، ن (أَ)

٤ أ ∪ أَ ، ن (أ ∪ أَ) ٥ أ ∩ أَ ، ن (أ ∩ أَ)

٦ ل (أ) ، ل (أَ) ، ل (أ) + ل (أَ)



الحـل

١ ن (ف) = ١٠ ٢ أ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، ن (أ) = ٤

٣ أَ = {٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠} ، ن (أَ) = ٦

٤ أ ∪ أَ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠} = ف ، ن (أ ∪ أَ) = ١٠

٥ أ ∩ أَ = ∅ ، ن (أ ∩ أَ) = صفر

٦ ل (أ) = $\frac{٤}{١٠}$ ، ل (أَ) = $\frac{٦}{١٠}$ ، ∴ ل (أ) + ل (أَ) = $\frac{٤}{١٠}$ + $\frac{٦}{١٠}$ = $\frac{١٠}{١٠}$ = ١

مثـال ٢

إذا كان ف فضاء العينة لتجربة عشوائية ، ؟ ⊂ ف حيث:

ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧} ، ؟ = {٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧}، **فأوجد:** ل (؟َ)

الحـل

∵ ؟ = {٢ ،٣ ،٥ ،٧} ∴ ل (؟) = $\frac{٤}{٧}$ ،

∵ ل (؟َ) = ١ – ل (؟) ∴ ل (؟َ) = ١ – $\frac{٤}{٧}$ = $\frac{٣}{٧}$

حل آخر

∵ ؟َ = {١ ، ٤ ، ٦}

∴ ل (؟َ) = $\frac{ن (؟َ)}{ن (ف)}$ = $\frac{٣}{٧}$

مثـال ٣

إذا كان ؟ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما وكان:

ل (؟) = ٠,٨ ، ل (؟ ∩ ب) = ٠,٦ ، ل (؟ ∪ ب) = ٠,٩ ، **فأوجد:**

١ ل (؟َ) ٢ ل (بَ)

الحـل

١ ∵ ل (؟َ) = ١ – ل (؟) ∴ ل (؟َ) = ١ – ٠,٨ = ٠,٢

٢ ∵ ل (؟ ∪ ب) = ل (؟) + ل (ب) – ل (؟ ∩ ب)

∴ ٠,٩ = ٠,٨ + ل (ب) – ٠,٦

∴ ٠,٩ = ٠,٢ + ل (ب) ∴ ل (ب) = ٠,٧

، ∵ ل (بَ) = ١ – ل (ب) ∴ ل (بَ) = ١ – ٠,٧ = ٠,٣

س؟ سؤال ١

١ إذا كان ؟ ، ب حدثين متنافيين فى تجربة عشوائية وكان: ل (؟َ) = ٠,٦ ، ل (؟ ∪ ب) = ٠,٩ ، **فأوجـد** ل (ب)

٢ إذا كان ؟ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ما وكان:

ل (؟) = $\frac{١}{٦}$ ، ل (؟ ∩ ب) = $\frac{١}{١٨}$ ، ل (؟ ∪ ب) = $\frac{٤}{٩}$ ، **فأوجد:**

(ا) احتمال عدم وقوع الحدث ؟ (ب) ل (بَ)

مثـال ٤

إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان ل (أ) = ٠,٨ ، ل (ب) = ٠,٧ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٦ ، فأوجد:

١ احتمال عدم وقوع الحدثين أ ، ب معًا.
٢ احتمال عدم وقوع الحدث أ .
٣ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل.

الحـل

١ احتمال عدم وقوع الحدثين أ ، ب معًا = ل (أ ∩ ب)َ = ١ - ل (أ ∩ ب) = ١ - ٠,٦ = ٠,٤

٢ احتمال عدم وقوع الحدث أ = ل (أَ) = ١ - ل (أ) = ١ - ٠,٨ = ٠,٢

٣ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل = ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب)
= ٠,٨ + ٠,٧ - ٠,٦ = ٠,٩

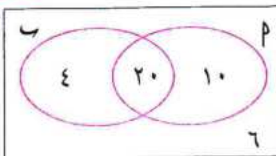
مثـال ٥

فصل دراسى به ٤٠ طالبًا ، نجح منهم ٣٠ طالبًا فى الرياضيات، ٢٤ طالبًا فى العلوم، ٢٠ طالبًا فى الامتحانين معًا، فإذا اختير طالب عشوائيًا، **فأوجد احتمال أن يكون الطالب المختار:**

١ ناجحًا فى الرياضيات.
٢ ناجحًا فى العلوم.
٣ راسبًا فى الرياضيات.
٤ ناجحًا فى الرياضيات أو العلوم.

الحـل

نفرض أن أ «حدث الطالب ناجح فى الرياضيات» ، ب «حدث الطالب ناجح فى العلوم»



١ ل (أ) = $\frac{ن(أ)}{ن(ف)} = \frac{٣٠}{٤٠} = \frac{٣}{٤}$

٢ ل (ب) = $\frac{ن(ب)}{ن(ف)} = \frac{٢٤}{٤٠} = \frac{٣}{٥}$

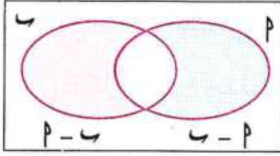
٣ ل (أَ) = $\frac{ن(أَ)}{ن(ف)} = \frac{٤ + ٦}{٤٠} = \frac{١٠}{٤٠} = \frac{١}{٤}$

أو ل (أَ) = ١ - ل (أ) = ١ - $\frac{٣}{٤} = \frac{١}{٤}$

٤ ل (أ ∪ ب) = $\frac{ن(أ ∪ ب)}{ن(ف)} = \frac{٣٤}{٤٠} = \frac{١٧}{٢٠}$

أو ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) - ل (أ ∩ ب) = $\frac{٣}{٤} + \frac{٣}{٥} - \frac{٢٠}{٤٠} = \frac{١٧}{٢٠}$

ثانيًا الفرق بين حدثين



- إذا كان ا ، ب حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية ما فإن:

(ا - ب): هو حدث وقوع ا وعدم وقوع ب أو «حدث وقوع ا فقط»

ويكون: ل(ا - ب) = $\frac{\text{ن}(ا - ب)}{\text{ن}(ف)}$

(ب - ا): هو حدث وقوع ب وعدم وقوع ا أو «حدث وقوع ب فقط»

ويكون: ل(ب - ا) = $\frac{\text{ن}(ب - ا)}{\text{ن}(ف)}$

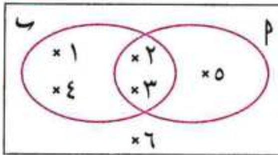
مثال ٦

فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة وملاحظة العدد الظاهر على الوجه العلوى،
فإذا كان ا هو حدث الحصول على عدد أولى، ب هو حدث الحصول على عدد أقل من ٥، **فأوجد:**

١ احتمال وقوع الحدث ا فقط.

٢ احتمال وقوع الحدث ب فقط.

الحل



ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

ا = {٢ ، ٣ ، ٥} ، ب = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}

١ حدث وقوع الحدث ا فقط = ا - ب = {٥}

∵ ن(ا - ب) = ١ ، ن(ف) = ٦

∴ احتمال وقوع الحدث ا فقط = ل(ا - ب) = $\frac{\text{ن}(ا - ب)}{\text{ن}(ف)} = \frac{١}{٦}$

٢ حدث وقوع الحدث ب فقط = ب - ا = {١ ، ٤}

∵ ن(ب - ا) = ٢ ، ن(ف) = ٦

∴ احتمال وقوع الحدث ب فقط = $\frac{\text{ن}(ب - ا)}{\text{ن}(ف)} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$



نقاط هامة

• في الشكل المقابل:

إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف فإن:

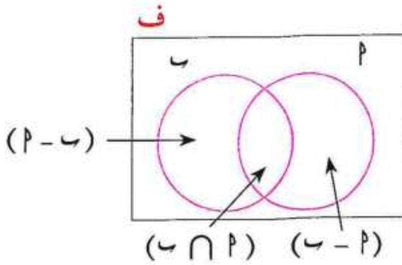
$$أ = (أ - ب) \cup (أ \cap ب)$$

∵ (أ − ب) ، (أ ∩ ب) حدثان متنافيان

∴ ل[(أ − ب) ∪ (أ ∩ ب)] = ل(أ)

∴ ل(أ − ب) + ل(أ ∩ ب) = ل(أ)

∴ ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب) ، وبالمثل: ل(ب − أ) = ل(ب) − ل(أ ∩ ب)



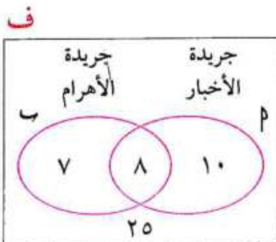
مثال ٧

فصل دراسي به ٥٠ تلميذًا، منهم ١٨ تلميذًا يقرءون جريدة الأخبار، ١٥ تلميذًا يقرءون جريدة الأهرام، ٨ تلاميذ يقرءون الجريدتين معًا. فإذا اختير تلميذ عشوائيًا من هذا الفصل، **فاحسب احتمال أن يكون التلميذ:**

١ يقرأ جريدة الأخبار.
٢ لا يقرأ جريدة الأخبار.
٣ يقرأ الجريدتين معًا.
٤ يقرأ جريدة الأهرام فقط.

الحل

نفرض أن أ «حدث يقرأ جريدة الأخبار» ، ب «حدث يقرأ جريدة الأهرام»



١ $ل(أ) = \frac{ن(أ)}{ن(ف)} = \frac{١٨}{٥٠} = \frac{٩}{٢٥}$

٢ $ل(\acute{أ}) = \frac{ن(\acute{أ})}{ن(ف)} = \frac{٧ + ٢٥}{٥٠} = \frac{٣٢}{٥٠} = \frac{١٦}{٢٥}$

أو $ل(\acute{أ}) = ١ - ل(أ) = ١ - \frac{٩}{٢٥} = \frac{١٦}{٢٥}$

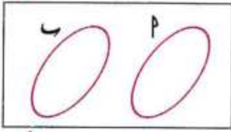
٣ $ل(أ \cap ب) = \frac{ن(أ \cap ب)}{ن(ف)} = \frac{٨}{٥٠} = \frac{٤}{٢٥}$

٤ $ل(ب - أ) = \frac{ن(ب - أ)}{ن(ف)} = \frac{٧}{٥٠}$

أو $ل(ب - أ) = ل(ب) - ل(أ \cap ب) = \frac{١٥}{٥٠} - \frac{٨}{٥٠} = \frac{٧}{٥٠}$

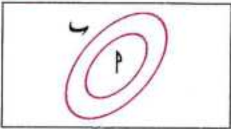


نقاط هامة



• إذا كان أ ، ب «حدثين متنافيين» من فضاء العينة ف ، فإن:

ل (أ − ب) = ل (أ) ، ل (ب − أ) = ل (ب)



• إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة، وكان أ ⊂ ب ، فإن:

أ − ب = ∅ ، ل (أ − ب) = ل (∅) = $\frac{ن(∅)}{ن(ف)}$ = صفر

مثـال ٨

إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان ل (أ ∪ ب) = ٠,٧ ،

ل (أ − ب) = ٠,٤ ، **فأوجد:**

١ ل (أ) ٢ ل (بَ)

٣ احتمال عدم وقوع الحدثين أ ، ب معًا. ٤ احتمال عدم وقوع أى من الحدثين أ أو ب.

الحـل

١ ∵ أ ، ب حدثان متنافيان ⟸ ل (أ − ب) = ل (أ) = ٠,٤

٢ ∵ أ ، ب حدثان متنافيان ⟸ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)

∴ ٠,٧ = ٠,٤ + ل (ب) ⟸ ل (ب) = ٠,٧ − ٠,٤ = ٠,٣

∴ ل (بَ) = ١ − ل (ب) = ١ − ٠,٣ = ٠,٧

٣ ∵ أ ، ب حدثان متنافيان ⟸ ل (أ ∩ ب) = صفر

∴ احتمال عدم وقوع أ ، ب معًا = ل (أ ∩ ب)$'$ = ١ − ل (أ ∩ ب) = ١ − ٠ = ١

٤ ل (أ ∪ ب)$'$ = ١ − ل (أ ∪ ب) = ١ − ٠,٧ = ٠,٣

سؤال ٢

إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية وكان:

ل (أ) = ٠,٥ ، ل (ب) = ٠,٤ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,١ ، **فأوجد:**

١ ل (أ ∪ ب) ٢ ل (أ − ب) ٣ ل (أ ∪ ب)$'$ ٤ ل (ب − أ)

مثال ٩

إذا كان س ، ص حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان ل (س) = ٠,٥ ، ل (ص) = ٠,٦ ، ل (س ∩ ص) = ٠,٤ فأوجد:

١ احتمال وقوع الحدث س وعدم وقوع الحدث ص

٢ احتمال وقوع الحدث ص وعدم وقوع الحدث س

٣ احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر.

٤ احتمال عدم وقوع أى من الحدثين.

الحل

١ ل (س − ص) = ل (س) − ل (س ∩ ص)

= ٠,٥ − ٠,٤ = ٠,١

٢ ل (ص − س) = ل (ص) − ل (س ∩ ص)

= ٠,٦ − ٠,٤ = ٠,٢

٣ احتمال وقوع أحد الحدثين دون الآخر = ل (س − ص) + ل (ص − س)

= ٠,١ + ٠,٢ = ٠,٣

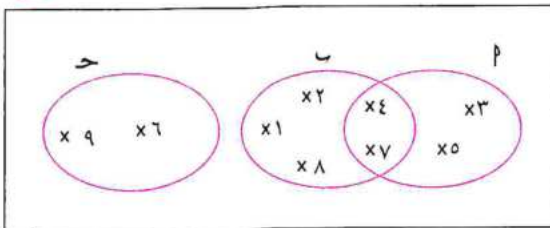
٤ ل (ص ∪ س)َ = ١ − ل (ص ∪ س)

= ١ − [ل (ص) + ل (س) − ل (ص ∩ س)]

= ١ − [٠,٦ + ٠,٥ − ٠,٤] = ٠,٣

سؤال ٣

استخدم الشكل المقابل لإيجاد:



١ ل (أ − ب)

٢ ل (حـ − أ)

٣ ل (ب − حـ)

٤ ل (ب − أ)



أسئلة الكتاب المدرسى · أسئلة موقع الــوزارة

تدريبات الأضـــواء

أولًا الحدث المكمل

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان أَ هى مكملة أ فإن ل (أَ ∪ أ) = ...

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) −١

٢ إذا كان أَ هو الحدث المكمل للحدث أ فى فضاء عينة لتجربة عشوائية فإن ل (أَ) + ل (أ) = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) صفر (الأقصر ٢٠١٧)

٣ إذا كان ل (أ) = ل (أَ) فإن ل (أ) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{1}{3}$ (الشرقية ٢٠١٣)

٤ إذا كان احتمال وقوع الحدث أَ هو ٧٥ ٪ فإن احتمال عدم وقوع الحدث أ = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{3}{4}$ (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{1}{4}$

٥ إذا كان احتمال نجاح حمدى ٩٥ ٪ فإن احتمال عدم نجاحه يساوى .... ٪

(أ) ٢٠ (ب) ١٠ (جـ) ٥ (د) صفرًا (أسوان ٢٠١٧)

٦ إذا كان ل (أ) = $\frac{1}{3}$ فإن ل (أَ) = ...

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{2}{3}$ (جـ) ١ (د) $\frac{1}{2}$ (أسيوط ٢٠١٧)

٧ إذا كان ف فضاء العينة لتجربة عشوائية ما، فإن ل (فَ)= ....

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) $\frac{1}{2}$ (د) −١ (دمياط ٢٠١٨)

٨ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين فى تجربة عشوائية، وكان ل (أَ) = ٠,٦ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٩ ،
فإن ل (ب) = ...

(أ) ٠,٥ (ب) ٠,٤ (جـ) ٠,٦ (د) ٠,٣

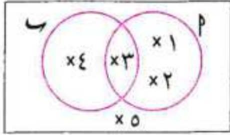
٩ إذا كان أ حدثًا من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما، وكان ل (أ) = ٤ ل (أَ)، فإن ل (أ) = ...

(أ) ٠,٨ (ب) ٠,٦ (جـ) ٠,٤ (د) ٠,٢ (كفر الشيخ ٢٠٢٤)

١٠ إذا كان أ ⊂ ف لتجربة عشوائية ما وكان ل (أ) + ل (أَ) = ٢ ك فإن ك = ...

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) ١ (جـ) $\frac{1}{3}$ (د) $\frac{1}{4}$ (الجيزة ٢٠١٩)

٢ في الشكل المقابل:



إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية ما **فأوجد:**

١ ل (أ ∪ ب) = ...

٢ ل (أ ∩ ب) = ...

٣ ل (أ َ) = ...

٤ ل (ب َ) = ...

---

٣ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ل (أ) = ٠,٧ ، ل (ب) = ٠,٦ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٤ ، فأوجد:

١ احتمال عدم وقوع الحدث أ . ٢ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل. (السويس ٢٠١٩)

---

٤ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ما، وكان: ل (أ) = $\frac{١}{٦}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{١٨}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٤}{٩}$ ، فأوجد:

١ احتمال عدم وقوع الحدث أ ٢ ل (ب َ)

---

٥ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان ل (أ) = ٠,٥ ، ل (ب َ) = ٠,٧ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,١ فأوجد:

١ ل (ب) ٢ ل (أ ∪ ب) َ

---

٦ حقيبة بها كرات ملونة ، ٤ زرقاء ، ٥ حمراء ، واحدة خضراء ، اثنتان سوداوان. بفرض أنه تم اختيار كرة عشوائيًا، فما احتمال أن تكون هذه الكرة...؟

١ سوداء ٢ زرقاء ٣ زرقاء أو خضراء

٤ ليست خضراء ٥ ليست بنفسجية

---

٧ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ما، وكان: ل (أ) = $\frac{٥}{٩}$ ، ل (ب) = $\frac{٢}{٩}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٩}$ ، فأوجد:

١ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل. ٢ احتمال عدم وقوع أى من الحدثين.

٣ احتمال وقوع أحد الحدثين دون وقوع الآخر.

ثانيًا الفرق بين حدثين

٨ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان $ {م} $ ، $ {ب} $ حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية فإن حدث وقوع $ {م} $ فقط هو ....

(أ) $ {م}' $ (ب) $ {م} - {ب} $ (جـ) $ {م} \cap {ب} $ (د) $ {م} \cup {ب} $ (المنيا ٢٠١٥)

٢ إذا كان $ {م} $ ، $ {ب} $ حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان $ {م} \subset {ب} $ ، $ {م} \neq {ب} $

فإن ل ($ {م} - {ب} $) = ...

(أ) صفر (ب) ل ($ {م} $) - ل ($ {ب} $)

(جـ) ل ($ {ب} $) - ل ($ {م} $) (د) ل ($ {م} $)

٣ إذا كان $ {م} $ ، $ {ب} $ حدثين متنافيين فإن ل ($ {م} - {ب} $) = ... (الإسماعيلية ٢٠١٧)

(أ) صفر (ب) ل ($ {م} $) (جـ) ل ($ {ب} $) (د) ل ($ {م} \cup {ب} $)

٤ إذا كان $ {م} $ ، $ {ب} $ حدثين فى فضاء العينة ف، وكان $ {م} \subset {ب} $ ، ل ($ {م} $) = ٠,٢ ، ل ($ {ب} $) = ٠,٦ ،

فإن ل ($ {ب} - {م} $) = ... (الأقصر ٢٠١٩)

(أ) ٠,٦ (ب) ٠,٢ (جـ) ٠,٨ (د) ٠,٤

٥ إذا كان $ {م} $ ، $ {ب} $ حدثين فى فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان ل ($ {م} $) = ٠,٧ ،

ل ($ {م} - {ب} $) = ٠,٥ ، فإن ل ($ {م} \cap {ب} $) = ... (الغربية ٢٠١٦)

(أ) ٠,٦ (ب) ٠,٤ (جـ) ٠,٣ (د) ٠,٢

٦ لأى حدثين حـ ، ء فى تجربة عشوائية يكون (حـ - ء) $ \cup $ (حـ $ \cap $ ء) = ...

(أ) ١ (ب) ف (جـ) ء (د) حـ (الدقهلية ٢٠١٤)

٧ إذا كان: ل ($ {م} $) = $ \frac{٢}{٣} $ ، ل ($ {ب} $) = $ \frac{١}{٢} $ ، ل ($ {م} \cup {ب} $) = $ \frac{٥}{٦} $ ، فإن ل ($ {م} \cap {ب} $) = ...

(أ) ١ (ب) $ \frac{١}{٣} $ (جـ) $ \frac{٢}{٣} $ (د) $ \frac{١}{٦} $

---

٩ إذا كان $ {م} $ ، $ {ب} $ حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما، وكان ل ($ {م} $) = ٠,٥ ، ل ($ {ب} $) = ٠,٦ ،

ل ($ {م} \cup {ب} $) = ٠,٩ ، فأوجد:

١ ل ($ {م} \cap {ب} $) ٢ ل ($ {م} - {ب} $) (قنا ٢٠١٦)

١٠ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية، وكان: ل (أ) = $\frac{١}{٥}$ ، ل (ب) = $\frac{٣}{٥}$ ،

ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{١٠}$ فأوجد:

١ ل (أَ) ٢ ل (بَ) ٣ ل (أ ∪ ب)

٤ ل (أ − ب) ٥ ل (ب − أ)

١١ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة ف لتجربة عشوائية حيث ل (أ) = ٠,٥ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٨ ،

ل (أ ∩ ب) = ٠,١ فأوجد:

١ ل (ب) ٢ ل (أ − ب)

١٢ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة ف لتجربة عشوائية، وكان ل (أ) = $\frac{١}{٤}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٢}$ ،

ل (أ ∪ ب) = $\frac{٥}{٨}$ فأوجد: (المنوفية ٢٠١٩)

١ ل (أ ∩ ب) ٢ ل (ب − أ) ٣ ل (أ ∪ ب)َ

١٣ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة ف لتجربة عشوائية، حيث ل (أ) = ٠,٧ ، ل (ب − أ) = ٠,٢ ،

فأوجد:

١ ل (أ ∪ ب) ٢ ل (ب − أ)َ

١٤ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة ف لتجربة عشوائية، وكان: ل (أَ) = ٠,٦ ، ل (بَ) = ٠,٧ ،

وكان ل (أ ∩ ب)َ = ٠,٩ فأوجد:

١ ل (أ − ب) ٢ ل (ب − أ)

١٥ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية، وكان ل (أ − ب) = $\frac{١}{٢}$ ،

ل (أ ∪ ب) = $\frac{٣}{٥}$ فأوجد:

١ ل (أ) ٢ ل (بَ)

٣ احتمال عدم وقوع الحدثين أ ، ب معًا.

١٦ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما،

وكان: أ ⊂ ب ، ل (أ) = ٠,٦ ، ل (بَ) = ٠,٣ فأوجد:

١ ل (ب − أ) ٢ ل (أ − ب)

١٧ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة ف لتجربة عشوائية، وكان: ل (أ) = ل (أَ) ،

ل (أ ∩ ب) = $\frac{1}{16}$ ، ل (ب) = $\frac{5}{8}$ ل (أ) فأوجد:

١ ل (ب) ٢ ل (أ ∪ ب) ٣ ل (أ − ب) (الفيوم ٢٠١٩)

---

١٨ فصل دراسى به ٤٠ طالبًا، نجح منهم ٣٠ طالبًا فى الرياضيات، ٢٤ طالبًا فى العلوم، ٢٠ طالبًا فى الامتحانين معًا. فإذا اختير طالب عشوائيًا، فأوجد احتمال أن يكون الطالب المختار: (الأقصر ٢٠١٩)

١ ناجحًا فى الرياضيات. ٢ ناجحًا فى العلوم فقط.

٣ ناجحًا فى أحد الامتحانين على الأقل. ٤ ناجحًا فى أحد الامتحانين دون الآخر.

---

١٩ صندوق به ١٢ كرة متماثلة مرقمة من ١ إلى ١٢ ، سحبت كرة عشوائيًا من الصندوق ،

فإذا كان أ هو حدث الحصول على عدد فردى، ب هو حدث الحصول على عدد أولى ، فأوجد:

١ ل (أ ∪ ب) ٢ ل (أ − ب)

٣ ل (ب) ٤ ل (أَ) ٥ ل (أ)

تفكير إبداعى TIMSS

٢٠ يصوب جنديان نحو هدف ما، فإذا كان احتمال أن يصيب الجندى الأول الهدف هو $\frac{1}{2}$ ،
واحتمال أن يصيب الجندى الثانى الهدف هو $\frac{1}{3}$ ، واحتمال أن يصيب الاثنان معًا الهدف هو $\frac{1}{6}$
فأوجد احتمال إصابة الهدف من أحدهما على الأكثر.

---

٢١ إذا كان أ ، ب حدثين فى فضاء عينة ف لتجربة عشوائية وكان ل (أ) = $\frac{2}{3}$ ، ل (ب) = $\frac{1}{2}$ ،

ل (أ ∩ ب) = $\frac{1}{6}$ فأوجد:

١ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل. ٢ ل (أ − ب)

---

٢٢ إذا كان أ ، ب حدثين فى فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان ل (أ) = ل (ب) = ٣ ل (أ ∩ ب)

، ل (أ ∪ ب) = ٠,٧٥ فأوجد:

(أ) ل (أ ∩ ب) (ب) ل (أ) (جـ) ل (بَ)

---

٢٣ فى تجربة رمى حجرى نرد متماثلين وكان الحدث الأول هو: «مجموع العددين الظاهرين يساوى ٤»،
والحدث الثانى هو: «كلا النردين يُظهران نفس الرقم» أثبت أن: الحدثين غير متنافيين.

تدريبات الكتاب المدرسى

١ مجموعة بطاقات مرقمة من ١ إلى ٣٠ خُلطت جيدًا، فإذا سحبت منها بطاقة واحدة عشوائيًا، فاحسب احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل:

(ا) عددًا مضاعفًا للعدد ٦ (ب) عددًا مضاعفًا للعدد ٨

(جـ) عددًا مضاعفًا للعدد ٦ ومضاعفًا للعدد ٨ (د) عددًا مضاعفًا للعدد ٦ أو عددًا مضاعفًا للعدد ٨

٢ إذا كان ا ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة ف لتجربة عشوائية بحيث كان احتمال وقوع الحدث ب يساوى ثلاثة أمثال وقوع الحدث ا ، واحتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل يساوى ٠,٦٤ ، فأوجد كلًا من احتمال وقوع الحدث ا واحتمال وقوع الحدث ب.

٣ إذا كان ا ، ب حدثين من فضاء عينة ف لتجربة عشوائية وكان ل (ا) = ٠,٥ ، ل (ا $\cup$ ب) = ٠,٨ ، ل (ب) = س، فأوجد قيمة س إذا كان: (ا) الحدثان ا ، ب متنافيين.(ب) ل (ا $\cap$ ب) = ٠,١

٤ حجر نرد غير منتظم، احتمال ظهور كل من الأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ متساوٍ، واحتمال ظهور العدد ٦ يساوى ٣ مرات احتمال ظهور العدد ١ ، فإذا ألقى هذا الحجر مرة واحدة، فاحسب احتمال:

(ا) ظهور العدد ٦ (ب) ظهور عدد فردى أولى.

٥ اشترك ثلاثة لاعبين ا ، ب ، حـ فى مسابقة لرفع الأثقال، فإذا كان احتمال فوز اللاعب ا يساوى ضعف احتمال فوز اللاعب ب، واحتمال فوز اللاعب ب يساوى احتمال فوز اللاعب حـ، فأوجد احتمال فوز اللاعب ب أو اللاعب حـ، علمًا بأن لاعبًا واحدًا سيفوز فى المسابقة.

٦ ف فضاء عينة لتجربة عشوائية جميع نواتجها متساوية الإمكانات، وكان ا ، ب حدثين من ف، فإذا كان عدد النواتج التى تؤدى إلى وقوع الحدث ا يساوى ١٣ ، وعدد جميع النواتج الممكنة للتجربة العشوائية يساوى ٢٤ ، وكان ل (ا $\cup$ ب) = $\frac{٥}{٦}$ ، ل (ب) = $\frac{٥}{١٢}$ ، فأوجد:

(ا) احتمال وقوع الحدث ا . (ب) احتمال وقوع الحدثين ا ، ب معًا.

٧ اشترك ٤٥ تلميذًا فى إحدى المدارس فى الأنشطة الرياضية، منهم ٢٧ تلميذًا فى فريق كرة القدم، ١٥ تلميذًا فى فريق كرة السلة، ٩ تلاميذ فى كرة القدم وكرة السلة، اختير تلميذ من هذه المدرسة عشوائيًا. مثِّل ذلك بشكل ڤن، ثم أوجد احتمال أن يكون التلميذ المختار:

(ا) مشتركًا فى فريق كرة القدم. (ب) مشتركًا فى فريق كرة السلة.

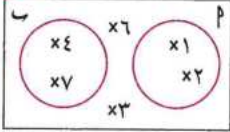
(جـ) مشتركًا فى فريق كرة القدم وفريق كرة السلة. (د) غير مشترك فى أى من الفرق السابقة.

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان أ ⊂ ف لتجربة عشوائية وكان ل (أ) = ٣ ل (أ)´ فإن ل (أ) = ... (الفيوم ٢٠٢٢)

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

٢ فى شكل ڤن المقابل:



إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية فإن ل (ب - أ) = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{٥}{٧}$

(جـ) $\frac{٣}{٧}$ (د) $\frac{٢}{٧}$ (كفر الشيخ ٢٠١٩)

٣ إذا كان أ ⊂ ف لتجربة عشوائية وكان ل (أ) = ٠,٤ فإن ل (أ´) = ... (المنوفية ٢٠٢٢)

(أ) صفر (ب) ٠,٥ (جـ) ٠,٦ (د) ١

٤ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ل (أ) = ٠,٧ ، وكان ل (أ ∩ ب) = ٠,٥ ، فإن ل (أ - ب) = ... (أسيوط ٢٠٢٢)

(أ) ٠,٦ (ب) ٠,٤ (جـ) ٠,٣ (د) ٠,٢

٥ إذا كان احتمال عدم وقوع الحدث أ´ هو ٩٥٪ فإن احتمال وقوع الحدث (أ - أ´) = ... (الغربية ٢٠٢١)

(أ) ٠,٥ (ب) صفر (جـ) ٠,٠٥ (د) ٠,٩٥

٦ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان أ ⊂ ب ، فأى العبارات الآتية تكون خطأ؟...

(أ) ل (أ ∪ ب) = ل (ب) (ب) ل (أ ∩ ب) = ل (أ) (الشرقية ٢٠١٩)

(جـ) ل (أ - ب) = صفر (د) ل (ب - أ) = ل (ب)

---

٢ أجب عما يأتى:

١ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ل (أ) = ٠,٦ ، ل (ب) = ٠,٧ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٤ ، **فأوجد:**

(أ) ل (أ - ب) (ب) احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل (الدقهلية ٢٠٢٢)

٢ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين فى تجربة عشوائية ما، وكان ل (أ´) = ٠,٥ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٨ ،

فأوجد مع توضيح خطوات الحل:

(أ) ل (أ ∩ ب) (ب) ل (أ) (جـ) ل (ب) (القاهرة ٢٠٢٢)

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة، وكان الحدث ٲ هو «ظهور عدد أولى» والحدث ب هو «ظهور عدد فردى» فإن: ل (ٲ ∩ ب) = ...

(١) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

٢ احتمال الحدث المستحيل = ... (القاهرة ٢٠٢١)

(١) ١ (ب) صفر (جـ) ٠,٥ (د) ١٠٠٪

٣ إذا كان ٲ ، ب حدثين من فضاء النواتج ف وكان ٲ ⊃ ب فإن: ل (ٲ − ب) = ... (الجيزة ٢٠٢٤)

(١) ل (ٲ) (ب) ل (ب) (جـ) ∅ (د) صفر

٤ إذا كان ل (ٲ) = ٤ ل (ٲَ) فإن: ل (ٲ) = ...

(١) ٠,٨ (ب) ٠,٦ (جـ) ٠,٤ (د) ٠,٢

٥ إذا كان ٲ ، ب حدثين متنافيين فإن ٲ ∩ ب = ... (الجيزة ٢٠٢١)

(١) صفر (ب) ∅ (جـ) ١ (د) ف

٦ إذا كان ل (ٲ) = ٠,٤ ، ل (ب) = ٠,٦ ، ل (ٲ ∩ ب) = ٠,٣ ، فإن: ل (ٲ ∪ ب) = ...

(١) ٠,٨ (ب) ٠,٦٢ (جـ) ٠,٥ (د) ٠,٧

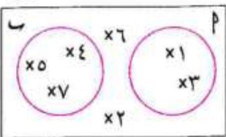
٧ إذا كان ٲ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية وكان ل (ٲ) = $\frac{٣}{٨}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ٲ ∪ ب) = $\frac{٥}{٨}$ ، فإن: ل (ٲ ∩ ب) = ... (بورسعيد ٢٠٢٤)

(١) صفر (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

٨ إذا كان ٲَ هو الحدث المكمل للحدث ٲ ، فإن: ٲَ ∪ ٲ = ... (الفيوم ٢٠٢٤)

(١) ٠,٥ (ب) ١ (جـ) ∅ (د) ف

٩ فى الشكل المقابل: إذا كان ٲ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية فإن: ل (ب − ٲ) = ...



(١) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٥}{٧}$

(جـ) $\frac{٢}{٧}$ (د) $\frac{٣}{٧}$

(كفر الشيخ ٢٠٢٤)

٢ أجب عما يأتى:

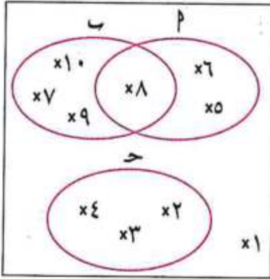
١ صنـــدوق يحتوى على ١٢ كرة متماثلة، منها ٥ كـــرات زرقاء، و ٤ كرات حمراء، وباقى الكرات بيضاء، سحبت كرة واحدة عشوائيًا من الصندوق. أوجد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة:

(ا) زرقاء (ب) ليست حمراء (جـ) زرقاء أو حمراء

٢ إذا كان ٲ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان ل (ٲ) =٧ , ٠ ، ل (ٲ - ب)= ٥ , ٠ ، **فأوجد:** ل (ٲ ∩ ب) (الإسكندرية ٢٠٢١)

٣ إذا كان ٲ ، ب حدثيـــن مـــن فضاء عينـــة لتجربة عشـــوائية، وكان ل (ٲ) =٣ , ٠ ، ل (ب) = ٦ , ٠ ، ل (ٲ ∩ ب) = ٢ , ٠، **فأوجد:** (الشرقية ٢٠٢١)

(ا) ل (ٲ ∪ ب) (ب) ل (ٲ ∩ ب)/ (جـ) ل (ٲ - ب)



٤ باستخدام شكل فن المقابل **أوجد:**

(ا) ن (ف)

(ب) ل (حـ - ب)

(جـ) ل (ٲ ∩ حـ)/

٥ إذا كان ٲ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائيةٍ وكان ل (ٲ) = ل (ٲ/)، ل (ٲ ∩ ب) = $\frac{١}{١٦}$ ، ل (ب) = $\frac{٥}{٨}$ ل (ٲ) **فأوجد:**

(ا) ل (ب) (ب) ل (ٲ ∪ ب) (جـ) ل (ٲ - ب)

٦ فصل دراســى به ٤٠ طالبًا نجح منهم ٣٠ طالبًا فى الرياضيـــات، و ٢٤ طالبًا فى العلوم، و ٢٠ طالبًا فى الامتحانيين معًا، اختير طالب عشوائـيًا. (الأقصر ٢٠١٩)

أوجد: احتمال أن يكون الطالب المختار:

(ا) ناجحًا فى الرياضيات. (ب) ناجحًا فى العلوم. (جـ) ناجحًا فى أحدهما على الأقل.

٧ إذا كان ٲ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ل (ٲ) = $\frac{١}{٢}$ ، ٢ ل (ب) = ل (بَ)

فأوجد: ل (ٲ ∪ ب) فى الحالتين الآتيتين: (كفر الشيخ ٢٠١٩)

(ا) ل (ٲ ∩ ب) = $\frac{١}{٦}$ (ب) ٲ ، ب حدثين متنافيين.

١ أكمل مكان النقط:

١ إذا كان احتمال وقوع الحدث ؟ هو ٦٥٪ فإن احتمال عدم وقوعه يساوى ....

٢ إذا كان ل (؟) = ل (؟َ) ، فإن: ل (؟) = ...

٣ إذا كان ؟ ، ب حدثين متنافيين وكان: ل (؟) = $\frac{١}{٣}$ ، ل (؟ ∪ ب) = $\frac{٧}{١٢}$ فإن: ل (ب) = ...

٤ إذا كان ؟ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ل (؟) = ٠,٧ ، ل: (؟ − ب) = ٠,٥ ،
فإن: ل (؟ ∩ ب) = ...

٢ صندوق به ٢٠ كرة لها نفس الشكل والحجم والوزن، ومخلوطة جيدًا ، منها ٨ كرات حمراء ، ٧ كرات بيضاء، وباقى الكرات خضراء، سحبت كرة واحدة عشوائيًا. أوجد احتمال أن تكون الكرة المسحوبة:

١ حمراء　　　٢ بيضاء أو خضراء　　　٣ ليست بيضاء

٣ كيس به ٣٠ بطاقة متماثلة مخلوطة جيدًا ومرقمة من ١ إلى ٣٠، سحبت بطاقة واحدة عشوائيًا من الكيس، أوجد احتمال أن يكون العدد المكتوب على البطاقة المسحوبة:

١ يقبل القسمة على ٣

٢ يقبل القسمة على ٥

٣ يقبل القسمة على ٣ و ٥

٤ يقبل القسمة على ٣ أو ٥

٤ إذا كان ؟ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان ل (؟) = ٠,٨ ، ل (ب) = ٠,٧ ، ل (؟ ∩ ب) = ٠,٦ فأوجد:

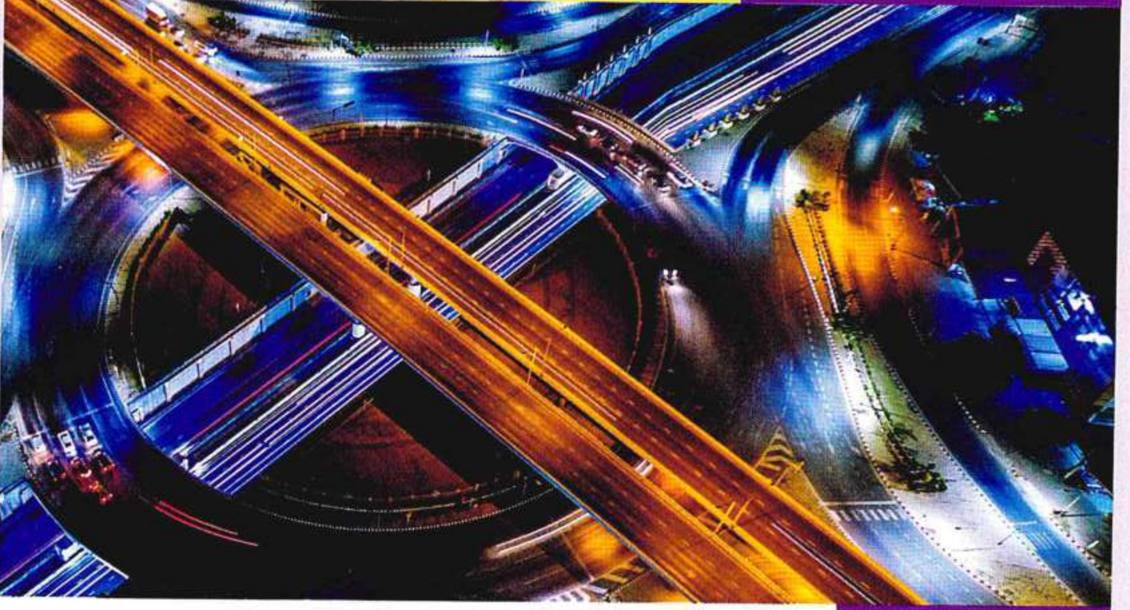
١ احتمال عدم وقوع الحدث ؟ .

٢ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل.

الوحدة الرابعة



الدائـــرة



أهداف دروس الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون الطالب قادرًا على أن:

الـــدرس الأول: تعاريف ومفاهيم أساسية

- يتعرف الدائرة ومفاهيم أساسية عليها.
- يتعرف محور تماثل الدائرة وبعض النتائج الخاصة به.

الـدرس الثانى: أوضاع نقطة ومستقيم ودائرة بالنسبة لدائرة

- يحدد موضع نقطة ومستقيم بالنسبة لدائرة، وموضع دائرة بالنسبة لدائرة أخرى.
- يحدد العلاقة بين المماس لدائرة ونصف قطر الدائرة المرسوم من نقطة التماس.
- يحدد العلاقة بين خط المركزين لدائرتين متماستين، المماس المشترك عند نقطة التماس.
- يحدد العلاقة بين خط المركزين لدائرتين متقاطعتين، والوتر المشترك للدائرتين

الـــدرس الثالث: تعيين الدائرة

- يرسم دائرة بمعلومية مركزها وطول نصف قطرها.
- يرسم دائرة تمر بنقطة معلومة.
- يرسم دائرة تمر بثلاث نقاط معلومة ليست على استقامة واحدة.

الـــدرس الرابع: علاقة أوتار الدائرة بمركزها

- يحدد العلاقة بين أوتار الدائرة ومركزها.

تعاريف ومفاهيم أساسية



فكر وناقش



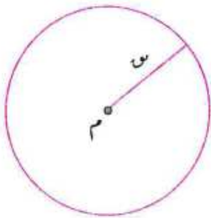
عند تثبيت سن الفرجار فى نقطة ثابتة وتحريك القلم دورة كاملة ليرسم خطًا منحنيًا، **نلاحظ أن:**

- الخط المنحنى المغلق يسمى **دائـرة**
- النقطة الثابتة تسمى **مركز الدائرة** ويرمز لها بالرمز **م**

- **كيف يمكن رسم دائرة طول نصف قطرها ٥سم ؟**
- **وكيف يمكن حساب محيط ومساحة هذه الدائرة ؟**

أولًا مفاهيم أساسيـة عن الدائـرة:

الدائـرة

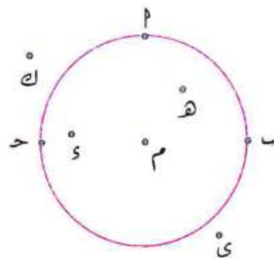


هى مجموعة نقط المستوى التى تبعد بعدًا ثابتًا عن نقطة ثابتة فى المستوى.

النقطة الثابتة تسمى **مركز الدائرة**

- البعـد الثابت يسمى **طول نصف قطر الدائـرة (نق)**
- نرمز للدائرة عادة بمركزها، **فنقول:** الدائرة **م** أى: الدائرة التى مركزها النقطة **م**

تجزئة المستوى بالدائرة

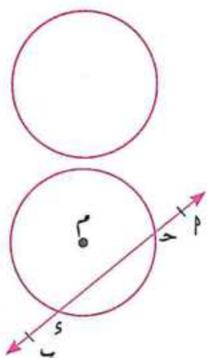


فى الشكل المقابل:

نجد أن الدائرة م تقسِّم نقاط المستوى إلى ثلاث مجموعات من النقط:

- مجموعة النقط داخل الدائرة **مثل:** {هـ ، م ، ء}
- مجموعـة النقط على الدائرة **مثل:** {أ ، ب ، حـ}
- مجموعة النقط خارج الدائرة **مثل:** {ى ، ك}

- **سطح الدائـرة:**



هو مجموعة نقط الدائرة ∪ مجموعة النقاط داخل الدائرة.

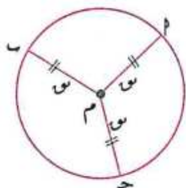
وعلى ذلك فإن: سطح الدائرة يختلف عن الدائرة.

فمثلاً: في الشكل المقابل: $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ∩ الدائرة م = {حـ ، ء}

$\overleftrightarrow{\text{أب}}$ ∩ سطح الدائرة م = $\overline{\text{حـء}}$

أي أن: م ∉ الدائرة م بينما م ∈ سطح الدائرة م

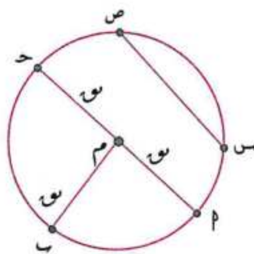
- **نصف قطر الدائـرة:**



هو القطعة المستقيمة التي طرفاها مركز الدائرة وأي نقطة على الدائرة.

مثل: $\overline{\text{مأ}}$ ، $\overline{\text{مب}}$ ، $\overline{\text{محـ}}$ حيث: مأ = مب = محـ = نق

- **وتـر الدائـرة:**



هو القطعة المستقيمة التي طرفاها (نهايتاها) أي نقطتين على الدائرة.

مثل: $\overline{\text{سص}}$ ، $\overline{\text{أحـ}}$

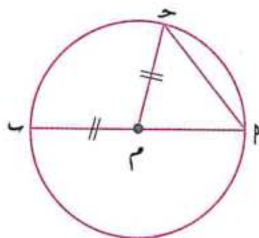
- **قطر الدائـرة:**

هو وتر في الدائرة يمر بمركزها.

مثل: $\overline{\text{أحـ}}$ • طول أي قطر في الدائرة = ٢نق

نقاط هامة

- الدائرة الواحدة لها **عدد لانهائي** من أنصاف الأقطار، وجميعها متساوية في الطول، وطول كل منها (**نق**).
- الدائرة الواحدة لها **عدد لانهائي** من الأقطار، وجميعها متساوية في الطول، وطول كل منها (**٢نق**).
- تتطابق الدائرتان إذا تساوى طولا نصفي قطريهما، والعكس صحيح.
- **قطر الدائرة هو أكبر الأوتار طولاً في الدائرة.**



لأن: في الشكل المقابل: △ أمحـ فيه: أم + محـ > أحـ (متباينة المثلث)

∵ محـ = مب (أنصاف أقطار)

∴ أم + مب > أحـ ∴ أب > أحـ

∴ طول القطر $\overline{\text{أب}}$ أكبر من طول الوتر $\overline{\text{أحـ}}$

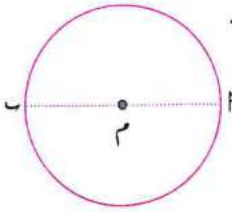
محيط الدائرة ومساحة الدائرة:

• **محيط الدائرة** = ٢ π نق

حيث π هى النسبة التقريبية لأى دائرة، وتعبر عن النسبة بين محيط الدائرة وطول قطرها.

π تساوى تقريبًا $\frac{٢٢}{٧}$ **أو** π تساوى تقريبًا ٣,١٤

، نق هو طول نصف قطر الدائرة

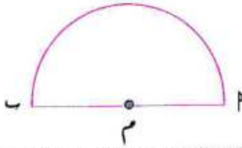


• **نصف محيط الدائرة** = π نق • **مساحة الدائرة** = π نق^{٢}

لاحظ أن

محيط الشكل المقابل = نصف محيط الدائرة + طول القطر $\overline{ٯب}$

= π نق + ٢ نق



مثال ١

أوجد بدلالة π محيط ومساحة الدائرة التى طول قطرها ١٤سم

الحل

∵ طول القطر = ١٤سم ∴ ٢ نق = ١٤ ∴ نق = ٧ سم

∴ محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ π (٧) = ١٤ π سم ،

، مساحة الدائرة = π نق^{٢} = π (٧)^{٢} = ٤٩ π سم^{٢}

مثال ٢

فى نظام إحداثى متعامد أوجد مساحة الدائرة التى مركزها م (٤ ، ٧) وتمر بالنقطة ٯ (١ ، ٣) بدلالة π

الحل

∵ ٯ ∈ الدائرة م ∴ نق = مٯ

∴ نق = $\sqrt{(٤-١)^{٢} + (٧-٣)^{٢}}$ = ٥ وحدات طول

∴ مساحة الدائرة = π نق^{٢} = π (٥)^{٢} = ٢٥π وحدة مساحة

تذكر أن

البعد بين نقطتين = $\sqrt{\text{(فرق السينات)}^{٢} + \text{(فرق الصادات)}^{٢}}$

سؤال ١

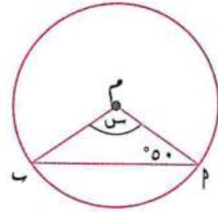
فى نظام إحداثى متعامد: دائرة مركزها م (-٣ ، ٠) وتمر بالنقطة ٯ (٠ ، ٤) **أوجد بدلالة π** :

① مساحة الدائرة م ② محيط الدائرة م

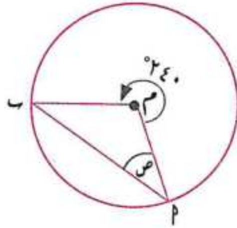
مثال ٣

أوجد قيمة الرمز أو الرموز المجهولة بالدرجات فى كل شكل من الأشكال الآتيـة:

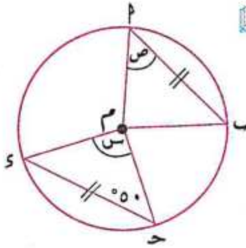
١



٢



٣



الحـل

١

∵ م أ = م ب (أنصاف أقطار)

∴ ق (∠ ب) = ق (∠ أ) = ٥٠°

∴ س = ١٨٠° − (٥٠° + ٥٠°)

= ٨٠°

٢

∵ ق (∠ أ م ب) المنعكسة

= ٢٤٠°

∴ ق (∠ أ م ب) = ٣٦٠° − ٢٤٠°

= ١٢٠°

∵ م أ = م ب (أنصاف أقطار)

∴ ق (∠ أ) = ق (∠ ب)

∴ ص = (١٨٠° − ١٢٠°) / ٢ = ٣٠°

٣

ΔΔ م أ ب ، م حـ ء

فيهما:
- أ ب = حـ ء
- م أ = م حـ = نق
- م ب = م ء = نق

∴ Δ م أ ب ≡ Δ م حـ ء

∴ ق (∠ أ) = ق (∠ حـ) = ٥٠°

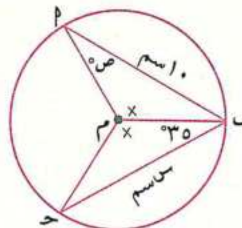
∴ ص = ٥٠°

، س = ١٨٠° − (٥٠° + ٥٠°) = ٨٠°

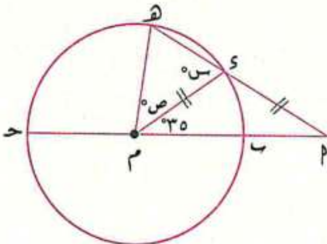
سؤال ٢

فى كل من الشكلين الآتيين م هى مركز الدائرة ، أوجد قيم الرموز المستخدمة فى القياس:

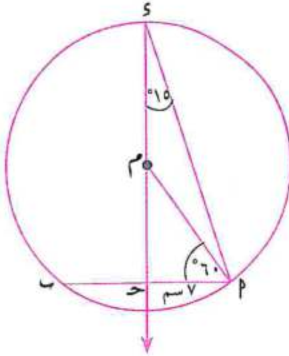
١



٢



مثال ٤



فى الشكل المقابل: دائرة مركزها م

إذا كان: ق (∠ أ ء م) = ١٥° ، ق (∠ م أ حـ) = ٦٠° ،

أ حـ = ٧ سم

فاحسب مساحة الدائرة م (π تساوى تقريبًا $\frac{٢٢}{٧}$)

الحل

∵ م أ = م ء = نق

∴ ق (∠ ء أ م) = ق (∠ ء) = ١٥°

∵ (∠ أ م حـ) خارجة عن المثلث أ م ء

∴ ق (∠ أ م حـ) = ق (∠ ء) + ق (∠ ء أ م)

= ١٥° + ١٥° = ٣٠°

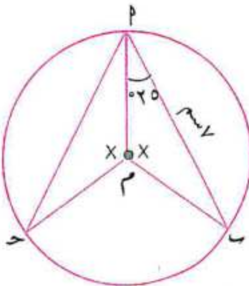
∵ ق (∠ م أ حـ) = ٦٠° ∴ ق (∠ أ حـ م) = ١٨٠° − (٦٠° + ٣٠°) = ٩٠°

∵ طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° فى المثلث القائم الزاوية = $\frac{١}{٢}$ طول الوتر

∴ أ م = ٢ أ حـ = ٢ × ٧ = ١٤ سم ∴ نق = ١٤سم

∴ مساحة الدائرة م = π نق^{٢} ≃ $\frac{٢٢}{٧}$ × (١٤)^{٢} ≃ ٦١٦سم^{٢}

س؟ سؤال ٣



فى الشكل المقابل: دائرة مركزها م

إذا كان: أ ب = ٧ سم ، ق (∠ ب أ م) = ٢٥° ،

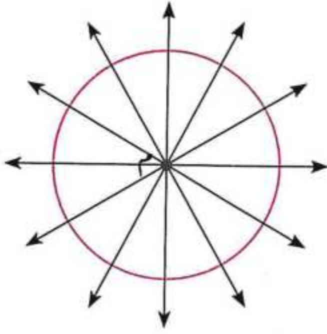
ق (∠ أ م ب) = ق (∠ أ م حـ)

فأوجد: طول $\overline{أ حـ}$ ، ق (∠ ب م حـ)

تعريـف

محور التماثل فى الدائرة:

هو أى مستقيم يمر بمركز الدائرة.

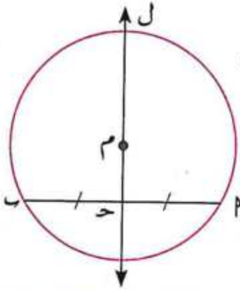


- الدائرة لها **عدد لا نهائى** من محاور التماثل.

ثانيًا نتائج هامة على الدائرة:

نتيجة ١

المستقيم المار بمركز الدائرة وبمنتصف أى وتر فيها يكون **عموديًا على هذا الوتر.**



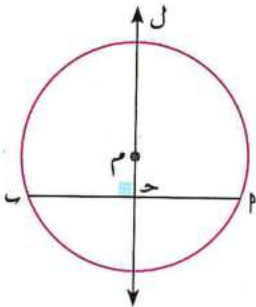
فمثلًا: فى الشكل المقابل:

إذا كان : المستقيم ل يمر بمركز الدائرة م ، حـ منتصف الوتر $\overline{أب}$

فـإن : المستقيم ل $\perp$ $\overline{أب}$

نتيجة ٢ **«عكس نتيجة (١)»**

المستقيم المار بمركز الدائرة عموديًا على أى وتر فيها **ينصف هذا الوتر.**



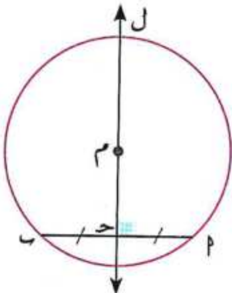
فمثلًا: فى الشكل المقابل:

إذا كان: المستقيم ل يمر بمركز الدائرة م ، ل $\perp$ $\overline{أب}$

فـإن : حـ منتصف $\overline{أب}$

نتيجة ٣

المستقيم العمودى على أى وتر فى الدائرة من منتصفه **يمر بمركز الدائرة.**



فمثلًا: فى الشكل المقابل:

إذا كان: المستقيم ل $\perp$ $\overline{أب}$ ، حـ منتصف $\overline{أب}$

فـإن : المستقيم ل يمر بمركز الدائرة م

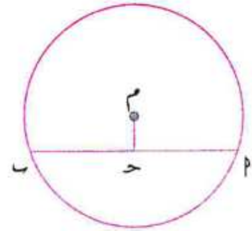
مثال ٥

فى كل شكل من الأشكال الآتية دائرة مركزها م :

١ إذا كان: $\overline{أ ب}$ = ١٢ سم

، $\overline{م حـ} \perp \overline{أ ب}$

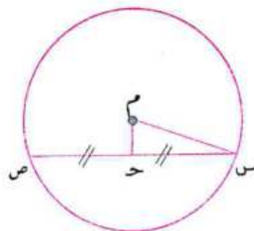
فأوجد: أ حـ



٢ إذا كان: ق (∠ س) = ٤٠°

، حـ منتصف $\overline{س ص}$

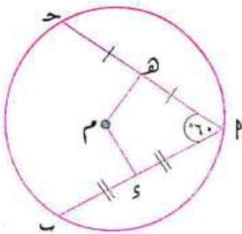
فأوجد: ق (∠ س م حـ)



٣ إذا كان: ق (∠ أ) = ٦٠°

، هـ منتصف $\overline{أ حـ}$ ، ى منتصف $\overline{أ ب}$

فأوجد: ق (∠ ى م هـ)



الحـل فى الدائرة م

١

∵ $\overline{م حـ} \perp \overline{أ ب}$

∴ حـ منتصف $\overline{أ ب}$

∴ أ حـ = $\frac{1}{2}$ أ ب

∴ أ حـ = $\frac{1}{2}$ × ١٢ = ٦ سم

٢

∵ حـ منتصف $\overline{س ص}$

∴ $\overline{م حـ} \perp \overline{س ص}$

∴ ق (∠ م حـ س) = ٩٠°

∴ ق (∠ س م حـ) =

١٨٠° − (٤٠° + ٩٠°) = ٥٠°

٣

∵ هـ منتصف $\overline{أ حـ}$

∴ $\overline{م هـ} \perp \overline{أ حـ}$

∴ ق (∠ أ هـ م) = ٩٠°

∵ ى منتصف $\overline{أ ب}$ ∴ $\overline{م ى} \perp \overline{أ ب}$

∴ ق (∠ أ ى م) = ٩٠°

فى الشكل الرباعى أ ى م هـ

∴ ق (∠ ى م هـ) =

٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٦٠°) = ١٢٠°

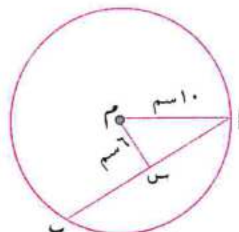
سؤال ٤

فى كل من الأشكال الآتية دائرة مركزها م ، أكمل:

١ إذا كان: م س = ٦ سم ،

، $\overline{م س} \perp \overline{أ ب}$ ، أ م = ١٠ سم

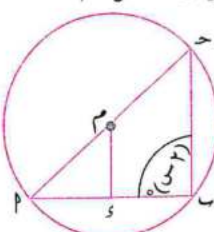
فإن : أ ب = ... سم



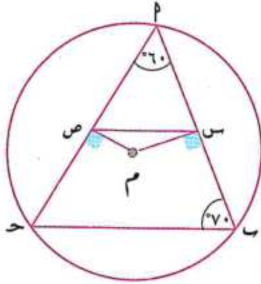
٢ إذا كان: $\overline{أ حـ}$ قطر فى الدائرة م

، $\overline{م ى} \perp \overline{أ ب}$

فإن : س = ...



مثال ٦



فى الشكل المقابل: الدائرة م فيها:

$\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{ﻫ ب}}$ ، $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{ﻫ ﺟ}}$ ،

ق ($\angle$ ﻫ) = ٦٠° ، ق ($\angle$ ب) = ٧٠°

أوجـد قياسـات زوايا المثلث م س ص

الحـل

فى الشكل الرباعى ﻫ س م ص:

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى الداخلة = ٣٦٠°

∴ ق ($\angle$ س م ص) = ٣٦٠° − (٦٠° + ٩٠° + ٩٠°) = ١٢٠°

فى $\triangle$ ﻫ ب ﺟ :

ق ($\angle$ ﺟ) = ١٨٠° − (٧٠° + ٦٠°) = ٥٠°

∵ $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{ﻫ ب}}$ ∴ س منتصف $\overline{\text{ﻫ ب}}$ ،

∵ $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{ﻫ ﺟ}}$ ∴ ص منتصف $\overline{\text{ﻫ ﺟ}}$

∴ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب ﺟ}}$

تذكـر أن

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفى ضلعين فــى المثلث توازى الضلع الثالث.

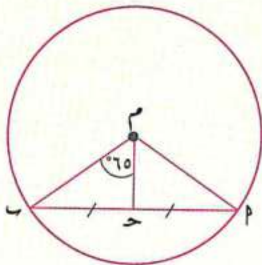
∵ ق ($\angle$ ب) = ق ($\angle$ ﻫ س ص) = ٧٠° ⟸ (بالتناظر) ∴ ق ($\angle$ م س ص) = ٩٠° − ٧٠° = ٢٠°

∵ ق ($\angle$ ﺟ) = ق ($\angle$ ﻫ ص س) = ٥٠° ⟸ (بالتناظر) ∴ ق ($\angle$ م ص س) = ٩٠° − ٥٠° = ٤٠°

∴ قياسات زوايا $\triangle$ س م ص هى:

ق ($\angle$ س م ص) = ١٢٠° ، ق ($\angle$ م س ص) = ٢٠° ، ق ($\angle$ م ص س) = ٤٠°

س؟ سؤال ٥



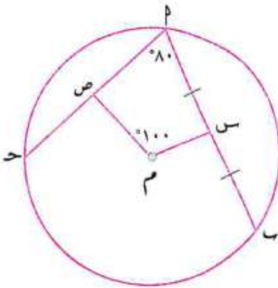
فى الشكل المقابل:

إذا كان: $\overline{\text{ﻫ ب}}$ وترًا فى الدائرة م ، ﺟ منتصف $\overline{\text{ﻫ ب}}$

، ق ($\angle$ ب م ﺟ) = ٦٥°

فأوجد: ق ($\angle$ م ﻫ ب)

مثال ٧



في الشكل المقابل:

دائرة مركزها م ، س منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ ، ق (∠ا) = ٨٠° ،

ق (∠س م ص) = ١٠٠°

أثبـت أن: ص منتصف $\overline{\text{ا حـ}}$

الحـل

∵ م هو مركز الدائرة ، س منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ ∴ $\overline{\text{م س}}$ ⊥ $\overline{\text{ا ب}}$

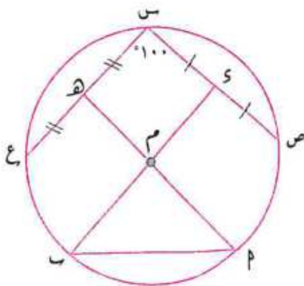
∴ ق (∠م س ا) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعى = ٣٦٠°

∴ ق (∠م ص ا) = ٣٦٠° − (٩٠° + ١٠٠° + ٨٠°) = ٩٠°

∴ $\overline{\text{م ص}}$ ⊥ $\overline{\text{ا حـ}}$ ∴ ص منتصف $\overline{\text{ا حـ}}$

س؟ سؤال ٦



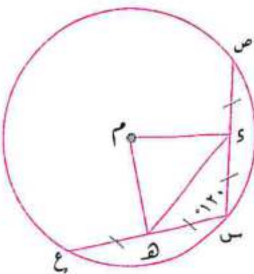
① في الشكل المقابل:

م دائرة ، ق (∠ص س ع) = ١٠٠° ،

ء منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{س ع}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ا هـ}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ = {م}

برهن أن : ا ب > س م

② في الشكل المقابل: (الشرقية ٢٠٢٤)



$\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{س ع}}$ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م ،

ق (∠ص س ع) = ١٢٠° ،

ء ، هـ منتصفا $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{س ع}}$ على الترتيب:

(ا) أوجـد: ق (∠ء م هـ)

(ب) أثبت أن: △م ء هـ متساوى الأضلاع

مثـال ٨

(الجيزة ٢٠٢٣)

في الشكل المقابل:

دائرتـان متحدتا المركز (م)

أب ∩ الدائرة الصغرى = {حـ ، ء}

أثبـت أن : أحـ = ب ء

الحـل

المعطيـات : أب ∩ الدائرة الصغرى = {حـ ، ء}

المطلـوب : أحـ = ب ء

العمـل : نرسم مهـ ⊥ أب تقطعها في هـ

البرهـان : في الدائرة الكبرى ∵ مهـ ⊥ أب ∴ هـ أ = هـ ب ⟸ ① (نتيجة)

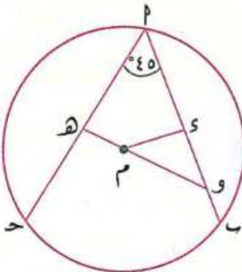
في الدائرة الصغرى ∵ مهـ ⊥ حـ ء ∴ هـ حـ = هـ ء ⟸ ② (نتيجة)

بطرح ② من ① ينتـج أن:

هـ أ − هـ حـ = هـ ب − هـ ء ∴ أحـ = ب ء (وهو المطلـوب)

س؟ سؤال ٧

① في الشكل المقابل:

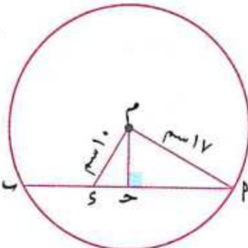


أب ، أحـ وتران في دائرة مركزها م ، ق (∠ ب أ حـ) = ٤٥° ،

ء ، هـ منتصفا أب ، أحـ على الترتيب

أثبـت أن: المثلث ء و م متساوي الساقين

② في الشكل المقابل:



دائرة مركزها م ، طول نصف قطرها ١٧ سم ،

أب = ٣٠ سم ، م حـ ⊥ أب ، م ء = ١٠ سم

احسب طول كل من : م حـ ، ب ء



أولًا مفاهيم أساسية عن الدائرة

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان طول نصف قطر دائرة مركزها م يساوي ٣ سم فإن محيطها = ... سم.

(أ) ٣ π (ب) ٦ π (جـ) ٩ π (د) ١٢ π

٢ إذا كان طول قطر دائرة يساوي ١١ سم فإن محيطها = ... سم.

(أ) ١١ π (ب) ٥,٥ π (جـ) ١٢١ π (د) ٢٢ π

٣ دائرة مركزها نقطة الأصل، وطول نصف قطرها ٥ سم. فأي النقط التالية لا تنتمي للدائرة؟ (الدقهلية ٢٠٢٤)

(أ) (٥ ، ٥) (ب) (٠ ، ٥) (جـ) (٥ ، ٠) (د) (٠ ، −٥)

٤ مساحة الدائرة التي طول نصف قطرها ٣ سم تُساوي تقريبًا .... سم². ($\pi \simeq$ ٣,١٤)

(أ) ١٨,٨٤ (ب) ٩,٤٢ (جـ) ٢٨,٢٦ (د) ١٩,٨٨٤

٥ دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٣ وحدات. فأي النقط التالية تنتمي للدائرة؟

(أ) (٢ ، $\sqrt{٥}$) (ب) (١ ، $\sqrt{٣}$) (جـ) (١ ، ٣) (د) ($\sqrt{٥}$ ، ٠)

٦ الدائرة التي محيطها ٢٠ π سم فإن: مساحتها تساوي .... سم². (الفيوم ٢٠٢٣)

(أ) ١٠ π (ب) ١٠٠ π (جـ) ٢٠٠ π (د) ٤٠٠ π

٧ إذا كانت مساحة دائرة = ٨٨ سم² فإن طول قطرها $\simeq$ .... سم. ($\pi \simeq \frac{٢٢}{٧}$)

(أ) $\sqrt{٧}$ (ب) ٢ $\sqrt{٧}$ (جـ) ٣ $\sqrt{٧}$ (د) ٤ $\sqrt{٧}$

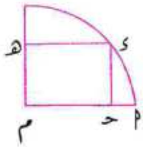
٨ دائرة طول أكبر وتر فيها يساوي ١٢ سم فإن محيط الدائرة = ... سم. (الشرقية ٢٠١٨)

(أ) ١٢ π (ب) ٦ π (جـ) ٢٤ π (د) ١٠ π

٩ إذا كانت مساحة الدائرة ٩ π سم، فإن محيط الدائرة = ... π سم. (الإسماعيلية ٢٠١٩)

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

١٠ في الشكل المقابل: ربع دائرة مركزها م ، رسم بداخله مستطيل م حـ ء هـ



فإذا كان م أ = ٦ سم فإن حـ هـ = ... سم.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

١١ إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها نق سم، فإن نصف محيط الدائرة = ... سم. (جنوب سيناء ٢٠١٧)

(أ) ٢ π نق (ب) $\frac{١}{٤}$ π نق (جـ) $\frac{١}{٢}$ π نق (د) π نق

٢ أكمل ما يأتى:

١ الدائرة هى مجموعة نقط المستوى التى تبعد بعدًا ثابتًا عن نقطة ثابتة فى المستوى وتسمى النقطة الثابتة .... ويسمى البعد الثابت ....

٢ نصف قطر الدائرة هو القطعة المستقيمة التى أحد طرفيها .... والطرف الآخر ....

٣ .... هو القطعة المستقيمة التى طرفاها أى نقطتين على الدائرة.

٤ .... هو أطول وتر فى الدائرة.

٥ سطح الدائرة = ... $\cup$ ....

٦ القطعة المستقيمة التى طرفاها مركز الدائرة وأى نقطة على الدائرة تسمى ....

٧ النسبة بين طول نصف قطر الدائرة وطول قطرها = ... : ....

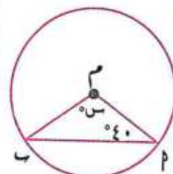
٨ إذا كان محيط الدائرة يساوى ١٥٤ سم فإن طول قطرها $\simeq$ .... سم . $(\pi \simeq \frac{٢٢}{٧})$

٩ إذا كانت مساحة الدائرة = ١٤٤ π سم^٢ فإن طول نصف قطرها = ... سم .

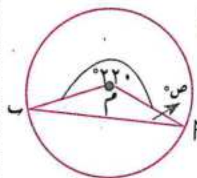
١٠ طول نصف قطر الدائرة التى مركزها النقطة (٧ ، ٤) وتمر بالنقطة (٣ ، ١) يساوى...........

---

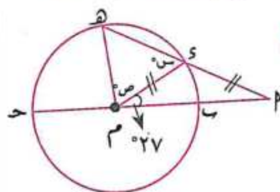
٣ فى كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة الرمز أو الرموز المستخدمة فى القياس:

١


س = ...

٢


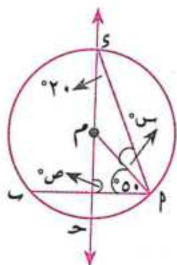
ص = ...

٣


إذا كان ﺃ ء = م ء

س = ...

ص = ...

٤


س = ...

ص = ...

ثانيًا نتائج هامة على الدائرة

٤ اختر الإجابة الصحيحة:

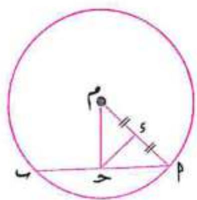
١ عدد محاور التماثل لأى دائرة هو .... (القليوبية ٢٠١٨)

(ﺃ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى

٢ أى مستقيم يمر بمركز الدائرة هو .... (الغربية ٢٠١٩)

(ﺃ) وتر فيها (ب) قطر فيها (جـ) محور تماثل لها (د) غير ذلك

٣ في الشكل المقابل:

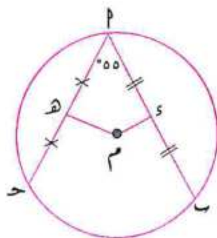


إذا كان حـ ء = ٣سم ، حـ منتصف أ ب ، ء منتصف م أ

فإن مساحة الدائرة م = ... π سم٢.

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ٣٦

٤ في الشكل المقابل: (البحيرة ٢٠١٥)



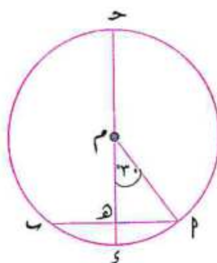
أ ب ، أ حـ وتران في الدائرة م ،

ء منتصف أ ب، هـ منتصف أ حـ، إذا كان

ق (∠ ب أ حـ)= ٥٥° فإن ق (∠ ء م هـ) = ...

(أ) ٥٥° (ب) ١٢٥° (جـ) ٩٠° (د) ١٠٠°

٥ في الشكل المقابل:



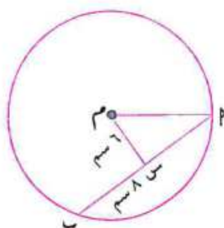
إذا كانت أ ب وترًا في الدائرة م ، حـ هـ ⊥ أ ب،

أ ب = ٤ سم، ق(∠ أ م ء) = ٣٠°

فإن طول حـ ء = ... سم.

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٢ (د) ١٦

٦ في الشكل المقابل: (الجيزة ٢٠١٣)

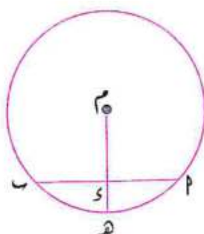


إذا كان م مركز الدائرة، م س ⊥ أ ب ، م س = ٦ سم

، س ب = ٨ سم ، فإن م أ = ... سم.

(أ) ١٠ (ب) ١٢ (جـ) ١٦ (د) ٢٠

٧ في الشكل المقابل: (البحر الأحمر ٢٠١٣)



دائرة مركزها م، وطول قطرها ١٠سم، أ ب = ٨ سم ، م هـ ⊥ أ ب

فإن طول ء هـ = ... سم.

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ٦

٨ وتر طوله ٦ سم مرسوم داخل دائرة طول قطرها ١٠ سم، فإن بعد الوتر عن مركز الدائرة = ...

(أ) ٢ سم (ب) ٥ سم (جـ) ٣ سم (د) ٤ سم

(البحيرة ٢٠٢٣)

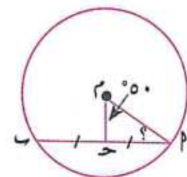
٩ إذا كان $\overline{مأ}$ ، $\overline{مب}$ نصفي قطرين متعامدين في الدائرة م ، وكانت مساحة △ أمب = ٨ سم^2 ، فإن نق = ... سم.

(البحيرة ٢٠١٦)

(أ) ٨ (ب) ١٦ (جـ) ٤ (د) ٢

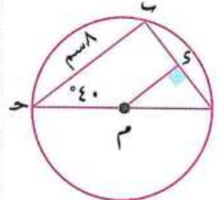
٥ في كل من الأشكال الآتية م دائرة، أكمل:

١



ق (∠م أ جـ) = ...°

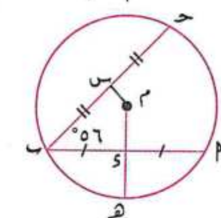
٢



ق (∠د م أ) = ...°

د م = ... سم

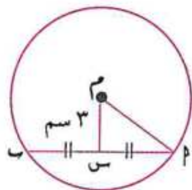
٣ أ د = ٤ سم ، م د = ٣ سم



ق (∠د م س) = ...°

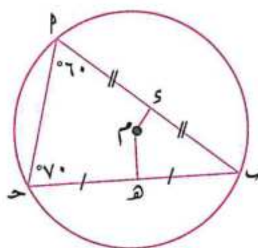
د هـ = ... سم

٤



إذا كان م س = ٣ سم ، أ ب = ٨ سم فإن مساحة الدائرة م = ... سم^2 (بدلالة π)

٦ في الشكل المقابل:



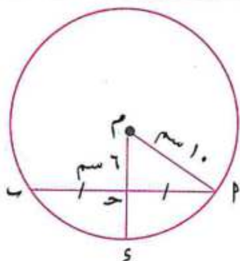
أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة م ،

ق (∠أ) = ٦٠°، ق (∠جـ) = ٧٠°

د ، هـ منتصفا $\overline{أب}$ ، $\overline{بجـ}$ على الترتيب

أوجد: ق (∠د م هـ)

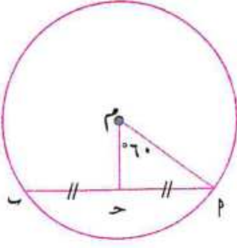
٧ في الشكل المقابل:



إذا كانت جـ منتصف $\overline{أب}$ ، م جـ = ٦ سم ، نق = ١٠ سم

أوجد طول كلٍّ من: $\overline{أب}$ ، $\overline{جـد}$

٨ في الشكل المقابل:



م دائرة طول نصف قطرها ٨سم،

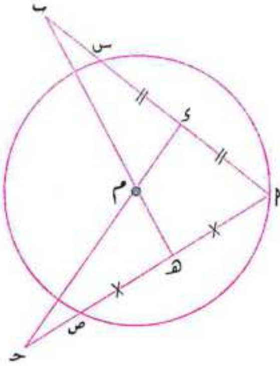
$\overline{\text{أ ب}}$ وتر فيها، حيث ح منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ،

و (∠أ م ح) = ٦٠°

أوجد طول: $\overline{\text{م ح}}$

---

٩ في الشكل المقابل: (دمياط ٢٠١٣)



$\overline{\text{أ س}}$ ، $\overline{\text{أ ص}}$ وتـران في الدائرة (م) ،

ء منتصف $\overline{\text{أ س}}$ ، هـ منتصف $\overline{\text{أ ص}}$ ،

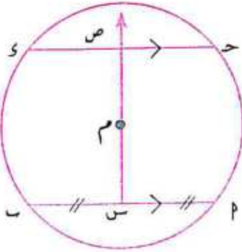
$\overleftarrow{\text{ءم}}$ ∩ $\overleftarrow{\text{أ ص}}$ = {ح}

$\overleftarrow{\text{هـ م}}$ ∩ $\overleftarrow{\text{أ س}}$ = {ب}

إذا كان أ ب = أ ح **فأثبت أن:** أ س = أ ص

---

١٠ في الشكل المقابل: (الشرقية ٢٠٢٣)



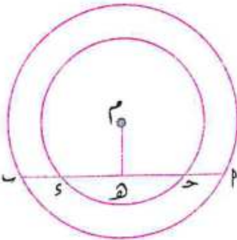
م دائرة ، $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{ح ء}}$ ، س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

رسم $\overleftarrow{\text{س م}}$ فقطع $\overline{\text{ح ء}}$ في ص

أثبت أن: ص منتصف $\overline{\text{ح ء}}$

---

١١ في الشكل المقابل: (الجيزة ٢٠٢٣)



دائرتان متحدتا المركز م ، $\overline{\text{أ ب}}$ وتر في الدائرة الكبرى،

ويقطع الدائرة الصغرى في ح ، ء ، $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

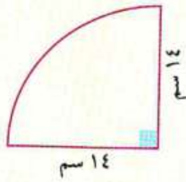
، أ ب = ١٦ سم، م هـ = ٦ سم

١ **أثبت أن:** أ ح = ء ب

٢ **أوجد:** طول نصف قطر الدائرة الكبرى.

تفكير إبداعى TIMSS

١٢ **فى الشكل المقابل:**



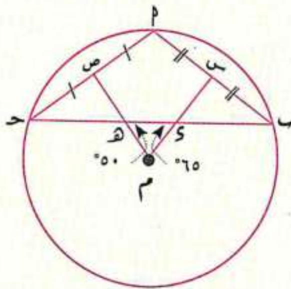
ثنى سلك على شكل ربع دائرة كما بالشكل المقابل،

حيث طول نصف قطر الدائرة ١٤ سم

أوجد: طول السلك لأقرب سم $(\pi \simeq \frac{٢٢}{٧})$

---

١٣ **فى الشكل المقابل:**



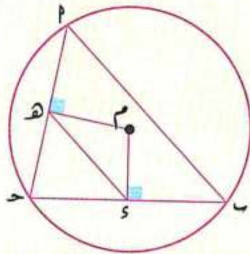
س منتصف $\overline{أ ب}$ ، ص منتصف $\overline{أ حـ}$

إذا كان ق (∠ م ء هـ) = ٦٥° ، ق (∠ م هـ ء) = ٥٠°

فأوجد: ق (∠ أ) بالدرجات.

---

١٤ **فى الشكل المقابل:** (الغربية ٢٠٢٣)



أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة مركزها م ،

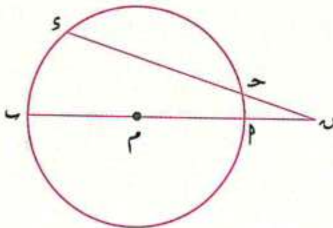
$\overline{م ء} \perp \overline{ب حـ}$ ، $\overline{م هـ} \perp \overline{أ حـ}$ **أثبت أن:**

١ $\overline{ء هـ}$ // $\overline{أ ب}$

٢ محيط △ حـ ء هـ = $\frac{١}{٢}$ محيط △ أ ب حـ

---

١٥ **فى الشكل المقابل:**



$\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م ،

$\overleftarrow{ب أ} \cap \overleftarrow{ء حـ} = \{ن\}$ **أثبت أن :**

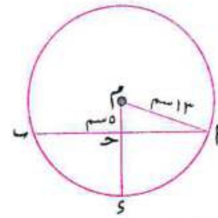
١ ن ب > ن ء

٢ ن حـ > ن أ

تدريبات الكتاب المدرسى

١ في كل من الأشكال الآتية م دائرة، أكمل:

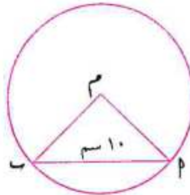
(أ)



ؤ ب = ...

حـ ء = ...

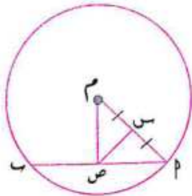
(ب)



ق ($\angle$ ؤ) = ... °

م ؤ = ...

(جـ)

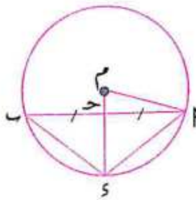


س ص = ٧ سم ($\pi \simeq \frac{22}{7}$)

مساحة الدائرة $\simeq$ ...... سم^2

---

٢ في الشكل المقابل: (كفر الشيخ ٢٠٢٤)



م دائرة طول نصف قطرها ١٣ سم،

$\overline{\text{ؤ ب}}$ وتر فيها طوله ٢٤ سم، حـ منتصف $\overline{\text{ؤ ب}}$ ،

$\overleftarrow{\text{م حـ}}$ $\cap$ الدائرة م = {ء}

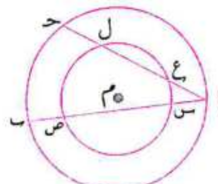
أوجد: مساحة المثلث ؤ ء ب

---

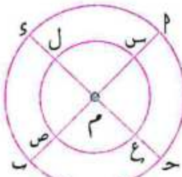
٣ في الشكلين المقابلين:

اذكر القطع المستقيمة المتساوية

في الطول، **فسر إجابتك.**



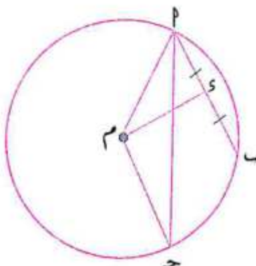
شكل (١)



شكل (٢)

---

٤ في الشكل المقابل:

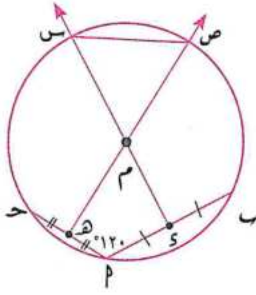


$\overline{\text{ؤ ب}}$ وتر في الدائرة م ، $\overleftarrow{\text{ؤ حـ}}$ ينصف ($\angle$ ب ؤ م)

ويقطع الدائرة م في حـ. فإذا كان ء منتصف $\overline{\text{ؤ ب}}$

فأثبت أن: $\overline{\text{ء م}} \perp \overline{\text{حـ م}}$

٥ فى الشكل المقابل: (القليوبية ٢٠٢٢)



$\overline{ﻫ ب}$، $\overline{ﻫ حـ}$ وتران فى الدائرة م يحصران زاوية قياسها ١٢٠°،

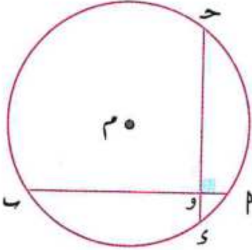
ء ، هـ منتصفا $\overline{ﻫ ب}$، $\overline{ﻫ حـ}$ على الترتيب.

رسم $\overleftarrow{ء م}$ ، $\overleftarrow{هـ م}$ فقطعا الدائرة فى س ، ص على الترتيب.

أثبت أن △ س ص م متساوى الأضلاع.

---

٦ فى الشكل المقابل:



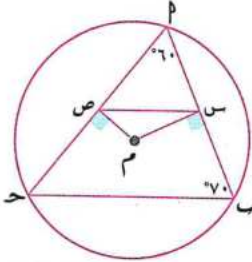
دائرة م طول نصف قطرها ٧ سم، $\overline{ﻫ ب}$ ، $\overline{حـ ء}$ وتران متعامدان

ومتقاطعان فى النقطة و

فإذا كان ﻫ ب = ١٢ سم، حـ ء = ١٠ سم **فأوجد** طول $\overline{م و}$

---

٧ فى الشكل المقابل:



فى الدائرة م، $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{ﻫ ب}$ ، $\overline{م ص}$ ⊥ $\overline{ﻫ حـ}$ ،

ق (∠ ﻫ) = ٦٠° ، ق (∠ ب) = ٧٠°

أوجـد: قياسات زوايا المثلث م س ص

---

٨ $\overline{ﻫ ب}$ ، $\overline{حـ ء}$ وتـــران متوازيـــان فى الدائـــرة م ، ﻫ ب = ١٢ سم ، حـ ء = ١٦ سم .

أوجد البعد بين هذين الوترين إذا كان طول نصف قطر الدائرة م يساوى ١٠ سم .

هل توجد إجابات أخرى؟ فسر إجابتك.

---

٩ إذا كان $\overline{ﻫ ب}$ ، $\overline{حـ ء}$ وترين فى دائرة حيث ﻫ ب > حـ ء، **فأى الوترين أقرب إلى مركز الدائرة؟**

فســـر إجابتك.

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ الوتر المار بمركز الدائرة يسمى .... للدائرة. (بورسعيد ٢٠٢٣)

(ا) مماسًّا (ب) قاطعًا (جـ) قطرًا (د) نصف قطر

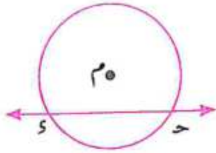
٢ مركز الدائرة م ∈ .... (بورسعيد ٢٠٢٢)

(ا) الدائرة م (ب) محيط الدائرة م (جـ) سطح الدائرة م (د) غير ذلك

٣ وتر طوله ٨ سم فى دائرة طول نصف قطرها ٥ سم فإنه يبعد عن مركزها .... سم. (الأزهر الشريف ٢٠٢٤)

(ا) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ١٠

٤ فى الشكل المقابل: (بورسعيد ٢٠٢٤)



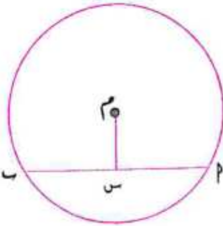
$\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ ∩ سطح الدائرة م = ...

(ا) ∅ (ب) {حـ ، ء}

(جـ) $\overline{\text{حـ ء}}$ (د) $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$

---

٢ ١ فى الشكل المقابل: (الدقهلية ٢٠١٩)

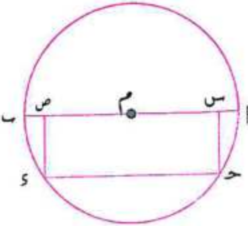


دائرة م طول نصف قطرها ١٣ سم ،

$\overline{\text{م س}}$ ⊥ $\overline{\text{ﺃ ب}}$ ، م س = ٥ سم

أوجد: طول $\overline{\text{ﺃ ب}}$

٢ فى الشكل المقابل: (المنوفية ٢٠٢٢)



$\overline{\text{ﺃ ب}}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{\text{س حـ}}$ ⊥ $\overline{\text{حـ ء}}$ ، $\overline{\text{ص ء}}$ ⊥ $\overline{\text{حـ ء}}$

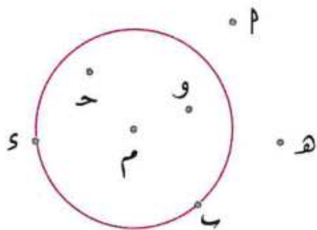
أثبت أن: ﺃ س = ب ص



ذاكر | الدرس ٢

أوضاع نقطة ومستقيم ودائرة بالنسبة لدائـرة

فكر وناقش



- كيف تُحدد وضع كل من النقاط أ ، ب ، حـ بالنسبة للدائرة م ؟
- ما العلاقـة بين طول كل مما يأتى؟

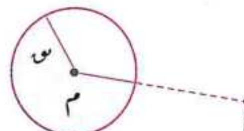
١ م أ ، نق «م أ > نق» ٢ م ب ، نق «م ب = نق» ٣ م حـ ، نق «م حـ < نق»

أولًا موضع نقطـة بالنسبة لدائـرة:

م دائرة طول نصف قطرها نق ، أ نقطة فى مستوى الدائرة .

① إذا كانت أ تقع خارج الدائرة

فـإن : أ م > نق
والعكس صحيح



- { أ } ∩ الدائرة م = ∅
- { أ } ∩ سطح الدائرة م = ∅

② إذا كانت أ تقع على الدائرة

فـإن : أ م = نق
والعكس صحيح



- { أ } ∩ الدائرة م = { أ }
- { أ } ∩ سطح الدائرة م = { أ }

③ إذا كانت أ تقع داخل الدائرة

فـإن : ٠ ≤ أ م < نق
والعكس صحيح



- { أ } ∩ الدائرة م = ∅
- { أ } ∩ سطح الدائرة م = { أ }

مثـال ١

دائرة مركزها م وطول نصف قطرها ٦ سم ، حدد موضع نقطة س بالنسبة للدائرة م إذا كان :

١ م س = ٧ سم ٢ م س = ٣ سم ٣ م س = ٦ سم ٤ م س = صفر

الحـل

١ ∵ م س = ٧ سم ، نق = ٦ سم ∴ م س > نق ∴ س تقع خارج الدائرة م
٢ ∵ م س = ٣ سم ، نق = ٦ سم ∴ م س < نق ∴ س تقع داخل الدائرة م
٣ ∵ م س = ٦ سم ، نق = ٦ سم ∴ م س = نق ∴ س تقع على الدائرة م
٤ ∵ م س = صفر ، نق = ٦ سم ∴ س تقع داخل الدائرة وتنطبق على مركزها.

مثـال ٢

إذا كانت: م دائرة، طول نصف قطرها = ٥سم ، أ نقطة فى مستوى الدائرة م، حيث م أ = (٨س − ٢٧)سم
فأوجـد قيم س فى الحالات الآتية:

١ عندما أ تقع خارج الدائرة   ٢ عندما أ تقع داخل الدائرة   ٣ عندما أ تقع على الدائرة

الحـل

١ ∵ أ تقع خارج الدائرة
∴ م أ > نق
∴ ٨س − ٢٧ > ٥
∴ ٨س > ٣٢
∴ س > ٤
∴ س ∈]٤ ، ∞[

٢ ∵ أ تقع داخل الدائرة
∴ م أ < نق
∵ م أ ≥ ٠
∴ ٠ ≤ م أ < نق
∴ ٠ ≤ ٨س − ٢٧ < ٥
∴ ٢٧ ≤ ٨س < ٣٢
∴ ٣,٣٧٥ ≤ س < ٤
∴ س ∈ [٣,٣٧٥ ، ٤[

٣ ∵ أ تقع على الدائرة
∴ م أ = نق
∴ ٨س − ٢٧ = ٥
∴ ٨س = ٣٢
∴ س = ٤

س؟ سؤال ١

① دائرة مركزها م وطول نصف قطرها نق **أوجد قيم س فى الحالات التاليـة:**

(أ) نق = ٦ سم ، م أ = ٢ س   (حيث أ تقع داخل الدائرة)

(ب) نق = ٣ سم ، م أ = س^{٢} − ٦   (حيث أ تقع على الدائرة)

② دائرة مركزها م وطول نصف قطرها نق ، **حدد موضع نقطة أ بالنسبة للدائرة م إذا كان:**

(أ) م أ = ٢ نق   (ب) م أ = $\frac{٣}{٤}$ نق   (جـ) م أ = $\frac{٥}{٣}$ نق

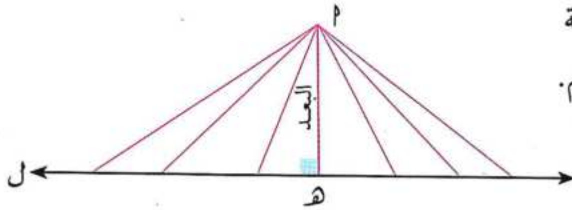
(د) م أ = نق   (هـ) م أ = $\sqrt{٣}$ نق



نقاط هامة

• البُعد بين نقطة ومستقيم هو طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من هذه النقطة إلى هذا المستقيم.

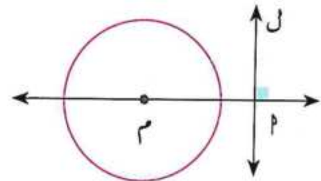
فمثلًا: البعد بين ؟ والمستقيم ل هو ؟هـ حيث $\overline{؟هـ} \perp$ ل



ثانيًا موضع مستقيم بالنسبة لدائرة:

م دائرة طول نصف قطرها نق ، ل مستقيم فى مستواها ، $\overleftrightarrow{م؟} \perp$ ل حيث $\overleftrightarrow{م؟} \cap$ ل = {؟} :

① إذا كان المستقيم ل يقع **خارج** الدائرة م



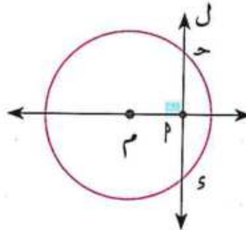
فإن : م؟ > نق

والعكس صحيح

• ل ∩ الدائرة م = ∅

• ل ∩ سطح الدائرة م = ∅

② إذا كان المستقيم ل **قاطعًا** للدائرة م



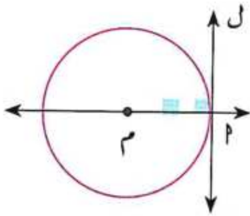
فإن : ٠ ≤ م؟ < نق

والعكس صحيح

• ل ∩ الدائرة م = {حـ ، ء}

• ل ∩ سطح الدائرة م = $\overline{حـ ء}$

③ إذا كان المستقيم ل **مماسًا** للدائرة م عند نقطة ؟



فإن : م؟ = نق

والعكس صحيح

• ل ∩ الدائرة م = {؟}

• ل ∩ سطح الدائرة م = {؟}

؟ تسمى **نقطة التماس**

س؟ سؤال ٢

إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها نق ، $\overline{م ب} \perp$ المستقيم ل ، ب ∈ ل **فأكمل ما يأتى:**

① إذا كان: م ب = ٣ نق فإن: المستقيم ل .... الدائرة

② إذا كان: م ب = نق فإن: المستقيم ل .... للدائرة

③ إذا كان: م ب = $\frac{١}{٣}$ نق فإن: المستقيم ل .... للدائرة

مثـال ٣

إذا كانت: م دائرة ، طول نصف قطرها ٨سم ، ل مستقيم عمودى على $\overleftrightarrow{\text{م أ}}$ حيث أ ∈ ل
فاذكر موضع المستقيم ل من الدائرة م فى الحالات الآتيـة:

١ إذا كان: م أ = ٥ سم
٢ إذا كان: م أ = ٩ سم
٣ إذا كان: م أ = ٨ سم
٤ إذا كان: $\frac{١}{٣}$ م أ = ٢ سم

الحـل

١ ∵ م أ = ٥ سم ، نق = ٨ سم ∴ م أ < نق ∴ المستقيم ل قاطع للدائرة
٢ ∵ م أ = ٩ سم ، نق = ٨ سم ∴ م أ > نق ∴ المستقيم ل يقع خارج الدائرة
٣ ∵ م أ = ٨ سم ، نق = ٨ سم ∴ م أ = نق ∴ المستقيم ل مماس للدائرة
٤ ∵ $\frac{١}{٣}$ م أ = ٢ سم ∴ م أ = ٢ × ٣ = ٦ سم
∵ نق = ٨ سم ∴ م أ < نق ∴ المستقيم ل قاطع للدائرة

مثـال ٤

إذا كانت: م دائرة طول نصف قطرها ٥سم ، $\overleftrightarrow{\text{م أ}}$ ⊥ ل حيث: أ ∈ ل
فأوجد قيم س فى الحالات الآتيـة:

١ المستقيم ل مماس للدائرة م ، م أ = (٢س - ١)سم
٢ المستقيم ل قاطع للدائرة م ، م أ = (٣س - ٤)سم
٣ المستقيم ل محور تماثل للدائرة م ، م أ = (س^{٢} - ١)سم

الحـل

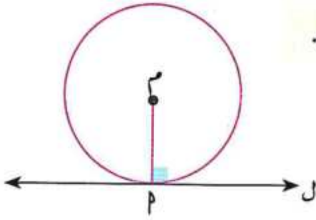
١ ∵ ل مماس للدائرة م ∴ م أ = نق ∴ ٢ س - ١ = ٥ ∴ ٢ س = ٥ + ١
∴ ٢ س = ٦ ∴ س = ٣

٢ ∵ ل قاطع للدائرة م ∴ ٠ ≤ م أ < نق ∴ ٠ ≤ ٣ س - ٤ < ٥
٤ ≤ ٣ س < ٥ + ٤ ∴ ٤ ≤ ٣ س < ٩ ∴ $\frac{٤}{٣}$ ≤ س < ٣ ∴ س ∈ [$\frac{٤}{٣}$ ، ٣ [

٣ ∵ ل محور تماثل الدائرة م ∴ م أ = صفر ∴ س^{٢} - ١ = صفر
∴ س^{٢} = ١ ∴ س = ± ١

حقيقـــة ١

المماس للدائرة يكون عموديًّا علـى نصف القطـر المرسـوم من نقطة التماس.

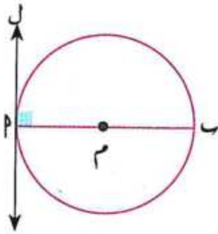


أى إنـه: إذا كان : المستقيم ل مماسًّا للدائرة م عند النقطة ٮ

فــإن : $\overline{مٮ}$ ⊥ المستقيم ل

حقيقـــة ٢

المستقيم العمودى على قطر الدائرة من إحدى نهايتيه يكون مماسًّا للدائرة.



أى إنـه: إذا كان : $\overline{ٮ ب}$ قطرًا فى الدائرة م ،

المستقيم ل ⊥ $\overline{ٮ ب}$ عند النقطة ٮ

فــإن : المستقيم ل مماس للدائرة م عند ٮ

مثـال ٥

فى الشكل المقابل:

ق (∠ ٮ) = ٢٠° ، ق (∠ م حـ ب) = ٣٥°

أثبـت أن: $\overleftarrow{ٮ ب}$ مماس للدائرة م

الحـل

∵ م ب = م حـ = نق

∴ ق (∠ م ب حـ) = ق (∠ م حـ ب) = ٣٥°

∵ (∠ ب م ٮ) خارجة عن △ ب م حـ

∴ ق (∠ ب م ٮ) = ٣٥° + ٣٥° = ٧٠°

فى △ ٮ ب م ∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

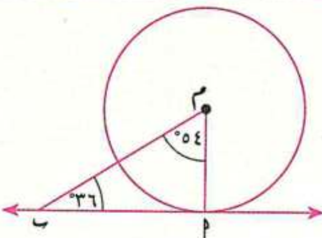
∴ ق (∠ ٮ ب م) = ١٨٠° − (٢٠° + ٧٠°) = ٩٠° ∴ $\overleftarrow{ٮ ب}$ مماس للدائرة م

سؤال ٣

فى الشكل المقابل:

$\overline{مٮ}$ نصف قطر

أثبـت أن: $\overleftrightarrow{ٮ ب}$ مماس للدائرة م عند ٮ



مثـال ٦

فى الشكل المقابل:

م دائرة طول نصف قطرها ٤ سم ، $\overleftrightarrow{\text{ٮ}}$ ب مماس ،

ق (∠ ا م ب) = ٦٠° أوجـد طول $\overline{\text{م ب}}$

الحـل

∵ $\overleftrightarrow{\text{ا ب}}$ مماس ، $\overline{\text{م ا}}$ نصف قطر ∴ $\overline{\text{م ا}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{ا ب}}$ ∴ ق (∠م ا ب) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق (∠م ب ا) = ١٨٠° − (٦٠° + ٩٠°) = ٣٠°

∵ △م ا ب قائم الزاوية فى ا ، ق (∠ ب) = ٣٠°

∴ م ا = $\frac{1}{2}$ م ب

∴ م ب = ٢ م ا

∴ م ب = ٢ × ٤ = ٨ سم

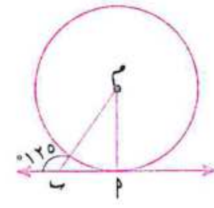


تذكـر أن

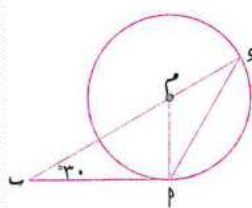
طول الضلع المقابل للزاوية التى قياسها ٣٠° فى المثلث القائم الزاوية يساوى نصف طول الوتر.

سؤال ٤

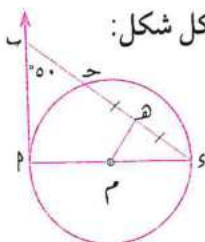
فى كل من الأشكال الآتية م دائرة، $\overleftrightarrow{\text{ا ب}}$ مماس. أوجد ما هو مكتوب أسفل كل شكل:



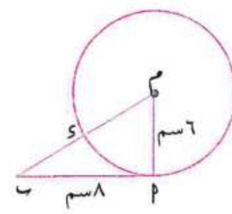
ق (∠ ا م ب)



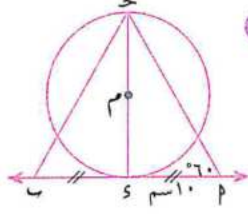
ق (∠ ا ء ب)



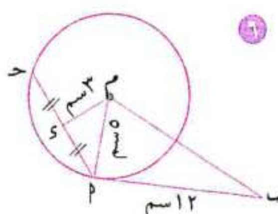
ق (∠ ا م هـ)



طول $\overline{\text{ء ب}}$

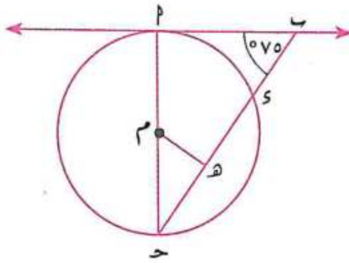


محيط △ ا ب حـ



محيط الشكل ا ب م ء

مثال ٧



فى الشكل المقابل:

$\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م ، هـ منتصف $\overline{حـ ء}$ ،

ق ($\angle$ أ ب هـ) = ٧٥° **أوجد** ق ($\angle$ أ م هـ)

الحل

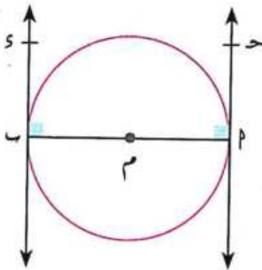
∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة ∴ $\overline{م أ} \perp \overleftrightarrow{أب}$ ∴ ق ($\angle$ ب أ م) = ٩٠°

∵ هـ منتصف $\overline{ء حـ}$ ∴ $\overline{م هـ} \perp \overline{ء حـ}$ ∴ ق ($\angle$ ء هـ م) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعى = ٣٦٠°

∴ ق ($\angle$ أ م هـ) = ٣٦٠° − (٧٥° + ٩٠° + ٩٠°) = ١٠٥°

العلاقة بين المماسين المرسومين للدائرة من نهايتى قطر فيها:



∵ المستقيم $\overleftrightarrow{أحـ}$ مماس للدائرة م عند أ ، $\overline{أب}$ قطر فيها

∴ $\overleftrightarrow{أحـ} \perp \overline{أب}$ ⟸ (١)

∵ المستقيم $\overleftrightarrow{ب ء}$ مماس للدائرة م عند ب

∴ $\overleftrightarrow{ب ء} \perp \overline{أب}$ ⟸ (٢)

من (١) ، (٢) **ينتج أن** $\overleftrightarrow{أحـ} \parallel \overleftrightarrow{ب ء}$

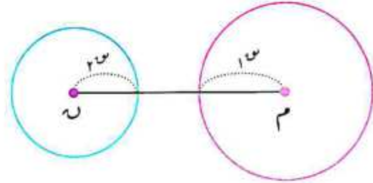
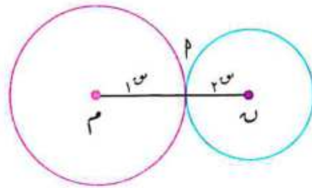
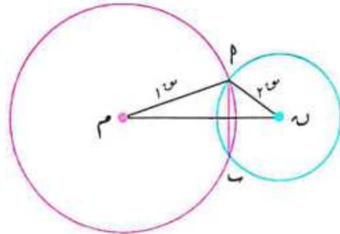
أى إن: المماسين لدائرة المرسومين من نهايتى قطر فيها يكونان **متوازيين**

نقاط هامة

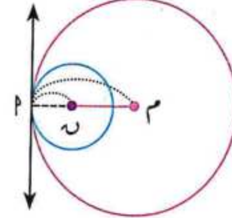
- من نقطة خارج الدائرة **يمكن** رسم مماسين للدائرة.
- من نقطة على الدائرة **يمكن** رسم مماس واحد فقط للدائرة.
- من نقطة داخل الدائرة **لا يمكن** رسم أى مماس للدائرة.
- المستقيمان العموديان على ثالث متوازيان.

ثالثًا موضع دائرة بالنسبة لدائرة أخرى

م ، ن دائرتان طولا نصفي قطريهما $نق_1$ ، $نق_2$ حيث $نق_1 > نق_2$ ، $\overleftrightarrow{م ن}$ خط المركزين.

وضع الدائرتين	الخواص
① الدائرتان متباعدتان  فإن: $م ن > نق_1 + نق_2$	الدائرة م $\cap$ الدائرة ن $= \emptyset$ سطح الدائرة م $\cap$ سطح الدائرة ن $= \emptyset$ $م ن \in]نق_1 + نق_2 ، \infty[$
② الدائرتان متماستان من الخارج  فإن: $م ن = نق_1 + نق_2$	الدائرة م $\cap$ الدائرة ن $= \{أ\}$ سطح الدائرة م $\cap$ سطح الدائرة ن $= \{أ\}$
③ دائرتان متقاطعتان  فإن: $نق_1 - نق_2 < م ن < نق_1 + نق_2$	الدائرة م $\cap$ الدائرة ن $= \{أ ، ب\}$ سطح الدائرة م $\cap$ سطح الدائرة ن = سطح المنطقة المظللة $\overleftrightarrow{م ن}$ محور التماثل للوتر المشترك $\overline{أ ب}$ $م ن \in]نق_1 - نق_2 ، نق_1 + نق_2[$

④ **دائرتان متماستان من الداخل**



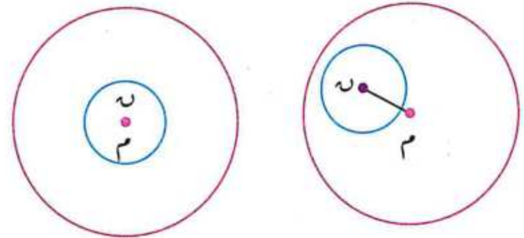
فـإن : م ن = نق$_1$ − نق$_2$

الدائرة م ∩ الدائرة ن = { أ }

سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن

= سطح الدائرة الصغرى

⑤ **دائرتان متداخلتان**



فـإن : م ن < نق$_1$ − نق$_2$

الدائرة م ∩ الدائرة ن = ∅

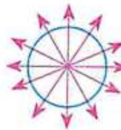
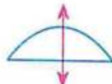
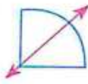
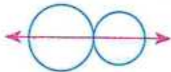
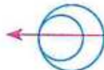
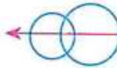
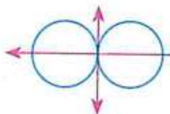
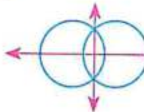
سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = سطح الدائرة ن

= سطح الدائرة الصغرى

م ن ∈] ٠ ، نق$_1$ − نق$_2$ [

- وعندما م ن = صفر تكون الدائرتان متحدتا المركز

 **نقاط هامة**

- عدد محاور تماثل الدائرة هو **عدد لانهائى.** 
- عدد محاور تماثل نصف الدائرة أو ربع الدائرة يساوى **واحدًا.**  
- عدد محاور التماثل لدائرتين متماستين من الخارج يساوى **واحدًا.** 
- عدد محاور التماثل لدائرتين متماستين من الداخل يساوى **واحدًا.** 
- عدد محاور التماثل لدائرتين متقاطعتين يساوى **واحدًا.** 
- عدد محاور التماثل لدائرتين متماستين من الخارج **ومتطابقتين** يساوى **اثنين.** 
- عدد محاور التماثل لدائرتين متقاطعتين **ومتطابقتين** يساوى **اثنين.** 

مثال ٨

دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٩ سم، ٤ سم على الترتيب.

اذكر وضع كل منهما بالنسبة للأخرى فى كل من الحالات الآتية:

١ م ن = ١٣سم ٢ م ن = ٥سم ٣ م ن = ٣سم

٤ م ن = صفر ٥ م ن = ١٠سم ٦ م ن = ١٥سم

الحل

نق١ + نق٢ = ١٣سم ، نق١ - نق٢ = ٥سم

١ ∵ م ن = ١٣ سم ∴ م ن = نق١ + نق٢ ∴ الدائرتان **متماستان من الخارج**

٢ ∵ م ن = ٥ سم ∴ م ن = نق١ - نق٢ ∴ الدائرتان **متماستان من الداخل**

٣ ∵ م ن = ٣ سم ∴ م ن < نق١ - نق٢ ∴ الدائرتان **متداخلتان**

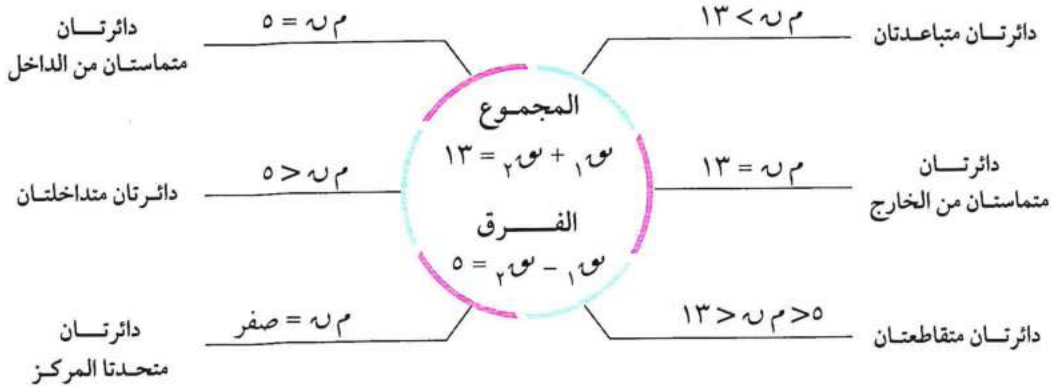
٤ ∵ م ن = صفر ∴ الدائرتان **متحدتا المركز**

٥ ∵ م ن = ١٠سم ∴ ٥ < م ن < ١٣ ∴ الدائرتان **متقاطعتان**

٦ ∵ م ن = ١٥سم ∴ م ن > ١٣ ∴ الدائرتان **متباعدتان**

مخطط توضيحى يبين العلاقة بين موضع دائرة ودائرة أخرى

∵ نق١ = ٩ ، نق٢ = ٤ ∴ نق١ > نق٢



سؤال ٥

دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٧ سم ، ٣ سم على الترتيب. اذكر وضع كل منهما بالنسبة للأخرى فى كل من الحالات الآتية:

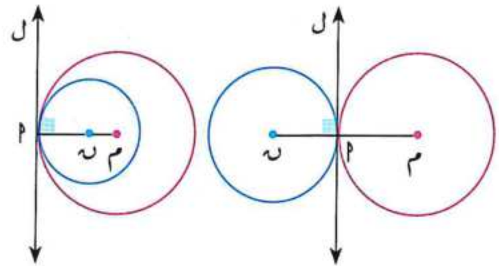
١ م ن = ١١ سم ٢ م ن = ٤ سم ٣ م ن = ١ سم

٤ م ن = ١٠ سم ٥ م ن = صفر ٦ م ن = ٧ سم

نتيجــة ١

خط المركزين لدائرتين متماستين من الداخل أو الخارج يمر بنقطة التماس ويكون عموديًا على المماس المشترك عند هذه النقطة.

فى الشكلين: الدائرتان م ، ں متماستان عند النقطة ؟ ، ل مماس مشترك لهما عند ؟

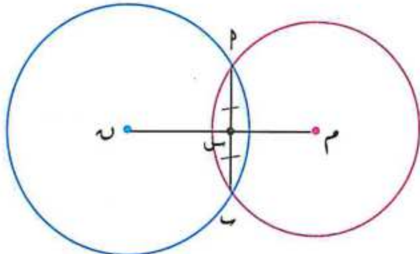


فــإن: $\overleftrightarrow{\text{م ں}} \perp$ ل

نتيجــة ٢

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديًا على الوتر المشترك وينصفه.

فى الشكل: الدائرتان م ، ں متقاطعتان فى ؟ ، ب



فــإن: $\overleftrightarrow{\text{م ں}} \perp \overline{\text{؟ ب}}$ ، ؟ س = ب س

أى أن: $\overleftrightarrow{\text{م ں}}$ محور تماثل للوتر المشترك $\overline{\text{؟ ب}}$

مثـال ٩

فى الشكل المقابل:

م ، ں دائرتان طولا نصفى قطريهما ١٠ سم ، ٦ سم على الترتيب ومتماستان من الداخل فى ؟ ، $\overleftarrow{\text{؟ ب}}$ مماس مشترك لهما عند ؟

إذا كانت: مساحة $\triangle$ ب م ں = ٢٤ سم^{٢} **فأوجد طول** $\overline{\text{؟ ب}}$

الحـل

$\because$ الدائرتين متماستان من الداخل عند ؟

$\therefore$ ؟ $\in \overleftrightarrow{\text{م ں}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{م ں}} \perp \overleftrightarrow{\text{؟ ب}}$

$\therefore$ م ں = نق$_{١}$ − نق$_{٢}$ $\therefore$ م ں = ١٠ − ٦ = ٤ سم

$\because$ $\overline{\text{؟ ب}}$ ارتفاع للمثلث ب م ں الذى قاعدته $\overline{\text{م ں}}$ ،

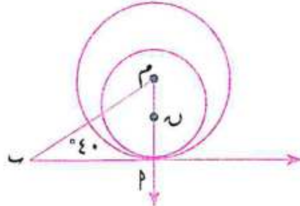
$\because$ مساحة $\triangle$ ب م ں = $\frac{١}{٢}$ × م ں × ؟ ب

$\therefore$ ٢٤ = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ؟ ب $\therefore$ ؟ ب = ١٢ سم

مثال ١٠

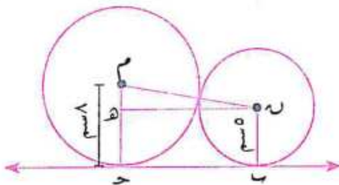
في كل من الأشكال الآتية، أجب عما يأتى باستخدام البيانات الموضحة فى كل شكل:

١ حيث $\overleftrightarrow{أب}$ مماس مشترك للدائرتين



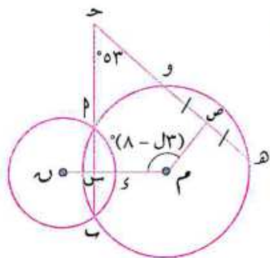
أوجد: ق (∠ ب م ن)

٢ حيث $\overleftrightarrow{ب ج}$ مماس مشترك للدائرتين



أوجد: طول $\overline{ب ج}$

٣



أوجد: قيمة ل

الحل

١ ∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس مشترك للدائرتين م ، ن

∴ $\overleftrightarrow{م ن} \perp \overleftrightarrow{أب}$ ∴ ق (∠ ب أ م) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق (∠ ب م ن) = ١٨٠° - (٩٠° + ٤٠°) = ٥٠°

---

٢ ∵ $\overleftrightarrow{ب ج}$ مماس مشترك للدائرتين

∴ $\overline{ن ب} \perp \overleftrightarrow{ب ج}$ ، $\overline{م ج} \perp \overleftrightarrow{ب ج}$ ∴ $\overline{ن ب} \,//\, \overline{م ج}$

∵ $\overline{ن هـ} \perp \overline{ج هـ}$ ∴ الشكل ن ب ج هـ مستطيل

∴ ج هـ = ن ب = ٥ سم ∴ م هـ = ٨ - ٥ = ٣ سم

∵ ن م = ٥ + ٨ = ١٣ سم (الدائرتان متماستان من الخارج)

في المثلث م هـ ن ∵ ق (∠ م هـ ن) = ٩٠°

∴ ن هـ = $\sqrt{(١٣)^٢ - (٣)^٢}$ = $\sqrt{١٦٠}$ = ٤ $\sqrt{١٠}$ سم ∴ ب ج = ٤ $\sqrt{١٠}$ سم

---

٣ ∵ $\overleftrightarrow{م ن}$ خط المركزين ، $\overline{أب}$ وتر مشترك

∴ $\overleftrightarrow{م ن} \perp \overline{أب}$ ∴ ق (∠ م س ج) = ٩٠°

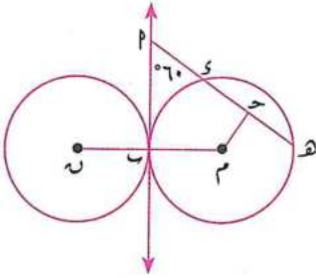
∵ ص منتصف $\overline{هـ و}$ ∴ ق (∠ م ص و) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي الداخلة = ٣٦٠°

∴ ق (∠ ص م س) = ٣٦٠° - (٥٣° + ٩٠° + ٩٠°) = ١٢٧°

∴ (٣ل - ٨)° = ١٢٧° ∴ ٣ل = ١٣٥ ∴ ل = $\frac{١٣٥}{٣}$ = ٤٥

مثـال ١١



في الشكل المقابل:

م ، ن دائرتـان متماستـان من الخارج في ب ،

أ ب ↔ مماس مشترك للدائرتين ، حـ منتصف ى هـ ،

ق (∠ ى أ ب) = ٦٠°   **أوجـد:** ق (∠ حـ م ب)

الحـل

∵ م ن ↔ خط المركزين ، أ ب ↔ مماس مشترك

∴ م ن ↔ ⊥ أ ب ↔   ∴ ق (∠ م ب أ) = ٩٠°

∵ هـ ى وتر في الدائرة م ، حـ منتصف هـ ى   ∴ ق (∠ م حـ ى) = ٩٠°

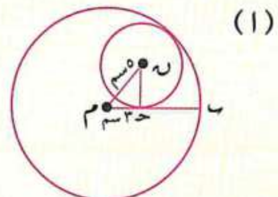
∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي الداخلة = ٣٦٠°

∴ ق (∠ حـ م ب) = ٣٦٠° - (٩٠° + ٩٠° + ٦٠°) = ١٢٠°

س؟ سؤال ٦

① 📖 **في كل من الأشكال الآتيـة، أكمل:**

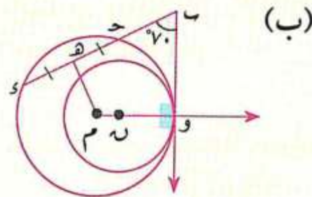
(أ)



إذا كان: م ب مماس للدائرة ن

فـإن : ب حـ = ... سم

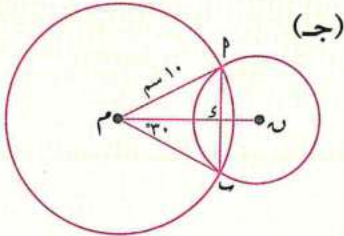
(ب)



إذا كان: ب و ← مماس مشترك للدائرتين

فـإن : ق (∠ هـ م ن) = ...°

(جـ)



أ ب = ... سم

② 📖 **في الشكل المقابل:** م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب ،

حـ ى قطر في الدائرة م ، حـ س ← مماس للدائرة م عند حـ ،

حـ س ← ∩ ب أ ← = {هـ} ، م ن ↔ ∩ أ ب = {و}

أثبـت أن: ق (∠ س هـ و) = ق (∠ حـ م ن)



أوضاع نقطة ومستقيم ودائرة بالنسبة لدائرة

تذكر ▲ فهم ▲ تطبيق ▲ تحليل

أسئلة تفاعلية



أسئلة الكتاب المدرسى ▸ أسئلة موقع الوزارة

تدريبات الأضـــواء

أولاً موضع نقطة بالنسبة لدائرة

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كانت النقطة ᵖ تقع خارج الدائرة م ، فإن طول نصف قطر الدائرة م يكون .... طول $\overline{ᵖم}$

(أ) $>$ (ب) $<$ (جـ) $=$ (د) $\leq$ (شمال سيناء ٢٠١٣)

٢ إذا كانت ᵖ نقطة فى مستوى دائرة م طول نصف قطرها نق، وكان ٠ < م ᵖ < نق ، فإن ᵖ تقع ....

(أ) خارج الدائرة (ب) داخل الدائرة (جـ) على الدائرة (د) على مركز الدائرة

٣ إذا كانت م دائرة طول قطرها ٧ سم ، ᵖ نقطة فى مستواها وكان مᵖ = ٤ سم، فإن النقطة ᵖ تقع ....

(أ) داخل الدائرة (ب) خارج الدائرة (جـ) على الدائرة (د) غير ذلك (الجيزة ٢٠٢٣)

٤ إذا كانت النقطة ᵖ تقع على الدائرة م التى طول قطرها ٦ سم، فإن ᵖم = ... سم. (بنى سويف ٢٠١٣)

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

٥ إذا كانت م دائرة طول قطرها ١٤ سم، مᵖ = (٢س + ٣) سم، حيث ᵖ تقع على الدائرة، فإن س = ...

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١ (القليوبية ٢٠١٧)

٦ إذا كانت م دائرة طول قطرها ٨ سم، ᵖ نقطة داخل الدائرة فإذا كان مᵖ = (٣ س − ٢) سم ، فإن س ∈ ....

(أ)]−∞ ، ٢[(ب)]$\frac{٢}{٣}$ ، ٢[(جـ) [$\frac{٢}{٣}$ ، ٢] (د)]٢ ، ∞[

---

٢ أكمل ما يأتى:

١ دائرة طول نصف قطرها نق سم، ᵖ نقطة فى مستواها فإذا كان مᵖ = $\frac{٣}{٢}$ نق ، فإن ᵖ تقع .... الدائرة. (الأقصر ٢٠٢٣)

٢ إذا كانت ᵖ نقطة تقع فى مستوى الدائرة م التى طول نصف قطرها يساوى ١٠سم، وكانت ᵖم = ٥ $\sqrt{٣}$ سم، فإن النقطة ᵖ تقع .... الدائرة.

٣ إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها يساوى ٣ $\sqrt{٧}$ سم، وكانت النقطة ᵖ تقع على الدائرة م ، فإن ᵖم = ... سم.

٤ إذا كانت ᵖ نقطة تقع على الدائرة م التى طول نصف قطرها يساوى (٢س − ٥) سم، وكانت ᵖم = (س + ٣) سم فإن طول نصف قطر الدائرة يساوى .... سم.

٥ إذا كانت مساحة الدائرة م تساوى ٤٩π سم^{٢}، أ نقطة فى مستواها حيث م أ = ١٤ سم ، فإن أ تقع .... الدائرة م.

٣ إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٥ سم، أ نقطة فى مستوى الدائرة، م أ = (٢ س - ٣) سم فأوجد قيم س الممكنة (علمًا بأن أ تقع داخل الدائرة).

ثانيًا موضع مستقيم بالنسبة لدائرة

٤ اختر الإجابة الصحيحة:

١ المماسان المرسومان من نهايتى قطر فى دائرة يكونان .... (بورسعيد ٢٠٢٣)

(أ) متعامدين (ب) متوازيين (جـ) متقاطعين (د) متطابقين

٢ المماس لدائرة طول قطرها ٦ سم يكون على بُعد .... سم من مركزها. (بورسعيد ٢٠٢٤)

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٦ (د) ١٢

٣ إذا كانت م دائرة، طول نصف قطرها نق وكان ل مستقيمًا فى نفس مستوى الدائرة ويبعد عن مركزها $\frac{٤}{٥}$ نق ، فإن المستقيم ل يكون ....

(أ) قاطعًا للدائرة (ب) خارج الدائرة

(جـ) مماسًّا للدائرة (د) أحد محاور التماثل للدائرة

٤ دائرة م طول قطرها ١٠ سم، فإذا كان المستقيم ل خارج الدائرة فإن بُعد مركز الدائرة عن المستقيم ل ∈ ....

(أ) [٠ ، ٥] (ب)]٠ ، ٥[(جـ)]٠ ، ٥] (د)]٥ ، ∞[

٥ إذا كان: ل مستقيمًا خارج دائرة مركزها نقطة الأصل م (٠ ، ٠) وطول نصف قطرها يساوى ٣سم وكان ل يبعد عن م مسافة س فإن : س ∈ .... (الغربية ٢٠١٦)

(أ) [٣ ، ∞[(ب)]٣ ، ∞[(جـ) [١,٥ ، ٣] (د)]١,٥ ، ٣[

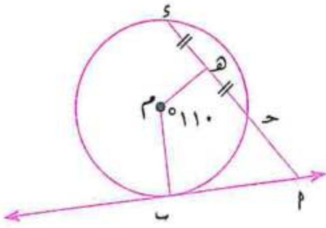
٦ إذا كان طول قطر الدائرة م يساوى ٦ سم ، والبُعد بين المستقيم ل ومركز الدائرة (م) يساوى ٣ سم، فإن المستقيم ل ....

(أ) قاطع للدائرة (ب) مماس للدائرة (جـ) خارج الدائرة (د) محور تماثل

٧ دائرة طول قطرها (٢ س) سم، إذا كان المستقيم ل يبعد عن مركزها (س + ١) سم ، فإن المستقيم ل يكون .... للدائرة. (الدقهلية ٢٠١٨)

(أ) قاطعًا (ب) خارجًا (جـ) مماسًّا (د) محور تماثل

٨ في الشكل المقابل:



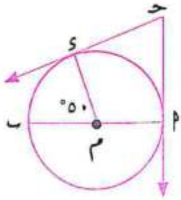
إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ب أ}}$ مماساً للدائرة م ، ق (∠هـ م ب) = ١١٠°،

فإن ق (∠ب أ حـ) = ...

(أ) ٥٥°　　(ب) ٧٠°

(جـ) ٩٥°　　(د) ١١٠°

٩ في الشكل المقابل:



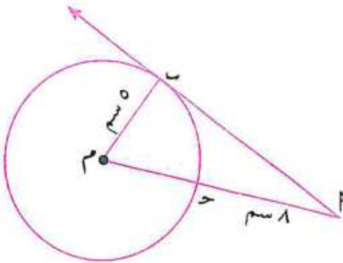
إذا كان $\overline{\text{أ ب}}$ قطرًا في الدائرة م ، $\overleftarrow{\text{حـ أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ مماسين لها عند أ ، ء

، ق (∠ء م ب) = ٥٠°، فإن ق (∠ ء حـ أ) = ...°

(أ) ٣٠　　(ب) ٩٠

(جـ) ٥٠　　(د) ١٣٠

١٠ في الشكل المقابل: (القاهرة ٢٠١٣)



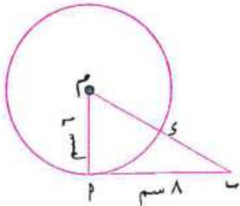
إذا كان $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة م ، م ب = ٥ سم

، أ حـ = ٨ سم، فإن أ ب = ... سم.

(أ) ٥　　(ب) ٨

(جـ) ١٢　　(د) ١٣

١١ في الشكل المقابل: إذا كانت $\overline{\text{أ ب}}$ قطعة مماسة للدائرة م عند أ

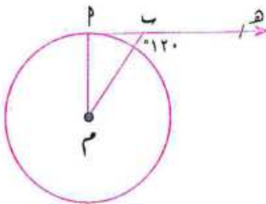


فإن طول $\overline{\text{ء ب}}$ = ... سم

(أ) ١٠　　(ب) ٨

(جـ) ٦　　(د) ٤

١٢ في الشكل المقابل : $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة عند أ ،



فإذا كان ق (∠م ب هـ) = ١٢٠° فإن ق (∠أ م ب) = ... °

(أ) ٣٠　　(ب) ٦٠

(جـ) ٨٠　　(د) ٩٠

٥ أكمل ما يأتي:

١ إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة م = ∅ فإن المستقيم ل يقع ....

٢ إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة م = { أ } فإن المستقيم ل يمثل .... للدائرة م .

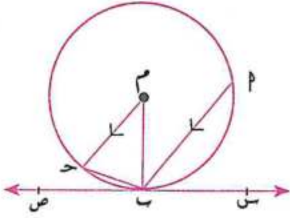
٣ إذا كان المستقيم ل ∩ الدائرة م = { حـ ، ء } ، فإن المستقيم ل ∩ سطح الدائرة م = ...

٤ فى الشكل المقابل:

دائرة م ، $\overleftrightarrow{سص}$ مماس للدائرة عند ب ، $\overline{أب}$ // $\overline{مح}$

فإذا كان ق (∠ أ ب س) = ٥٠°

فإن ق (∠ م ب ح) = ...°

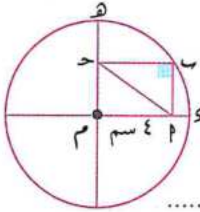


٥ فى الشكل المقابل:

دائرة م ، أ ب ح م مستطيل، أ م = ٤ سم

، طول نصف قطر الدائرة يساوى ٥ سم

فإن طول $\overline{أح}$ = ... ، طول $\overline{أ ء}$ = ... ، وطول $\overline{حهـ}$ = ...

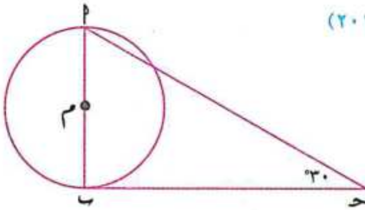


٦ فى الشكل المقابل: (سوهاج ٢٠١٧)

دائرة م محيطها ٤٤سم، $\overline{أب}$ قطر فيها

، $\overline{بح}$ مماس للدائرة عند ب ، ق (∠ ح) = ٣٠°

أوجد: طول $\overline{بح}$ (اعتبر أن $\pi \simeq \frac{٢٢}{٧}$)



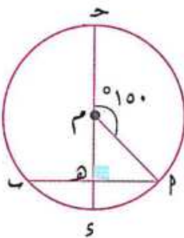
٧ فى الشكل المقابل:

$\overline{بأ}$ وتر فى دائرة مركزها م ، $\overline{حء}$ قطر فيها

$\overline{حء}$ ⊥ $\overline{أب}$ ، فإذا كان أ ب = ٨ سم

، ق (∠ أ م ح) = ١٥٠°

فأوجد طول: $\overline{حء}$

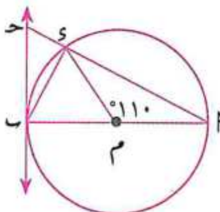


٨ فى الشكل المقابل:

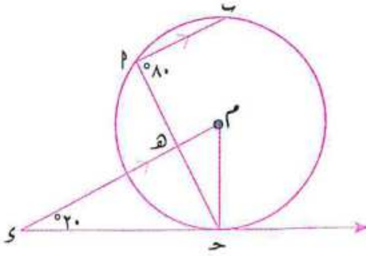
$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ، $\overleftrightarrow{بح}$ مماس للدائرة عند ب

فإذا كان ق (∠ أ م ء) = ١١٠°

فأوجد: ق (∠ ء ب ح) ، ق (∠ ح)



٩ في الشكل المقابل:



ء حـ يمس الدائرة م عند حـ ، أ ب // ء م

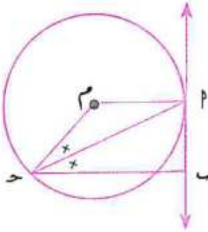
، ق (∠ ب أ حـ) = ٨٠° ، ق (∠ م ء حـ) = ٢٠°

، أ حـ ∩ ء م = {هـ}

أوجد: ق (∠ هـ حـ م)

---

١٠ في الشكل المقابل:



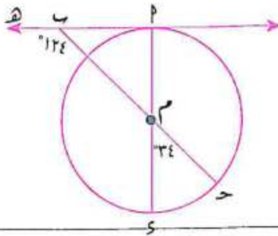
إذا كانت م دائرة حيث إن أ ب ⊥ حـ ب

، ق (∠ م حـ أ) = ق (∠ ب حـ أ)

أثبت أن: أ ب مماس للدائرة عند النقطة أ .

---

١١ في الشكل المقابل:

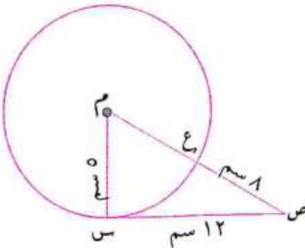


دائرة مركزها م ، ق (∠ حـ م ء) = ٣٤° ، ق (∠ هـ ب م) = ١٢٤°

أثبت أن: أ ب مماس للدائرة م .

---

١٢ في الشكل المقابل:



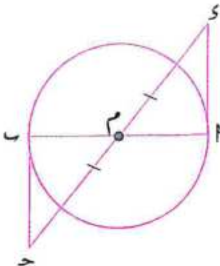
م دائرة طول نصف قطرها ٥ سم ، س ص = ١٢ سم

، م ص ∩ الدائرة م = {ع} ، ع ص = ٨ سم

أثبت أن: س ص قطعة مماسة للدائرة م عند س

---

١٣ في الشكل المقابل:

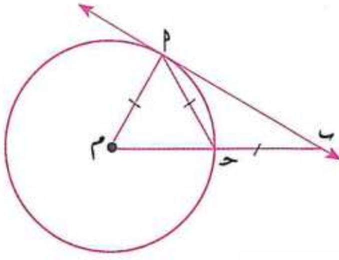


أ ب قطر في الدائرة م ، أ ء قطعة مماسة لها عند أ ،

رسم ء م وفرضت عليه نقطة حـ بحيث ء م = حـ م

أثبت أن: ب حـ قطعة مماسة للدائرة عند ب

١٤ في الشكل المقابل: (الغربية ٢٠١٦)

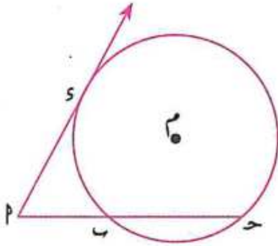


دائرة مركزها م ، ٲ حـ = ٲ م = ب حـ

أثبت أن: $\overleftrightarrow{\text{ٲ ب}}$ مماس للدائرة م عند ٲ

---

١٥ في الشكل المقابل:



م دائرة طول نصف قطرها ٥ سم ، ٲ نقطة خارج الدائرة،

$\overleftrightarrow{\text{ٲ ء}}$ مماس للدائرة م عند ء ، $\overrightarrow{\text{ٲ ب}}$ يقطع الدائرة في ب ، حـ

على الترتيب حيث ٲ ب = ٤ سم ، ٲ حـ = ١٢ سم

١ أوجد بُعد الوتر $\overline{\text{ب حـ}}$ عن مركز الدائرة.

٢ احسب طول $\overline{\text{ٲ ء}}$

ثالثًا موضع دائرة بالنسبة لدائرة أخرى

١٦ اختر الإجابة الصحيحة:

١ محور التماثل للوتر المشترك $\overline{\text{ٲ ب}}$ لدائرتين م ، ن متقاطعتين في ٲ ، ب هو ....

(أ) $\overleftrightarrow{\text{م ٲ}}$ (ب) $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ (جـ) $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ (د) $\overleftrightarrow{\text{ن ٲ}}$

٢ إذا كان سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = {ٲ} فإن الدائرتين م ، ن ....

(أ) متباعدتان (ب) متقاطعتان

(جـ) متحدتا المركز (د) متماستان من الخارج

٣ عدد محاور تماثل الدائرتين المتقاطعتين والمتطابقتين هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائي

٤ عدد محاور تماثل دائرتين متماستين من الخارج يساوي .... (الدقهلية ٢٠٢١)

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) صفرًا

٥ دائرتان م ، ن طولا نصفي قطريهما ٥سم، ٣سم فإذا كان م ن = ٨سم، فإن الدائرتين ....

(أ) متقاطعتان (ب) متماستان من الداخل (الأقصر ٢٠٢٤)

(جـ) متماستان من الخارج (د) متباعدتان

٦ إذا كان م ، ن دائرتان متقاطعتان وطولا نصفي قطريهما ٩سم، ٤سم على الترتيب، فإن م ن ∈ ....

(أ)]٥ ، ١٣[(ب) [٥ ، ١٣] (جـ)]٤ ، ٩[(د) [٤ ، ٩] (أسوان ٢٠٢٤)

٧ م ، ن دائرتـان متماستـان من الخارج، إذا كان طول نصف قطـر إحداهما ٥سم ، م ن = ٩سم ،
فإن طول نصف قطر الأخرى = ...سم. (بنى سويف ٢٠٢٤)

(ا) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٩ (د) ١٤

٨ دائرتـان م ، ن متماستـان من الداخل، طولا نصفى قطريهما ٥سم ، ٩سم ،
فإن م ن = ...سم. (البحر الأحمر ٢٠٢٣)

(ا) ١٤ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٩

٩ م ، ن دائرتـان طولا نصفى قطريهما ٨ سم ، ٦ سم على الترتيـب، فإذا كان م ن = ١٤ سم،
فإن الدائرتين تكونان ....

(ا) متماستين من الداخل (ب) متماستين من الخارج
(جـ) متقاطعتين (د) متباعدتين

١٠ إذا كان طول نصف قطر الدائرة م يساوى طول نصف قطر الدائرة ن يساوى م ن، فإن الدائرتين تكونان.................. .

(ا) متداخلتين (ب) متماستين من الخارج
(جـ) متباعدتين (د) متقاطعتين

١١ م ، ن دائرتان متماستـان من الخارج، طول نصـف قطـر الدائـرة م يساوى ٤ سم ،
فإذا كان: م ن = ٧ سم، فإن محيط الدائرة ن يساوى .... سم. (المنوفية ٢٠١٦)

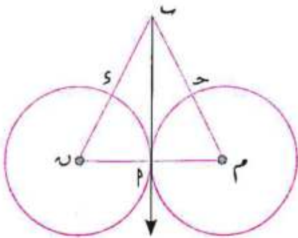
(ا) ٤ π (ب) ٦ π (جـ) ٧ π (د) ٩ π

١٢ دائرتان طولا نصفى قطريهما ٣ سم ، ٧ سم ، تكونـان متماستيـن
إذا كان البُـعد بين مركزيهما $\in$ .... (الإسماعيلية ٢٠٢٣)

(ا)]٤ ، ١٠[(ب)]١٠ ، ∞[(جـ)]٠ ، ٤[(د) {٤ ، ١٠}

---

١٧ فى الشكل المقابل: (الشرقية ٢٠١٣)

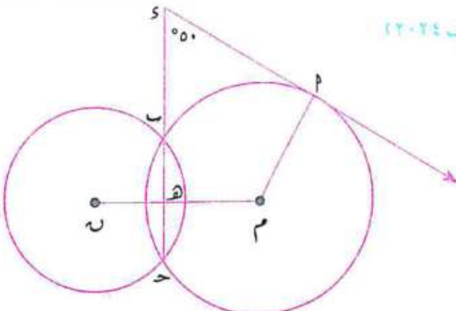


م ، ن دائرتان متطابقتان ومتماستان من الخارج عند ا

$\overleftrightarrow{\text{ا ب}}$ مماس مشترك **أثبت أن:** ب حـ = ب ء

---

١٨ فى الشكل المقابل: (بنى سويف ٢٠٢٤)



م ، ن دائرتان متقاطعتان فى ب ، حـ

ق (∠ ء) = ٥٠° ، $\overleftrightarrow{\text{م ن}} \cap \overleftrightarrow{\text{ء حـ}}$ = {هـ}

$\overleftarrow{\text{ء ا}}$ مماس للدائرة عند ا

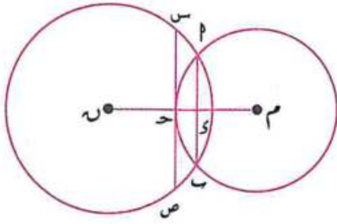
أوجد بالبرهان: ق (∠ ا م هـ)

١٩ **فى الشكل المقابل:**

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب

، $\overline{\text{س ص}}$ مماس للدائرة م عند حـ

أثبت أن: $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{س ص}}$

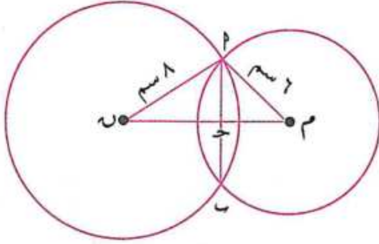


٢٠ **فى الشكل المقابل:**

م ، ن دائرتان متقاطعتان عند أ ، ب

فإذا كان $\overline{\text{م ن}}$ ∩ $\overline{\text{أ ب}}$ = {حـ}، وكان أ م = ٦ سم

، أ ن = ٨ سم وكان م ن = ١٠ سم **فأوجد:** طول $\overline{\text{أ ب}}$



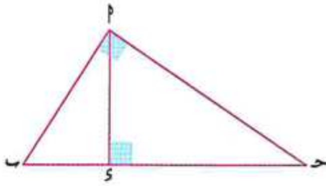
تذكر نظرية إقليدس:

فى △ أ ب حـ القائم الزاوية فى أ ، إذا رُسم $\overline{\text{أ ء}}$ ⊥ $\overline{\text{ب حـ}}$

فإن $(\text{أ ب})^2$ = ب ء × ب حـ ، $(\text{أ ء})^2$ = ء ب × ء حـ ،

$(\text{أ حـ})^2$ = حـ ء × حـ ب

أ ء × ب حـ = أ ب × أ حـ

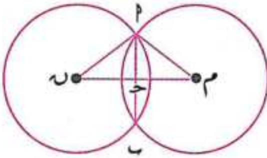


٢١ **فى الشكل المقابل:** (الفيوم ٢٠١٦)

م ، ن دائرتان متطابقتان ومتقاطعتان فى أ ، ب

فإذا كان م أ = ٥ سم ، أ ب = ٦ سم

فاحسب بالبرهان: طول $\overline{\text{م ن}}$

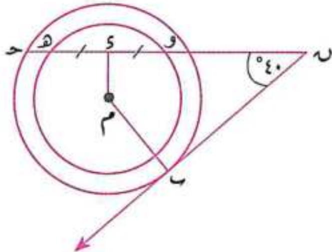


٢٢ **فى الشكل المقابل:** (الفيوم ٢٠٢٣)

دائرتان متحدتا المركز م ، $\overrightarrow{\text{ن ب}}$ مماس للدائرة الكبرى

، $\overline{\text{ن حـ}}$ يقطع الدائرة الصغرى فى و ، هـ ، ء منتصف $\overline{\text{و هـ}}$

، ق (∠ ن) = ٤٠° **أوجد بالبرهان:** ق (∠ ء م ب)

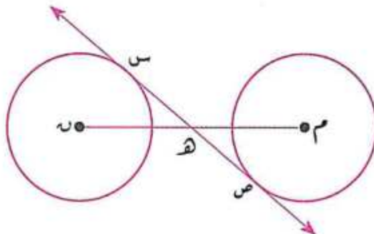


٢٣ **فى الشكل المقابل:**

م ، ن دائرتان متطابقتان ومتباعدتان

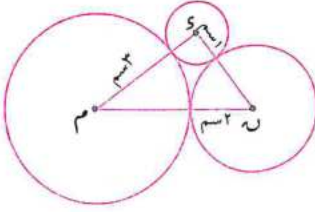
$\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مماس مشترك للدائرتين م ، ن عند س ، ص

أثبت أن: هـ منتصف كل من $\overline{\text{م ن}}$ ، $\overline{\text{س ص}}$



تفكير إبداعي TIMSS

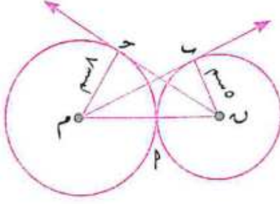
٢٤ في الشكل المقابل:



ثلاث دوائر متماسة مثنى مثنى، فإذا كان طول نصف قطر الدائرة م يساوى ٣ سم، وطول نصف قطر الدائرة ن يساوى ٢ سم، وطول نصف قطر الدائرة ء يساوى ١ سم، **فأوجد مساحة المثلث ن ء م**

---

٢٥ في الشكل المقابل:



م ، ن دائرتان متماستان من الخارج في أ

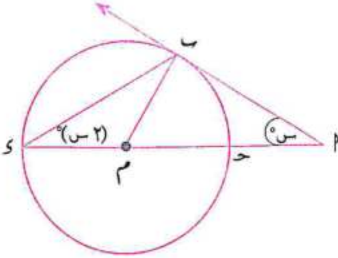
$\overleftrightarrow{\text{ن حـ}}$ مماس للدائرة م ، $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$ مماس للدائرة ن

فإذا كان طول نصف قطر الدائرة ن يساوى ٥ سم،

وطول نصف قطر الدائرة م يساوى ٨ سم، **فأوجد طول** $\overline{\text{ن حـ}}$

---

٢٦ في الشكل المقابل:



$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة م عند ب ، $\overline{\text{حـ ء}}$ قطر فيها

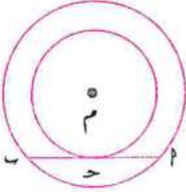
فإذا كان ق (∠ ب أ م) = س° ،

ق (∠ م ء ب) = (٢ س)°

فأوجد قيمة س

---

٢٧ في الشكل المقابل: (الدقهلية ٢٠١٩)



دائرتان متحدتا المركز م ، $\overline{\text{أ ب}}$ وتر في الدائرة الكبرى

ويمس الدائرة الصغرى عند حـ، فإذا كان أ ب = ١٤ سم ،

فأوجد مساحة الجزء المحصور بين الدائرتين بدلالة π

تدريبات الكتاب المدرسى

١ أكمل ما يأتي:

(أ) إذا كان طول قطر الدائرة ٨ سم ، المستقيم ل يبعد عن مركزها ٤ سم ، فإن ل يكون ....

(ب) إذا كان سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = { أ } فإن الدائرتين م ، ن تكونان ....

(جـ) م ، ن دائرتان متقاطعتان، طولا نصفي قطريهما ٣ سم ، ٤ سم على الترتيب،

فإن م ن ∈ .... (بورسعيد ٢٠٢٤)

(د) إذا كانت مساحة الدائرة م يساوى ١٦ π سم^2، أ نقطة في مستواها حيث م أ = ٨ سم،

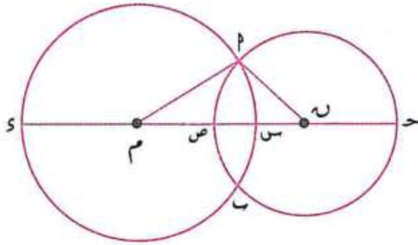
فإن أ تقع .... الدائرة م

(هـ) دائرة م طول قطرها ٦ سم فإذا كان المستقيم ل يقع خارج الدائرة، فإن بُعد مركز الدائرة عن المستقيم ل ∋ ....

(و) دائرة طول قطرها (٢ س + ٥) سم، المستقيم ل يبعد عن مركزها مسافة (س + ٢) سم، فإن المستقيم ل يكون ....

---

٢ **فى الشكل المقابل:**



م ، ن دائرتان متقاطعتان عند أ ، ب
طولا نصفى قطريهما ٨ سم ، ٦ سم على الترتيب،
س ص = ٤ سم

ادرس الشكل ثم أجب عن الأسئلة الآتية:

(أ) **أكمل:** ص م = ... سم ، حـ س = ... سم ، حـ ء = ... سم

(ب) هل محيط المثلث أ ن م = طول $\overline{\text{حـ ء}}$ ؟ **فسر إجابتك.**

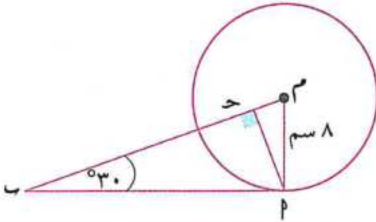
(جـ) ما قياس زاوية ن أ م ؟

(د) **أوجد** مساحة المثلث ن أ م

(هـ) ما طول الوتر المشترك $\overline{\text{أ ب}}$ ؟

---

٣ **فى الشكل المقابل:**

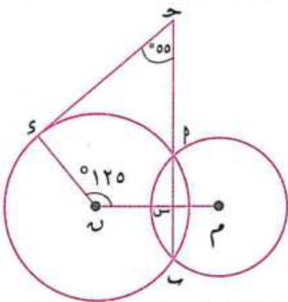


$\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة م عند أ ، م أ = ٨ سم ،
ق (∠ أ ب م) = °٣٠

أوجد طول كل من: $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$

---

٤ **فى الشكل المقابل:** (أزهر مطروح ٢٠٢٢)



م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب
حـ ∋ $\overrightarrow{\text{ب أ}}$ ، ء ∋ الدائرة ن ،
ق (∠ م ن ء) = °١٢٥ ، ق (∠ ب حـ ء) = °٥٥

أثبت أن: $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ مماس للدائرة ن عند ء

---

٥ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م ، $\overleftrightarrow{\text{أ حـ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ مماسان للدائرة م ، رُسم $\overrightarrow{\text{حـ م}}$ قطع الدائرة م فى س ، ص ويقطع $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ فى هـ **أثبت أن:** حـ س = ص هـ

---

٦ م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب ، م أ = ١٢ سم ، ن أ = ٩ سم ، م ن = ١٥ سم

أوجد: طول $\overline{\text{أ ب}}$

١ اختـر الإجابـة الصحيحــة:

١ دائرة محيطها ٦ π والمستقيم ل يبعد عن مركزها ٣سم، فإن المستقيم ل يكون .... للدائرة.

(ا) مماسًا (ب) قاطعًا (جـ) خارجًا (د) قطرًا (الشرقية ٢٠٢٢)

٢ م ، ن دائرتـان طولا نصفى قطريهما ٥ سم ، ٣سم، إذا كان م ن = ٦ سم،

فإن الدائرتين تكونان .... (دمياط ٢٠٢٢)

(ا) متباعدتين (ب) متماستين من الخارج

(جـ) متقاطعتين (د) متداخلتين

٣ م ، ن دائرتان متماستان من الخارج وطول نصف قطر الدائرة م يساوى ٣سم وطول $\overline{من}$ = ٧سم،

فإن محيط الدائرة ن يساوى ....سم . (سوهاج ٢٠١٨)

(ا) ١٤ π (ب) ٨ π (جـ) ٧ π (د) ٦ π

٤ إذا كان طول العمود المرسوم من مركز الدائرة م على المستقيم ل يساوى ٦ سم وكان طول قطر

الدائرة يساوى ٦ سم، فإن ل .... الدائرة. (قنا ٢٠٢٢)

(ا) يقطع (ب) يمس (جـ) خارج (د) يمر بمركز

---

٢ ١ م ، ن دائرتان طولا نصفى قطريهما ٨سم، ٦ سم على الترتيب.

فأوجد طول $\overline{من}$ فى الحالات الآتية:

(ا) الدائرتان متماستان من الخارج. (ب) الدائرتان متماستان من الداخل. (أسيوط ٢٠٢٢)

(جـ) الدائرتان متحدتا المركز.

٢ فى الشكل المقابل: (قنا ٢٠٢٤)

$\overline{جـ ء}$ قطر فى الدائرة م ، ا ∈ $\overleftarrow{ءجـ}$ بحيث ا جـ = م جـ

$\overleftarrow{ا ب}$ مماس للدائرة م عند ب

أوجد ق ($\angle$ ا ب ء)

ذاكر الدرس ٣

تعيين الدائـرة



فكر وناقش

هل يمكن: رسم دائرة بمعلومية مركزها وطول نصف قطرها؟

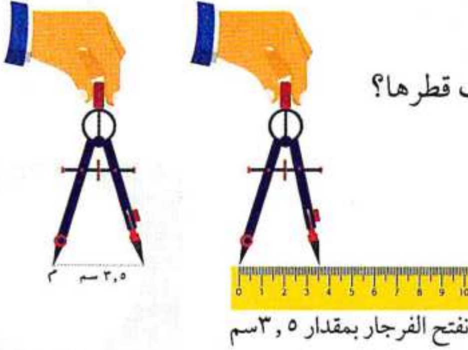
فمثلًا: **لرسم دائرة مركزها م وطول قطرها ٧سم**

أولًا: نحدد نقطة المركز م ، وطول نصف القطر

حيث نق = ٧ ÷ ٢ = ٣,٥سم

ثانيًا: نثبت سن الفرجار على النقطة م

ونحرك الفرجار دورة كاملة.



نفتح الفرجار بمقدار ٣,٥سم

نثبت سن الفرجار فيرسم الدائرة

- ما عدد الدوائر التى يمكن رسمها وتمر بنقطة واحدة؟
- ما عدد الدوائر التى يمكن رسمها وتمر بنقطتين وكذلك ثلاث نقاط؟

المقصود بتعيين الدائرة: هو رسم الدائرة تحت شروط معينة.

- **الدائرة تتعين إذا عُلم:** ١ مركزها. ٢ طول نصف قطرها.

أولًا رسم دائرة تمر بنقطة معلومة

المعطيات : ٩ نقطة معلومة فى المستوى

المطلوب : رسم دائرة تمر بالنقطة ٩

الإنشاء :

١ خذ أى نقطة $م_١$ (نقطة اختيارية) فى نفس المستوى.

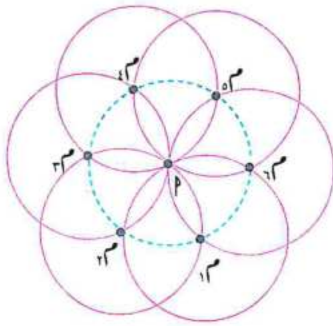
٢ ضع سن الفرجار عند $م_١$ وبفتحة تساوى $م_١$٩
ارسم دائرة تمر بـ ٩ ومركزها $م_١$

٣ ضع سن الفرجار عند نقطة $م_٢$ ، وبفتحة تساوى $م_٢$٩
ارسم دائرة تمر بـ ٩ ومركزها $م_٢$

٤ كرر نفس ما سبق، ولكن مع تغيير مكان م وفتح الفرجار بفتحة جديدة مثل $م_٣$٩ ، $م_٤$٩
ماذا تلاحظ؟

مما سبق نستنتج أنه: يمكن رسم **عدد لا نهائى** من الدوائر تمر بنقطة معلومة مثل ٩

قاعـدة



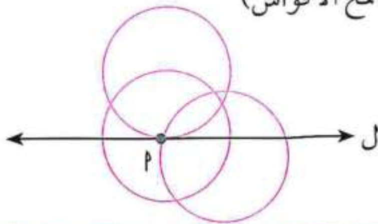
إذا كانت : أنصاف أقطار هذه الدوائر متساوية فى الطول،

فـإن : مراكزها تقع على دائرة مطابقة لها ومركزها النقطة م

حيث يكون: $م_١م = م_٢م = م_٣م = \dots\dots$ وهكذا

مثـال ١

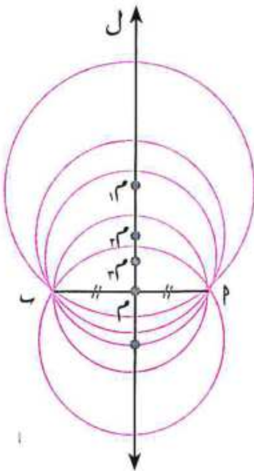
إذا كان ل مستقيماً فى المستوى، م نقطة معلومة حيث م ∈ ل (باستخدام الأدوات الهندسية) **ارسم دائرة تمر بالنقطة م ، وطول نصف قطرها ٣ سم ، كم دائرة يمكن رسمها؟** (لا تمح الأقواس)



الحـل

يمكن رسم عدد لانهائى من الدوائر التى طول نصف قطرها ٣سم وتمر بـ م ∈ ل

ثانيًا رسم دائرة تمر بنقطتين معلومتين



المعطيات : م ، ب نقطتان معلومتان فى المستوى

المطلوب : رسم دائرة تمر بالنقطتين م ، ب أى أن $\overline{مب}$ يكون وترًا فى الدائرة م

الإنشاء :

١ ارسم القطعة المستقيمة $\overline{مب}$

٢ ارسم المستقيم ل محور تماثل $\overline{مب}$ حيث ل ∩ $\overline{مب}$ = {م}
(مركز الدائرة التى تمر بالنقطتين م ، ب يقع على محور تماثل $\overline{مب}$)

٣ خذ أى نقاط اختيارية مثل م ∈ ل، ثم ارتكز بسن الفرجار فى م وبفتحة تساوى مم ارسم الدائرة م تجدها تمر بالنقطة ب

٤ ضع سن الفرجار عند نقطة أخرى مثل $م_١$، حيث $م_١$ ∈ ل، وبفتحة تساوى $م_١م$ ارسم الدائرة $م_١$ تجدها تمر بالنقطة ب

٥ كرر العمل السابـق عند $م_٢$ ، $م_٣$ ، ....

ومما سبق نستنتج ما يأتى:

- يوجد عدد **لا نهائى** من الدوائر تمر بنقطتين معلومتين مثل ٩ ، ب **ومراكز هذه الدوائر** تقع جميعها على **محور تماثل** $\overline{٩ب}$
- طول نصف قطر أصغر دائرة يمكن رسمها لكى تمر بالنقطتين ٩ ، ب يكون **مساويًا** $\frac{١}{٢}$ ٩ ب
- لا يمكن رسم دائرة تمر بالنقطتين ٩ ، ب إذا كان طول نصف قطرها **أصغر من** $\frac{١}{٢}$ ٩ ب
- يمكن رسم دائرتين فقط تمران بالنقطتين ٩ ، ب عند كل قيمة لنصف القطر **أكبر من** $\frac{١}{٢}$ ٩ ب
- لا يمكن أن تتقاطع دائرتان فى أكثر من نقطتين، وإذا تقاطعت دائرتان فى أكثر من نقطتين **تطابقتا**.

مثال ٢

(باستخدام الأدوات الهندسية) **ارسم $\overline{٩ب}$ طولها ٤ سم، ثم ارسم كلًّا مما يأتى مع ذكر عدد الحلول الممكنة:**

١ دائرة تمر بالنقطتين ٩ ، ب وطول نصف قطرها ٣سم

٢ دائرة تمر بالنقطتين ٩ ، ب وطول نصف قطرها ٢سم

٣ دائرة تمر بالنقطتين ٩ ، ب وطول نصف قطرها ١,٥سم

٤ دائرة تمر بالنقطتين ٩ ، ب وطول نصف قطرها ٥سم

الحل

١ ∵ نق > $\frac{١}{٢}$ ٩ ب

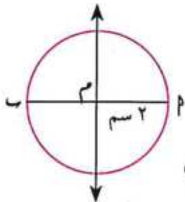
∴ يمكن رسم دائرتين، طول نصف قطر كل منهما ٣ سم، ومركزهما $م_١$ ، $م_٢$

(دائرتـان متطابقتـان)



٢ ∵ نق = $\frac{١}{٢}$ ٩ ب

∴ يمكن رسم دائرة واحدة (أصغر دائرة) طول نصف قطرها ٢ سم، ومركزها م



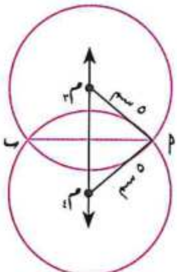
٣ ∵ نق < $\frac{١}{٢}$ ٩ ب

∴ لا يمكن رسم دائرة تمر بالنقطتين ٩ ، ب طول نصف قطرها ١,٥سم

(عدد الدوائر = صفر)

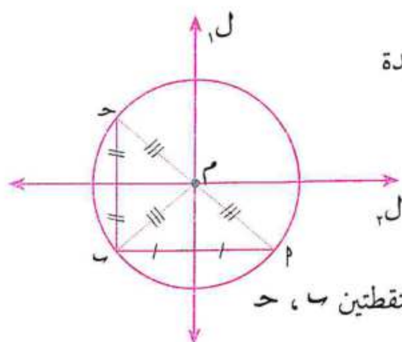
٤ ∵ نق > $\frac{١}{٢}$ ٩ ب

∴ يمكن رسم دائرتين طول نصف قطر كل منهما ٥ سم ، ومركزهما $م_٣$ ، $م_٤$



ثالثًا رسم دائرة تمر بثلاث نقاط معلومة

توجد حالتـــان:



الحالـة الأولى: إذا كانت النقط ء ، ب ، ح ليست على استقامة واحدة

نرسم المستقيم $ل_1$ محور تماثل $\overline{ء ب}$

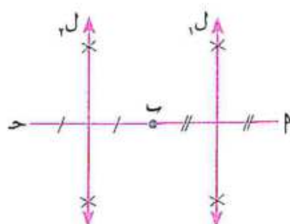
ونرسم المستقيم $ل_2$ محور تماثل $\overline{ب ح}$ **فنجـد أن:**

$ل_1 \cap ل_2 = \{م\}$، ضع سن الفرجار عند النقطة م

وبفتحة تساوى م ء أو م ب أو م ح نرسم الدائرة م التى نجدها تمر بالنقطتين ب ، ح

م ء = م ب = م ح = نق

أى أن: أى ثلاث نقاط لا تنتمى لمستقيم واحد تمر بها دائـرة وحيـدة.



الحالـة الثانيـة: إذا كانت النقط ء ، ب ، ح على استقامة واحدة

نرسم المستقيم $ل_1$ محور تماثل $\overline{ء ب}$

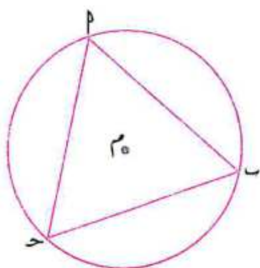
ونرسم المستقيم $ل_2$ محور تماثل $\overline{ب ح}$ **فنجـد أن:**

$ل_1 \cap ل_2 = \varnothing$ ، $ل_1 // ل_2$

∴ لا يمكن رسم دائرة تمر بالنقاط الثلاث ء ، ب ، ح

أى أنه: لا يمكـن رسم دائرة تمـر بثـلاث نقط تنتمى لمستقيم واحـد.

نتيجـــة ①



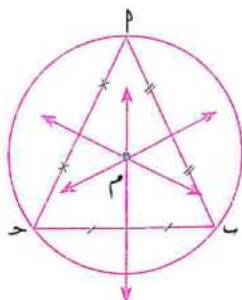
الدائرة التى تمر برءوس مثلث تسمـى دائـرة **خارجة للمثلـث.**

فمثلًا: فى الشكل المقابل:

المثلث ء ب ح رءوسه تقع على الدائرة م

فـإنه مثلث مرسوم داخل الدائرة.

نتيجـــة ②



الأعمدة المقامة على أضلاع مثلث من منتصفاتها تتقاطع فى نقطة واحدة هى "مركز الدائرة الخارجة لهذا المثلث".

أى أن: مركز الدائرة الخارجة للمثلث هى نقطة تقاطع محاور تماثل أضلاعه.

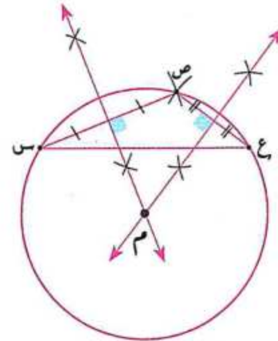
مثـال ٣

١ ارسم المثلث س ص ع الذى فيـه: س ص = ٥سم ، ص ع = ٣سم ، ع س = ٧سم
ثم ارسم الدائرة الخارجة للمثلث س ص ع

٢ ارسم المثلث ﺃ ب ﺣ القائم الزاوية فى ب حيث: ﺃ ب = ٤سم ، ب ﺣ = ٣سم
ثم ارسم الدائرة الخارجة لهذا المثلث، ثم عين مركزها.

الحـل

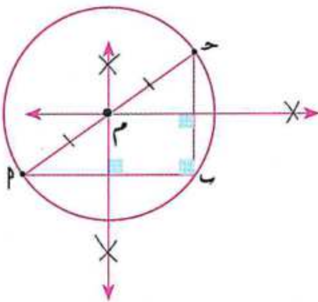
١ عند رسم △س ص ع نلاحظ أن (∠ص) منفرجة



يقع مركز الدائرة خارج المثلث

لاحظ أن: ∠ص مرسومة فى قطعة أصغر من نصف دائرة
« $\overline{\text{ع س}}$ وتر فى الدائرة م »

٢ عند رسم △ﺃ ب ﺣ نلاحظ أن (∠ب) قائمة



يقع مركز الدائرة عند منتصف $\overline{\text{ﺃ ﺣ}}$

لاحظ أن: ∠ب مرسومة فى قطعة تساوى نصف دائرة
« $\overline{\text{ﺃ ﺣ}}$ قطر فى الدائرة م »

نقاط هامة

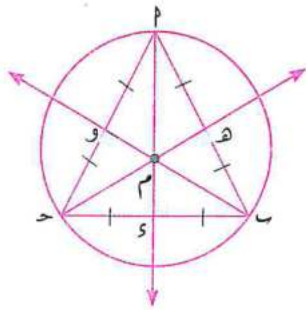
• موقع مركز الدائرة الخـارجـة للمثلث:

إذا كان: المثلث **حـاد** الزوايا	**فـإن:** م تقع **داخل** المثلث
إذا كان: المثلث **قائـم** الزاوية	**فـإن:** م تقع فى **منتصف** وتر المثلث
إذا كان: المثلث **منفرج** الزاوية	**فـإن:** م تقع **خارج** المثلث

سؤال ١

(باستخدام الأدوات الهندسية) **ارسم △ ﺃ ب ﺣ الذى فيـه:**
ﺃ ب = ﺃ ﺣ = ٣سم ، ب ﺣ = ٥ سم . **ثم ارسم الدائرة** المارة بالنقاط ﺃ ، ب ، ﺣ

حالـة خاصـة:



مركز الدائرة الخارجة للمثلث المتساوى الأضلاع هو نقطة تقاطع **محاور أضلاعه**، وهى نفسها نقطة تقاطع **متوسطاته**، وهى نفسها نقطة تقاطع **منصفات زواياه الداخلة**، وهى نفسها نقطة تقاطع **ارتفاعاته**.



نقاط هامة

- **يمكن رسم دائرة خارجة تمر برءوس كل من:**

أى مثلث | المربع | المستطيل | شبه المنحرف المتساوى الساقين | أى مضلع منتظم

- **لا يمكن رسم دائرة خارجة تمر برءوس كل من:**

متوازى الأضلاع | المعين | شبه المنحرف (غير متساوى الساقين)

س سؤال ٢

① (باستخدام الأدوات الهندسية) ارسم المثلث ٵ ب حـ الذى فيه:
ٵ ب = ٦ سم ، ب حـ = ٧سم ، حـ ٵ = ٨سم . **ثم ارسم الدائرة** المارة بالنقاط ٵ ، ب ، حـ
- **ما نوع المثلث بالنسبة لقياسات زواياه؟**
- **أين يقع مركز الدائرة بالنسبة للمثلث؟**

② **إذا كانت:** ٵ (١ ، ٣) ، ب (١ ، -١) ، حـ (-٣ ، -١)
فأثبت أن المثلث ٵ ب حـ قائم الزاوية، **ثم أوجد إحداثى** م **مركز الدائرة المارة برءوس المثلث** ٵ ب حـ

إرشـاد:
نوجد أطوال أضلاع Δ ٵ ب حـ ثم نحدد نوع المثلث بالنسبة لقياسات زواياه.

③ (باستخدام الأدوات الهندسية) **ارسم** قطعة مستقيمة $\overline{ٵب}$ طولها ٦سم ، ثم ارسم دائرة تمر بالنقطتين ٵ ، ب وطول نصف قطرها ٤سم . **كم دائرة يمكن رسمها؟**

تعيين الدائرة

▲ تذكر ▲ فهم ▲ تطبيق ▲ تحليل

أسئلة تفاعلية



تدريبات الأضواء

أولاً رسم دائرة تمر بنقطة معلومة

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ عدد الدوائر التى تمر بنقطة معلومة هو .... (الإسماعيلية ٢٠٢٢)

(ا) دائرة واحدة (ب) دائرتان

(جـ) ٣ دوائر (د) عدد لا نهائى من الدوائر

٢ تتعين الدائرة إذا عُلم ....

(ا) طول نصف قطرها (ب) مركزها وطول نصف قطرها

(جـ) طول وتر فيها (د) مركزها

٣ إحدى الحالات الآتية يمكن تعيين دائرة وحيدة هى: إذا عُلم .... (الدقهلية ٢٠١٦)

(ا) طول نصف قطرها وإحدى نقاطها (ب) نقطتان فيها

(جـ) إحدى نقاطها (د) مركزها وإحدى نقاطها

---

٢ إذا كان ل مستقيمًا فى المستوى، فارسم دائرة طول نصف قطرها ٣سم تمس المستقيم ل،

ما عدد الحلول الممكنة؟

ثانيًا رسم دائرة تمر بنقطتين معلومتين

٣ اختر الإجابة الصحيحة:

١ عدد الدوائر التى تمر بنقطتين معلومتين يساوى ....

(ا) دائرة واحدة (ب) دائرتين

(جـ) ٣ دوائر (د) عددًا لا نهائيًا من الدوائر

٢ طول نصف قطر أصغر دائرة تمر بطرفى قطعة مستقيمة .... نصف طولها. (بورسعيد ٢٠٢٤)

(ا) يساوى (ب) أكبر من (جـ) أصغر من (د) ضعف

٣ عدد الدوائر التى يمكن رسمها وتمر بطرفى القطعة المستقيمة $\overline{أب}$ يساوى .... (بورسعيد ٢٠٢٣)

(ا) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عددًا لا نهائيًا

٤ مراكز الدوائر التى تمر بالنقطتين أ ، ب تقع جميعًا على .... (الدقهلية ٢٠١٧)

(ا) محور $\overline{أب}$ (ب) $\overline{أب}$

(جـ) العمود المقام على $\overline{أب}$ (د) منتصف $\overline{أب}$

٥ لا يمكن رسم دائرة تمر بالنقطتين ᵖ ، ب (حيث ᵖ ب = ٨سم) إذا كان طول نصف قطرها ....

(أ) ٤ سم (ب) ٨ سم (جـ) ٧ سم (د) ٣ سم

٦ إذا كان طول $\overline{ᵖب}$ = ٦ سم فإن عدد الدوائر التى يمكن رسمها وتمر بالنقطتين ᵖ ، ب وطول نصف قطرها ٣ سم هو .... (الجيزة ٢٠١٨)

(أ) ٣ (ب) عدد لا نهائى (جـ) ٢ (د) ١

٧ إذا كانت ᵖ ، ب نقطتين فى المستوى حيث ᵖ ب = ٧ سم فإن محيط أصغر دائرة تمر بالنقطتين ᵖ ، ب يساوى تقريبًا .... $(\pi \simeq \frac{٢٢}{٧})$ (كفر الشيخ ٢٠١٧)

(أ) ٤٤ سم (ب) ٢٢ سم (جـ) ١٤ سم (د) ٢١ سم

٨ إذا كان: طول $\overline{ᵖب}$ = ٦سم، فإن مساحة أصغر دائرة تمر بالنقطتين ᵖ ، ب تساوى .... سم².

(أ) ٩ π (ب) ٨ π (جـ) ٦ π (د) ٣ π (الشرقية ٢٠١٩)

---

٤ $\overline{ᵖب}$ قطعة مستقيمة طولها ٥سم، **هل يمكن** رسم دائرة طول نصف قطرها ٦ سم وتمر بالنقطتين ᵖ ، ب؟ **وما عدد الحلول؟** (الفيوم ٢٠٢٤)

---

٥ ᵖ نقطة معلومة داخل دائرة مركزها م ، **بين كيف** ترسم وترًا فى هذه الدائرة بحيث تكون ᵖ منتصف هذا الوتر.

---

٦ مستخدمًا الأدوات الهندسية **ارسم** قطعة مستقيمة $\overline{ᵖب}$ طولها ٦ سم، ثم ارسم $\overleftarrow{ᵖحـ}$ بحيث ق (∠ حـ ᵖ ب) = ٦٠°، ارسم دائرة تمر بالنقطتين ᵖ ، ب ويقع مركزها على $\overleftarrow{ᵖحـ}$ **ثم احسب** طول نصف قطرها (لا تمح الأقواس). (الدقهلية ٢٠١٧)

---

٧ **ارسم** $ل_١$ ، $ل_٢$ **مستقيمين متوازيين، البعد بينهما يساوى ٣سم،** **ثم ارسم** دائرة مركزها م حيث م ∈ $ل_١$ وتمس $ل_٢$

ثالثًا رسم دائرة تمر بثلاث نقاط معلومة

٨ **اختر الإجابة الصحيحة:**

١ عدد الدوائر التى تمر بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة هو .... (الإسكندرية ٢٠٢٣)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٣ (د) عدد لا نهائى

٢ عدد الدوائر التى يمكن أن تمر بأى ثلاثة رءوس مختلفة لمتوازى الأضلاع هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ٤

٣ يمكن رسم دائرة تمر برءوس .... (بورسعيد ٢٠٢٢)

(ا) شبه المنحرف (ب) متوازى الأضلاع (جـ) المستطيل (د) المعين

٤ لا يمكن رسم دائرة تمر برءوس .... (القاهرة ٢٠٢٤)

(ا) شبه المنحرف المتساوى الساقين (ب) المربع

(جـ) متوازى الأضلاع (د) المستطيل

٥ مركز الدائرة الخارجة للمثلث (المار برءوس المثلث) هو نقطة تقاطع .... (الفيوم ٢٠١٩)

(ا) منصفات زواياه الداخلة (ب) منصفات زواياه الخارجة

(جـ) ارتفاعاته (د) محاور تماثل أضلاعه

٦ إذا كان المثلث ﻫ ب حـ قائم الزاوية فى ب فإن مركز الدائرة المارة برءوسه هو ....

(ا) منتصف $\overline{\text{ﻫ ب}}$ (ب) منتصف $\overline{\text{ﻫ حـ}}$ (جـ) منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ (د) خارج المثلث

٧ مركز الدائرة المارة برءوس المستطيل هو نقطة تقاطع ....

(ا) أحد بعديه مع أحد قطريه (ب) أحد قطريه مع أحد أضلاعه

(جـ) قطريه (د) بُعديه

---

٩ باستخدام الأدوات الهندسية: **ارسم** المثلث ﻫ ب حـ الذى فيه: ﻫ ب = ٤سم ، ب حـ = ٥سم ، حـ ﻫ = ٦سم ثم ارسم الدائرة المارة برءوسه ﻫ ، ب ، حـ **وما نوع المثلث بالنسبة لزواياه؟** (كفر الشيخ ٢٠٢٤)

---

١٠ **ارسم** الدائرة المارة برءوس المثلث ﻫ ب حـ القائم فى ب حيث ﻫ ب = ٦ سم، ب حـ = ٨ سم **أوجد** طول نصف قطر الدائرة المارة برءوس المثلث ﻫ ب حـ

---

١١ **ارسم** المثلث ﻫ ب حـ الذى فيه ﻫ ب = ٦سم ، ق(∠ﻫ) = ٤٠° وطول نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث ﻫ ب حـ يساوى ٥سم، وإذا كانت ء منتصف $\overline{\text{ﻫ ب}}$ ، **فاحسب** طول $\overline{\text{م ء}}$ حيث م مركز الدائرة الخارجة للمثلث.

تفكير إبداعى TIMSS

١٢ ارسم △ ﻫ ب حـ حيث ب حـ = ٧سم ، ق(∠ب) = ١٢٠° ، ق(∠حـ) = ٣٠°

ثم ارسم الدائرة الخارجة للمثلث ﻫ ب حـ واحسب مساحتها. ($\pi \simeq \frac{٢٢}{٧}$)

---

١٣ **ارسم ثلاث دوائر** متماسة من الخارج مثنى مثنى، أطوال أنصاف أقطارها ٢سم ، ٣سم ، ٤سم

---

١٤ ثلاث دوائر متماسة من الخارج مثنى مثنى، والنسبة بين أطوال أنصاف أقطارها ٥ : ٧ : ٩ ، فإذا كان طول نصف قطر الدائرة الأولى يساوى ٥ , ٢ سم، **فأوجد مجموع محيطى الدائرتين الثانية والثالثة.**

تدريبات الكتاب المدرسى

١ إذا كان ل مستقيمًا فى المستوى، أ نقطة معلومة حيث أ ∈ ل ، باستخدام الأدوات الهندسية ارسم دائرة تمر بالنقطة أ وطول نصف قطرها ٢سم

كم دائرة يمكن رسمها؟ (لا تمحُ الأقواس)

---

٢ باستخدام أدواتك الهندسية ارسم $\overline{أب}$ طولها ٤ سم ثم ارسم على شكل واحد:

(أ) دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب وطول قطرها ٥ سم. ما عدد الحلول الممكنة؟ (القليوبية ٢٠١٩)

(ب) دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب وطول نصف قطرها ٢ سم. ما عدد الحلول الممكنة؟

(جـ) دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب وطول قطرها ٣ سم. ما عدد الحلول الممكنة؟ (القليوبية ٢٠٢٤)

---

٣ ارسم المثلث س ص ع الذى فيه: س ص = ٥ سم، ص ع = ٣ سم، ع س = ٧سم

ثم ارسم الدائرة الخارجة للمثلث س ص ع (كفر الشيخ ٢٠٢٢)

(أ) ما نوع المثلث س ص ع بالنسبة لقياسات زواياه؟

(ب) أين يقع مركز الدائرة بالنسبة لهذا المثلث؟

---

٤ ارسم المثلث أ ب حـ القائم الزاوية فى ب حيث أ ب = ٤سم، ب حـ = ٣سم

ثم ارسم الدائرة الخارجة لهذا المثلث. أين يقع مركز الدائرة بالنسبة لأضلاع هذا المثلث؟

---

٥ ارسم المثلث أ ب حـ المتساوى الأضلاع والذى طول ضلعه ٤ سم ،

وارسم الدائرة الخارجة للمثلث أ ب حـ (أزهر مطروح ٢٠٢٢)

(أ) حدد موضع مركز الدائرة بالنسبة إلى: ارتفاعات المثلث - متوسطات المثلث - منصفات زوايا رءوس المثلث.

(ب) ما عدد محاور التماثل للمثلث المتساوى الأضلاع؟

---

٦ باستخدام الأدوات الهندسية ارسم المثلث أ ب حـ الذى فيه أ ب = ٤ سم، ب حـ = ٥ سم، حـ أ = ٦ سم

ثم ارسم الدائرة المارة بالنقاط أ ، ب ، حـ

ما نوع المثلث أ ب حـ بالنسبة لقياسات زواياه؟ وأين يقع مركز الدائرة بالنسبة للمثلث؟

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ أصغر دائرة يمكن رسمها تمر بالنقطتين أ ، ب حيث أ ب = ٨ سم
يكون طول نصف قطرها ...... سم. (أزهر القاهرة ٢٠٢٢)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٢ عدد الدوائر التى تمر بثلاث نقاط على استقامة واحدة يساوى .... (أسيوط ٢٠٢٢)

(أ) صفرًا (ب) ١ (جـ) ٣ (د) عددًا لا نهائيًا

٣ إذا كان أ ، ب نقطتين فى المستوى بحيث أ ب = ٦ سم، فإن عدد الدوائر التى تمر بالنقطتين أ ، ب معًا وطول نصف قطرها ٦ سم هو .... (الشرقية ٢٠٢٤)

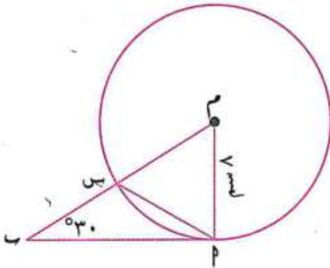
(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى

٤ فى △أ ب حـ إذا كان: ق(∠أ) = ٤٠° ، ق(∠حـ) = ٧٠°،
فإن عدد محاور تماثل هذا المثلث = ... (القاهرة ٢٠٢٢)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

---

٢ ١ فى الشكل المقابل: (الشرقية ٢٠١٩)



$\overline{أب}$ قطعة مماسة للدائرة م عند أ ، م أ = ٨سم ،
ق(∠أ ب م) = ٣٠°

(أ) أوجد طول $\overline{أب}$

(ب) أثبت أن: △س أ ب متساوى الساقين

٢ ارسم △أ ب حـ المتساوى الساقين فيه: ق(∠أ ب حـ) = ١٢٠°، ب حـ = ٤سم،
ثم عين مركز الدائرة المارة برءوسه، وأوجد طول نصف قطرها . (الدقهلية ٢٠١٧)



ذاكر | الدرس ٤

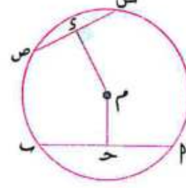
علاقة أوتار الدائرة بمركزها

فيديو الشرح

فكر وناقش فى كل من الأشكال التاليـة:

$\overline{أب}$ ، $\overline{سص}$ وتران فى الدائرة م ، باستخدام المسطرة تحقق من صحة المعلومات الآتية:

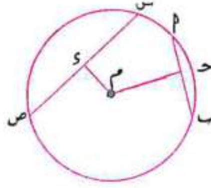
١



إذا كان : أب > س ص

فـإن : م حـ < م ء

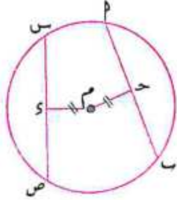
٢



إذا كان : أب < س ص

فـإن : م حـ > م ء

٣



إذا كان : أب = س ص

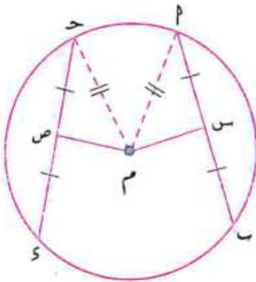
فـإن : م حـ = م ء

• **مما سبق نستنتج أنه:** كلما اقترب الوتر من مركز الدائرة زاد طوله، والعكس صحيح.

ماذا نستنتج فى حالة تساوى الأوتار فى الطول؟

أولًا نظرية

الأوتـار المتساويـة الطول فى دائرة تكون على أبعاد متساوية من مركزها.



المعطيـات : $\overline{أب}$ ، $\overline{حـء}$ وتـران فى دائرة م حيث:

أب = حـء ، $\overline{مس} \perp \overline{أب}$ ، $\overline{مص} \perp \overline{حـء}$

المطلـوب : **إثبات أن** مس = مص

العمـل : نرسم $\overline{مأ}$ ، $\overline{محـ}$

البرهـان : ∵ $\overline{مس} \perp \overline{أب}$ ∴ أس = $\frac{1}{2}$ أب

∵ $\overline{مص} \perp \overline{حـء}$ ∴ حـص = $\frac{1}{2}$ حـء

∵ أب = حـء ∴ أس = حـص

∆∆ أسم ، حـصم فيهما { أم = حـم (أنصاف أقطار) ، ق(∠ أسم) = ق(∠ حـصم) = ٩٠° ، أس = حـص (برهانًا) }

∴ ∆ أسم ≡ ∆ حـصم

وينتـج من التطابـق أن: مس = مص (وهو المطلوب)

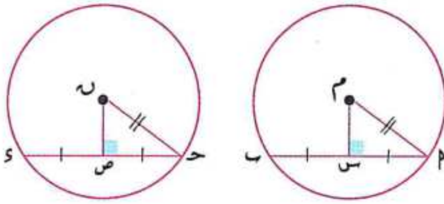
نتيجــة

الأوتار المتساوية الطول فى الدوائر المتطابقة على أبعاد متساوية من مراكزها.

فمثلًا: فى الشكل المقابل: م ، ن دائرتان متطابقتان

إذا كان: أ ب = حـ ء ، $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ن ص}} \perp \overline{\text{حـ ء}}$

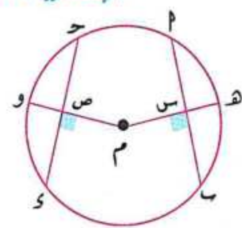
فــإن : م س = ن ص



مثـال ١

ادرس الأشكال الآتيـة، ثم أوجد المطلوب:

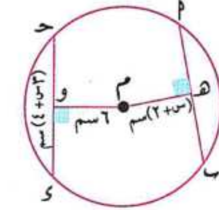
١ (الإسكندرية ٢٠٢٤)



إذا كان: أ ب = حـ ء

فأثبت أن: هـ س = و ص

٢ (الفيوم ٢٠١٩)

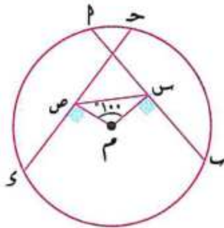


إذا كان: أ ب = حـ ء

فأوجد كلًّا من:

قيمة س ، طول $\overline{\text{حـ ء}}$

٣



إذا كان: أ ب = حـ ء

فأوجد ق (∠م س ص)

الحـل فى الدائرة م

١ ∵ أ ب = حـ ء (الأوتار متساوية)

، ∵ $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ،

$\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{حـ ء}}$

∴ م س = م ص (الأبعاد متساوية) ——— (١)

∵ م هـ = م و (أنصاف أقطار) ——— (٢)

بطرح (١) من (٢)

∴ م هـ − م س = م و − م ص

∴ هـ س = و ص

٢ ∵ أ ب = حـ ء (الأوتار متساوية)

، ∵ $\overline{\text{م هـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ،

$\overline{\text{م و}} \perp \overline{\text{حـ ء}}$

∴ م هـ = م و (الأبعاد متساوية)

∴ س + ٢ = ٦

∴ س = ٤

∴ حـ ء = ٣ س + ٤

= ٣ × ٤ + ٤

= ١٦ سم

٣ ∵ أ ب = حـ ء (الأوتار متساوية)

، ∵ $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ،

$\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{حـ ء}}$

∴ م س = م ص (الأبعاد متساوية)

∴ ق (∠م س ص)

= ق (∠م ص س)

$= \frac{°١٨٠ - °١٠٠}{٢} = °٤٠$

مثال ٢

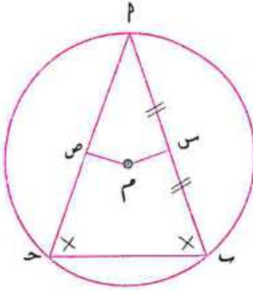
فى الشكل المقابل:

$ب ح مثلث مرسوم داخل الدائرة م فيه:

ق(∠ب) = ق(∠ح) ،

س منتصف $\overline{أب}$ ، $\overline{مص} \perp \overline{أح}$

أثبت أن: م س = م ص



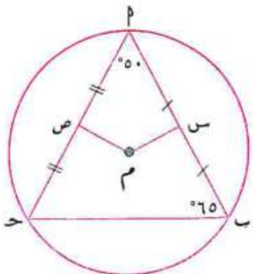
الحل

البرهـــان : ∵ ق(∠ب) = ق(∠ح) ∴ أب = أح

∵ س منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overline{مس} \perp \overline{أب}$ ،

∵ $\overline{مص} \perp \overline{أح}$ ∴ م س = م ص (وهو المطلوب إثباته)

س؟ سؤال ١



① فى الشكل المقابل:

س منتصف $\overline{أب}$ ، ص منتصف $\overline{أح}$

، ق(∠ب) = ٦٥° ، ق(∠أ) = ٥٠°

(أ) أوجد: ق(∠س م ص)

(ب) أثبت أن: م س = م ص

② فى الشكل المقابل: (كفر الشيخ ٢٠٢٤)

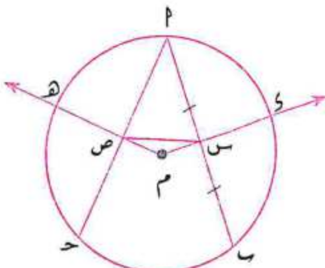
$\overline{أب}$ ، $\overline{أح}$ وتـران متساويان فى الطول فى الدائرة م

س منتصف $\overline{أب}$ ، $\overrightarrow{مس}$ يقطع الدائرة فى ى

$\overrightarrow{مص} \perp \overline{أح}$ يقطعه فى ص ويقطع الدائرة فى هـ

أثبت أن: (أ) س ى = ص هـ

(ب) ق(∠ص س ب) = ق(∠س ص ح)



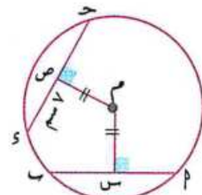
ثانيًا **عكس النظرية**

فى الدائرة الواحدة (أو فى الدوائر المتطابقة) إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من المركز، فإنها تكون متساوية فى الطول.

مثال ٣

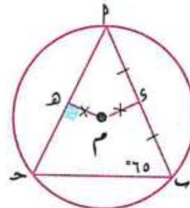
ادرس الأشكال الآتية، ثم أوجد المطلوب:

١



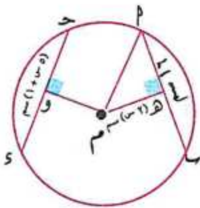
إذا كان: م س = م ص ،
ص ى = ٧سم
فأوجد طول $\overline{أ ب}$

٢



إذا كان: م ى = م هـ ،
ق(∠ب) = ٦٥°
فأوجد ق(∠أ)

٣



إذا كان: م هـ = م و
فأوجد طول $\overline{حـ ى}$ ، وقيمة س
ثم أوجد طول كل من: $\overline{م هـ}$ ، $\overline{أ م}$

الحل

١ ∵ م س = م ص (الأبعاد متساوية) ∴ أ ب = حـ ى (الأوتار متساوية)

∵ $\overline{م ص}$ ⊥ $\overline{حـ ى}$ ∴ ص منتصف $\overline{حـ ى}$ ∴ حـ ى = ٢ × ٧ = ١٤سم ∴ أ ب = ١٤سم

---

٢ ∵ ى منتصف $\overline{أ ب}$ ∴ $\overline{م ى}$ ⊥ $\overline{أ ب}$

∵ م ى = م هـ (الأبعاد متساوية) ∴ أ ب = أ حـ (الأوتار متساوية)

∵ △ أ ب حـ متساوى الساقين ∴ ق(∠حـ) = ق(∠ب) = ٦٥°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠° ∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٦٥° + ٦٥°) = ٥٠°

---

٣ ∵ م هـ = م و (الأبعاد متساوية) ∴ أ ب = حـ ى (الأوتار متساوية)

∴ حـ ى = ١٦ سم ∴ ٥ س + ١ = ١٦ ∴ ٥ س = ١٥ ∴ س = ٣

∴ م هـ = ٢ س = ٢ × ٣ = ٦ سم

∵ △ أ هـ م قائم الزاوية فى هـ

∴ (أ م)^2 = (أ هـ)^2 + (م هـ)^2 = (٨)^2 + (٦)^2 = ٦٤ + ٣٦ = ١٠٠ ∴ أ م = ١٠ سم

مثال ٤

فى الشكل المقابل:

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب

$\overleftrightarrow{\text{م ن}} \cap \overleftrightarrow{\text{أ ب}} = \{\text{د}\}$ ، س منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$

$\overline{\text{ن ص}} \perp \overline{\text{هـ و}}$ ، م س = م د ، ن ص = ن د

أثبت أن: ب حـ = هـ و

الحل

البرهان : ∵ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ خط المركزين للدائرتين المتقاطعتين م ، ن ، $\overline{\text{أ ب}}$ الوتر المشترك

∴ $\overleftrightarrow{\text{م ن}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

فى الدائرة م

∵ س منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ∴ $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$

، ∵ $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{م د}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ، م س = م د

∴ ب حـ = أ ب **(عكس النظرية)** ١

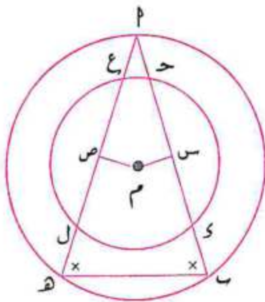
فى الدائرة ن

∵ $\overline{\text{ن د}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ن ص}} \perp \overline{\text{هـ و}}$ ، ن د = ن ص

∴ هـ و = أ ب **(عكس النظرية)** ٢

من ١ ، ٢ **نستنتج أن:** ب حـ = هـ و

سؤال ٢



فى الشكل المقابل:

دائرتان متحدتا المركز م ، رُسم $\overline{\text{أ ب}}$ وترًا فى الدائرة الكبرى

فقطع الدائرة الصغرى فى حـ ، د

رُسم $\overline{\text{أ هـ}}$ وترًا فى الدائرة الكبرى أيضًا

فقطع الدائرة الصغرى فى ع ، ل

إذا كان: ق(∠ أ ب هـ) = ق(∠ أ هـ ب)

فأثبت أن: حـ د = ع ل



تدريبات الأضـــواء

أولاً نظرية

١ أكمل ما يأتى:

١ الأوتار المتساوية فى الطول فى الدائرة على أبعاد .... من مركزها. (أزهر المنيا ٢٠٢٢)

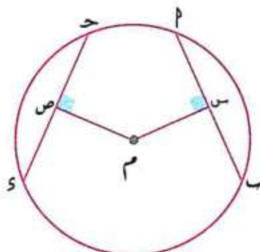
٢ الأوتار المتساوية فى الطول فى الدوائر المتطابقة تكون على أبعاد .... من مراكزها.

٣ المربع المرسوم داخل دائرة تكون أضلاعه على أبعاد .... من مركز الدائرة. (شمال سيناء ٢٠١٧)

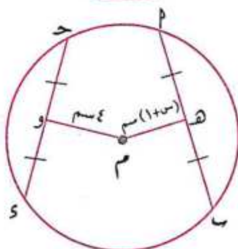
٤ $\overline{أب}$ ، $\overline{حـ ء}$ وتران فى دائرة م ، أ ب = ٥سم، حـ ء = ٤سم؛
فإن أقرب الوترين إلى مركز الدائرة هو الوتر ....

٥ دائرة مركزها م ، الوتران $\overline{أب}$ ، $\overline{حـ ء}$ يبعدان عن مركزها ٣سم، ١٠سم على الترتيب
فإن طول الوتر .... أكبر من طول الوتر ....

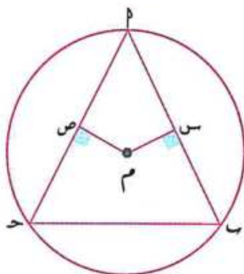
٦ فى الشكل المقابل: (أسيوط ٢٠١٨)
إذا كان أ ب = حـ ء ، فإن م س = ...



٧ فى الشكل المقابل:
أ ب = حـ ء ، هـ منتصف $\overline{أب}$ ، و منتصف $\overline{حـ ء}$
، م و = ٤ سم ، م هـ = (س + ١) سم، فإن س = ...



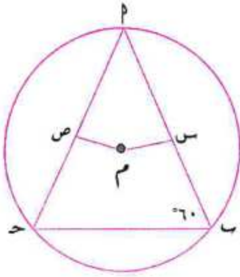
٨ فى الشكل المقابل:
إذا كان أ ب = أ حـ وكان $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{أب}$ ، ص حـ = ١٢سم،
س م = ٥سم ، $\overline{م ص}$ ⊥ $\overline{أ حـ}$
فإن طول نصف قطر الدائرة = ... سم



٩ في الشكل المقابل:

إذا كان: أ ب = أ حـ ، أ ب = ١١سم

فإن: محيط المثلث أ ب حـ = ... سم



١٠ في الشكل المقابل:

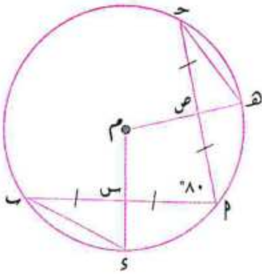
$\overline{أ ب}$، $\overline{أ حـ}$ وتران متساويان في الطول في الدائرة م،

س منتصف $\overline{أ ب}$ ، ص منتصف $\overline{أ حـ}$ ،

إذا كان ق(∠ حـ أ ب) = ٨٠° فإن:

* ق(∠ ء م هـ) = ...°

* إذا كان ء ب = ٣سم فإن هـ حـ = ... سم

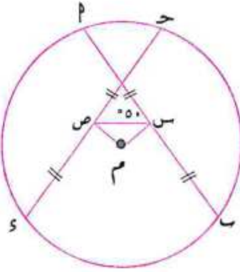


١١ إذا كان $\overline{أ ب}$ ، $\overline{حـ ء}$ وترين متساويين في الطول في الدائرة م ،

س، ص هما منتصفا $\overline{أ ب}$ ، $\overline{حـ ء}$ على الترتيب،

ق(∠ أ س ص) = ٥٠°

فإن ق (∠ س م ص) = ...°



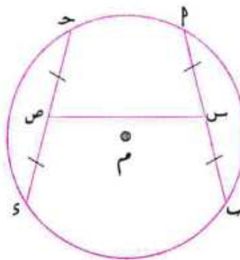
---

٢ في الشكل المقابل:

أ ب = حـ ء، س منتصف $\overline{أ ب}$

، ص منتصف $\overline{حـ ء}$

أثبت أن: ق(∠ أ س ص) = ق (∠ حـ ص س)

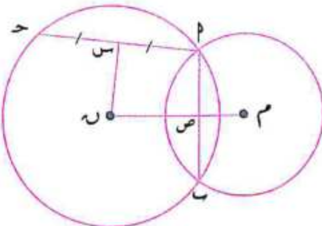


٣ في الشكل المقابل: (بورسعيد ٢٠٢٤)

م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب

، $\overleftrightarrow{م ن}$ ∩ $\overline{أ ب}$ = {ص} ، أ ب = أ حـ ، س منتصف $\overline{أ حـ}$

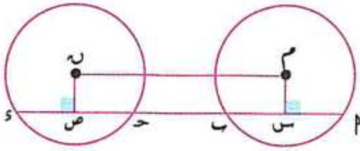
أثبت أن: ن ص = ن س



٤ 📖 **فى الشكل المقابل:**

إذا كان م ، ن دائرتين متطابقتين ، أ ب = حـ ء

فأثبت أن: الشكل م س ص ن مستطيل



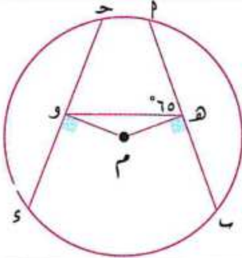
---

٥ **فى الشكل المقابل:**

$\overline{أ ب}$ ، $\overline{حـ ء}$ وتران متساويان فى الطول

$\overline{م هـ} \perp \overline{أ ب}$ ، $\overline{م و} \perp \overline{حـ ء}$ فإذا كان ق (∠ أ هـ و) = ٦٥°

فأوجد: ق (∠ م و هـ)



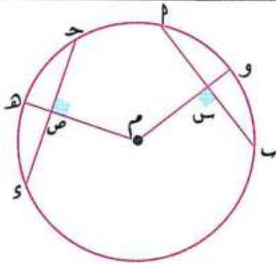
---

٦ **فى الشكل المقابل:** (شمال سيناء ٢٠١٩)

إذا كان أ ب = حـ ء ، $\overline{م و} \perp \overline{أ ب}$

، $\overline{م هـ} \perp \overline{حـ ء}$

فأثبت أن: و س = هـ ص



---

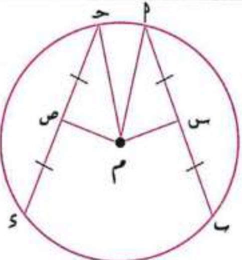
٧ **فى الشكل المقابل:**

دائرة مركزها م ، أ ب = حـ ء

ق (∠ س م ص) = ١٣٠° ، س منتصف $\overline{أ ب}$

، ص منتصف $\overline{حـ ء}$

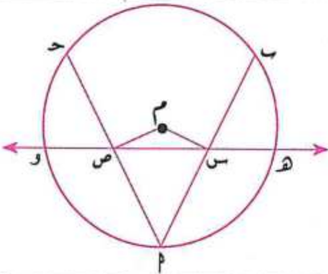
أثبت أن: ق (∠ س أ م) = ق (∠ ص حـ م)



---

٨ **فى الشكل المقابل:**

$\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ حـ}$ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م، س ، ص منتصفا $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ حـ}$ على الترتيب، ورسم $\overleftrightarrow{س ص}$ فقطع الدائرة فى هـ ، و **أثبت أن:** س هـ = ص و

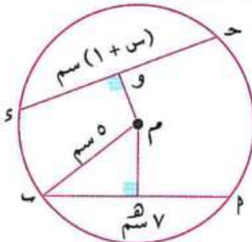


---

٩ 📖 **فى الشكل المقابل:** دائرة مركزها م

م و < م هـ بحيث م و ⊥ $\overline{حـ ء}$

أوجد الفترة التى تنتمى إليها س

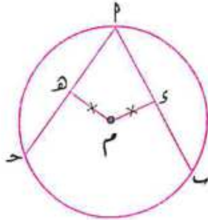


ثانيًا عكس النظرية

١٠ أكمل ما يأتى:

١ فى الدائرة الواحدة إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من المركز فإنها تكون .... فى الطول.

٢ **فى الشكل المقابل:** (الغربية ٢٠١٧)

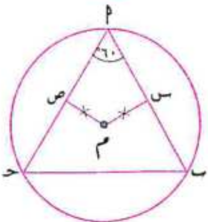


ء منتصف $\overline{أ ب}$ ، هـ منتصف $\overline{أ حـ}$ ،

م ء = م هـ ، أ حـ = (٢س + ١) سم ، أ ب = ٧ سم

فإن س = ...

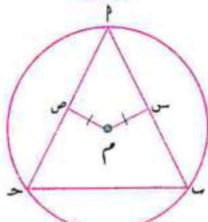
٣ **فى الشكل المقابل:**



س منتصف $\overline{أ ب}$ ، ص منتصف $\overline{أ حـ}$

، م س = م ص ، ق (∠ أ) = ٦٠° فإن △ أ ب حـ ....

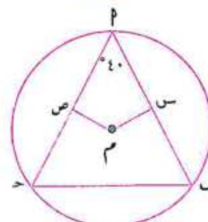
٤ **فى الشكل المقابل:** (الغربية ٢٠١٧)



إذا كان م س = م ص ، أ ب = ٨ سم

فإن أ حـ = ... سم

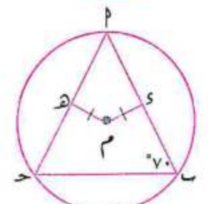
٥ **فى الشكل المقابل:**



إذا كان $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ ، $\overline{م ص}$ ⊥ $\overline{أ حـ}$ ، م س = م ص ،

ق (∠ أ) = ٤٠° فإن ق (∠ ب) = ...

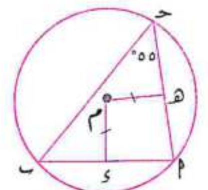
٦ **فى الشكل المقابل:**



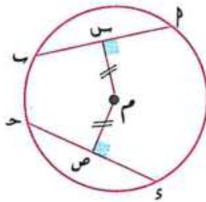
إذا كان $\overline{م ء}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ ، $\overline{م هـ}$ ⊥ $\overline{أ حـ}$ ،

م ء = م هـ ، ق (∠ ب) = ٧٠°

فإن ق (∠ أ) = ...



٧ **فى الشكل المقابل:** ق (∠ أ) = ...° (أسوان ٢٠٢٤)

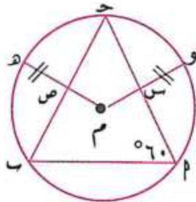


٨ فى الشكل المقابل:

إذا كان م س = م ص ، م س ⊥ ا ب ، م ص ⊥ ح ء ،

وكان ح ء = ٦ سم، وكان طول نصف قطر الدائرة م

يساوى ٥ سم فإن م س = ...

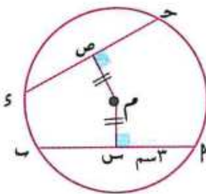


١١ فى الشكل المقابل: فى الدائرة م (الشرقية ٢٠١٨)

ق (∠ ا) = °٦٠ ، س منتصف ا ح ،

ص منتصف ب ح ، و س = هـ ص

أثبت أن: △ ا ب ح متساوى الأضلاع

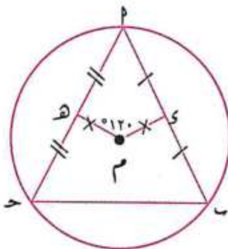


١٢ فى الشكل المقابل: (بنى سويف ٢٠١٧)

م س ⊥ ا ب ، م ص ⊥ ح ء ، م س = م ص،

ا س = ٣ سم

أوجد بالبرهان طول ح ء



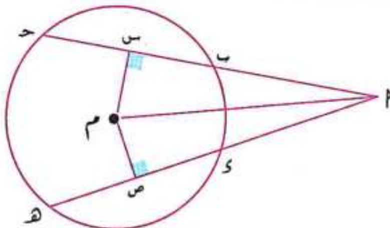
١٣ فى الشكل المقابل: (سوهاج ٢٠٢٤)

ا ب ح مثلث مرسوم داخل الدائرة م

ء، هـ هما منتصفا ا ب ، ا ح على الترتيب

فإذا كان م ء = م هـ ، ق (∠ ء م هـ) = °١٢٠

فأثبت أن: △ ا ب ح متساوى الأضلاع

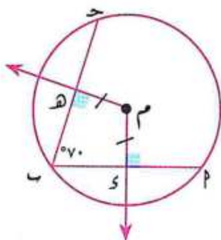


١٤ فى الشكل المقابل:

ب ح = ء هـ ، م س ⊥ ب ح ،

م ص ⊥ ء هـ

أثبت أن: ا ب = ا ء



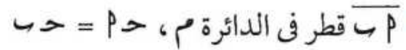
١٥ فى الشكل المقابل: (القاهرة ٢٠١٩)

ا ب ، ب ح وتران فى الدائرة م، م ء ⊥ ا ب ، م هـ ⊥ ب ح

، م ء = م هـ، ق (∠ ا ب ح) = °٧٠

(١) **أوجد** ق (∠ ء م هـ) (٢) **أثبت أن** ا ب = ح ب

١٦ فى الشكل المقابل: (المنوفية ٢٠١٩)



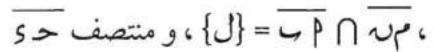
- أ ب قطر فى الدائرة م ، حـ أ = حـ ب
، م س ⊥ ء أ ، م ص ⊥ هـ ب

أثبت أن حـ ء = حـ هـ

---

١٧ فى الشكل المقابل:

- م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب
، م ن ∩ أ ب = {ل} ، و منتصف حـ ء
، ع منتصف س ص ، م و = م ل ، ن ل = ن ع

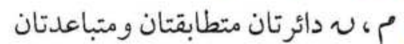


أثبت أن حـ ء = س ص

---

١٨ فى الشكل المقابل: (الإسكندرية ٢٠١٣)

- م ، ن دائرتان متطابقتان ومتباعدتان
، رسم المستقيم أ ء يقطع الدائرة م فى أ ، ب
ويقطع الدائرة ن فى حـ ، ء على الترتيب



فإذا كان م س ⊥ أ ب ، ن ص ⊥ حـ ء ، هـ منتصف م ن

فأثبت أن: أ ب = حـ ء

---

١٩ فى الشكل المقابل:

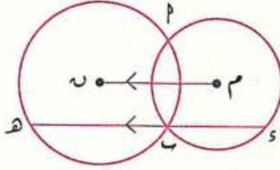
- الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ ، ء} ،
م ب = ن حـ ، م ن // ب حـ ،
م س ⊥ ب حـ ، ن ص ⊥ ب حـ



أثبت أن : أ ب = أ حـ

تفكير إبداعي TIMSS

٢٠ **في الشكل المقابل:** (الجيزة ٢٠١٩)

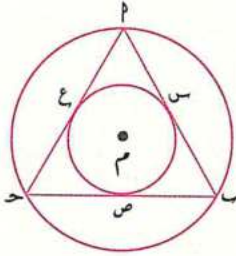


م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب رُسم ءهـ يمر بالنقطة ب ويقطع الدائرتين في ء ، هـ على الترتيب حيث $\overline{ءهـ}$ // $\overline{من}$

أثبت أن : ءهـ = ٢ من

---

٢١ **في الشكل المقابل:** (الدقهلية ٢٠٢٢)

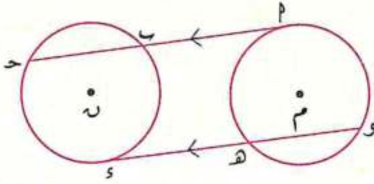


دائرتان متحدتا المركز م ، طولا نصفي قطريهما ٤ سم ، ٢ سم ، رسم المثلث أ ب حـ بحيث تقع رءوسه على الدائرة الكبرى وتمس أضلاعه الدائرة الصغرى في س ، ص ، ع

أثبت أن : المثلث أ ب حـ متساوي الأضلاع وأوجد مساحته.

---

٢٢ **في الشكل المقابل:**

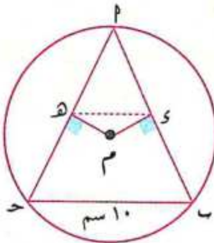


م ، ن دائرتان متطابقتان ، $\overline{أحـ}$ قطعة مماسة للدائرة م عند أ ، $\overline{ءو}$ قطعة مماسة للدائرة ن عند ء ، $\overline{أحـ}$ // $\overline{ءو}$ **أثبت أن :**

(أ) ب حـ = وهـ (ب) أ ب = هـ ء

---

٢٣ **في الشكل المقابل:**



أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة مركزها م ،

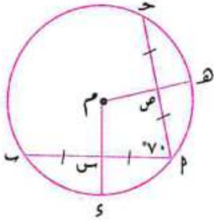
$\overline{مء}$ ⊥ $\overline{أب}$ ، $\overline{مهـ}$ ⊥ $\overline{أحـ}$ ، ب حـ = ١٠ سم

فإذا كان ق(∠ ءمهـ) = ١٢٠° ، ءم = هـم

فأوجد: مساحة المثلث أ ب حـ

تدريبات الكتاب المدرسى

١ في الشكل المقابل: (المنوفية ٢٠٢٣)



$\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ وتران متساويان في الطول في الدائرة م،

س منتصف $\overline{أب}$ ، ص منتصف $\overline{أحـ}$ ، ق(∠ حـ أ ب) = ٧٠°

(أ) احسب ق(∠ ء م هـ) (ب) أثبت أن س ء = ص هـ

---

٢ $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ وتران متساويان في الطول في الدائرة م ، س ، ص منتصفا $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ على الترتيب،

ق (∠ م س ص) = ٣٠° أثبت أن:

أولًا: المثلث م س ص متساوى الساقين. ثانيًا: المثلث أ س ص متساوى الأضلاع.

---

٣ $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ وتران في الدائرة م، $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{أب}$ ، ص منتصف $\overline{أحـ}$ ، ق(∠ أ ب حـ) = ٧٥°، م س = م ص

أولًا: أوجد ق (∠ ب أ حـ)

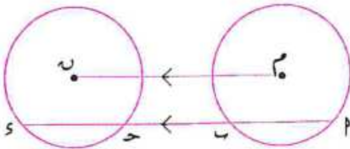
ثانيًا: أثبت أن محيط △ أ س ص = $\frac{١}{٢}$ محيط △ أ ب حـ

---

٤ دائرتان متحدتا المركز م ، $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ وتران في الدائرة الكبرى يمسان الدائرة الصغرى في س ، ص على الترتيب أثبت أن أ ب = أ حـ

---

٥ في الشكل المقابل:



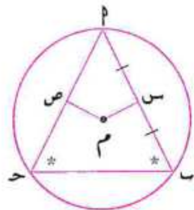
م ، ن دائرتان متطابقتان، رسم $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overleftrightarrow{م ن}$

فقطع الدائرة م في أ ، ب وقطع الدائرة ن في حـ، ء

أثبت أن أ حـ = ب ء

---

٦ في الشكل المقابل: (أسيوط ٢٠٢٣)



أ ب حـ مثلث مرسوم داخل الدائرة م فيـه:

ق (∠ ب) = ق (∠ حـ)، س منتصف $\overline{أب}$

، $\overline{م ص}$ ⊥ $\overline{أحـ}$ أثبت أن م س = م ص

٧ في الشكل المقابل: (الوادى الجديد ٢٠٢٣)

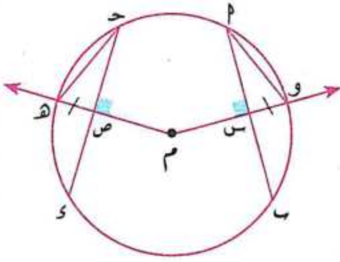
$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ د}}$ وتران فى الدائرة م

$\overleftrightarrow{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ويقطع الدائرة فى و ،

$\overleftrightarrow{\text{م ص}} \perp \overline{\text{جـ د}}$ ويقطع الدائرة فى هـ ، و س = هـ ص **أثبت أن:**

أولًا: أ ب = جـ د

ثانيًا: أ و = جـ هـ



---

٨ في الشكل المقابل:

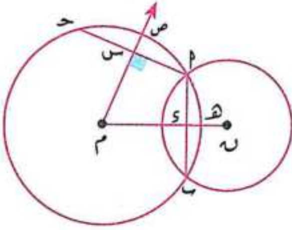
م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب رسم $\overleftrightarrow{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$

يقطع $\overline{\text{أ جـ}}$ فى س ويقطع الدائرة م فى ص

ورسم $\overline{\text{م ن}}$ يقطع $\overline{\text{أ ب}}$ فى د والدائرة م فى هـ

إذا كان أ جـ = أ ب

فأثبت أن س ص = د هـ



---

٩ م ، ن دائرتان متماستان من الداخل فى أ ، رسم $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة الكبرى فقطعا الدائرة الصغرى فى د ، هـ على الترتيب.

أثبت أن: أ د = أ هـ

١ اختر الإجابة الصحيحة:

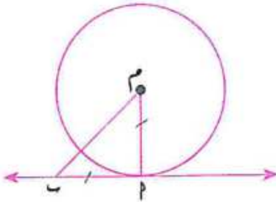
١ دائرة محيطها ١٢ π سم، والنقطة أ فى مستواها فإذا كان م أ = ٥ سم ،
فإن النقطة أ تقع .... الدائرة. (الشرقية ٢٠٢٣)

(ا) خارج (ب) داخل (جـ) على (د) مركز

٢ إذا كان المستقيم ل مماسًا للدائرة م التى طول قطرها ١٠ سم فإن : بُعد المستقيم ل عن مركز الدائرة يساوى .... سم. (الجيزة ٢٠٢٤)

(ا) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

٣ فى الشكل المقابل: ق (∠م) = ...° (شمال سيناء ٢٠١٨)



(ا) ٣٠ (ب) ٦٠

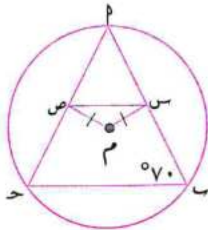
(جـ) ٤٥ (د) ٩٠

٤ عدد محاور تماثل دائرتين متماستين من الخارج يساوى .... (الدقهلية ٢٠٢١)

(ا) صفرًا (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عددًا لا نهائيًّا

---

٢ ١ فى الشكل المقابل: (أسيوط ٢٠١٧)

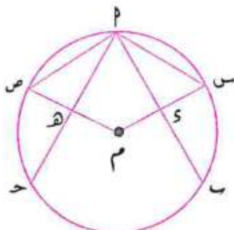


م دائرة فيها: $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{أ حـ}}$

ق (∠ب) = ٧٠°

(ا) **أثبت أن** $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ب حـ}}$ (ب) **أوجد** ق (∠ص س م) بالبرهان

٢ فى الشكل المقابل:



أ ب = أ حـ ، $\overline{\text{م ء}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{م هـ}} \perp \overline{\text{أ حـ}}$

أثبت أن: (ا) ء س = هـ ص

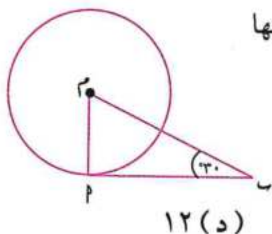
(ب) ق (∠س أ ب) = ق (∠ص أ حـ)

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان طول قطر الدائرة ٨ سم والمستقيم ل يبعد ٣ سم عن مركزها، فإن المستقيم ل ....

(ا) يمس الدائرة (ب) قاطع للدائرة

(جـ) يقع خارج الدائرة (د) يكون محور تماثل لها



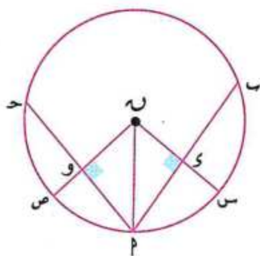
٢ فى الشكل المقابل: إذا كان $\overline{ا ب}$ قطعة مماسة للدائرة م عند ا

و ق (∠ ب) = ٣٠° ، ا م = ٦ سم فإن م ب = ... سم.

(ا) ٣ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ١٢

٣ لا يمكن رسم دائرة تمر برءوس ....

(ا) مستطيل (ب) مثلث (جـ) مربع (د) معين



٤ فى الشكل المقابل: الدائرة ن طول قطرها ٢٠ سم ،

ن ى = ن و فإذا كان: ا ب = ١٦ سم

فإن: و ص = ... سم

(ا) ٧ (ب) ٦

(جـ) ٥ (د) ٤

٥ ا ب حـ ى معين فإن عدد الدوائر التى يمكن أن تمر بالرءوس ا ، ب ، حـ يساوى .... (الغربية ٢٠٢٣)

(ا) صفرًا (ب) ١ (جـ) ٣ (د) عددًا لا نهائيًا

٦ طول نصف قطر الدائرة التى مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة (٣ ، ٤) يساوى .... وحدة طول. (الدقهلية ٢٠٢٣)

(ا) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٧

٧ م ، ن دائرتان متماستان من الداخل، طولا نصفى قطريهما ٧سم ، ٣سم

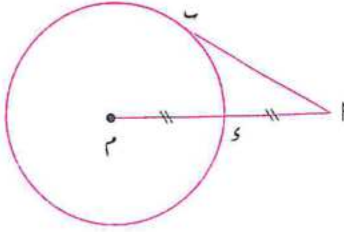
فإن طول $\overline{م ن}$ = ... سم (الشرقية ٢٠٢٤)

(ا) ٨ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) ١٠

٨ إذا كان $\overleftrightarrow{ا ب}$ ∩ الدائرة م = {ا ، ب} فإن $\overleftrightarrow{ا ب}$ ∩ سطح الدائرة م = ... (القليوبية ٢٠٢٤)

(ا) {ا ، ب} (ب) $\overline{ا ب}$ (جـ) $\overrightarrow{ا ب}$ (د) $\overrightarrow{ب ا}$

٩ في الشكل المقابل: (الدقهلية ٢٠٢٤)



دائرة م طول نصف قطرها نق

فإذا كانت $\overline{أب}$ قطعة مماسة للدائرة عند ب

، ء $\in \overline{أم}$ حيث أ ء = ءم ، فإن: أ ب = ...

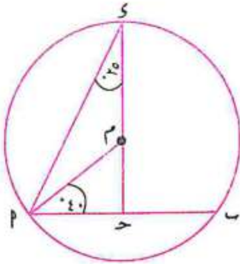
(أ) ٢ نق (ب) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ نق

(جـ) $\sqrt{٣}$ نق (د) نق

---

٢ أجب عما يأتي:

١ في الشكل المقابل:

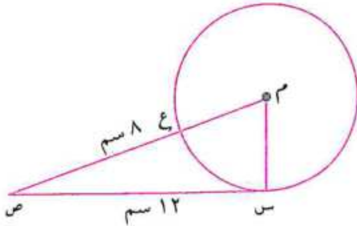


$\overline{أب}$ وتر في الدائرة م ، ق ($\angle$ ء) = ٢٥°

ق ($\angle$ م أ حـ) = ٤٠°

برهن أن: حـ في منتصف $\overline{أب}$

٢ في الشكل المقابل: (بورسعيد ٢٠٢١)



م دائرة ، $\overline{سص}$ قطعة مماسة للدائرة عند س،

$\overline{مص}$ $\cap$ الدائرة م = {ع} ، س ص = ١٢ سم ، ص ع = ٨سم

أوجد طول نصف قطر الدائرة م

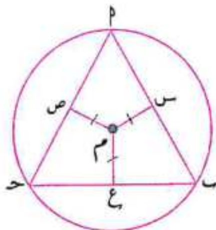
٣ إذا كانت م ، ن دائرتين طولا نصفي قطريهما ٩سم ، ٦سم على الترتيب،

فأوجد طول $\overline{من}$ في كل من الحالتين الآتيتين:

(١) الدائرتان متماستان من الخارج.

(٢) الدائرتان متماستان من الداخل.

٤ في الشكل المقابل:



م س = م ص = م ع ، أ ب = ١٠ سم

أوجـد: ق ($\angle$ ب)، محيط $\triangle$ أ ب حـ

١ أكمل لتكون العبارة صحيحة:

١ أى ثلاث نقاط لا تنتمى لمستقيم واحد تمر بها ....

٢ محور تماثل الدائرتين م ، ن المتقاطعتين فى أ ، ب هو ....

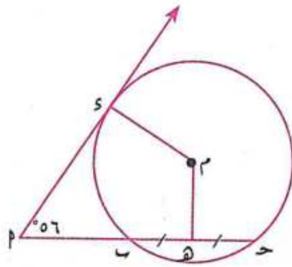
٣ إذا كان أ ب = ٧ سم فإن مساحة أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب تساوى .... سم^{٢}

٤ إذا كانت م دائرة محيطها ٨ π سم ، أ نقطة على الدائرة ، فإن م أ = ...

٥ وتر طوله ٨ سم فى دائرة طول نصف قطرها ٥ سم ، فإنه يبعد عن مركزها .... سم

---

٢ فى الشكل المقابل: (البحيرة ٢٠٢٢)



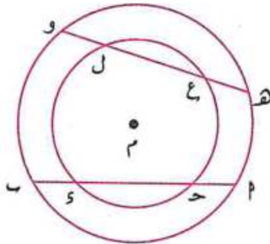
$\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ مماس للدائرة م ، $\overrightarrow{\text{أ حـ}}$ يقطع الدائرة م فى ب ، حـ ،

هـ منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، ق (∠ أ) = ٥٦°

أوجد ق (∠ ء م هـ)

---

٣ فى الشكل المقابل:



دائرتان متحدتا المركز م ، $\overline{\text{أ ب}}$ وتر فى الدائرة الكبرى

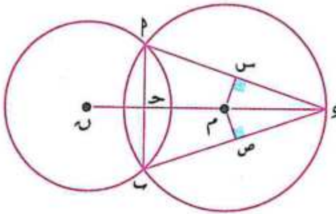
ويقطع الصغرى فى حـ ، ء ، $\overline{\text{هـ و}}$ وتر فى الدائرة

الكبرى ويقطع الدائرة الصغرى فى ع ، ل حيث أ ب = هـ و

أثبت أن: (أ) حـ ء = ع ل (ب) أ ء = و ع

---

٤ فى الشكل المقابل: (الدقهلية ٢٠٢٤)



الدائرة م ∩ الدائرة ن = {أ ، ب} ، $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ = {حـ} ،

ء ∈ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ ، $\overline{\text{م س}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ء}}$ ، $\overline{\text{م ص}}$ ⊥ $\overline{\text{ب ء}}$

أثبت أن: م س = م ص

الزوايا والأقواس فى الدائرة



الوحدة الخامسة



أهداف دروس الوحدة

بعد دراسة هذه الوحدة يجب أن يكون الطالب قادرًا على أن:

الدرس الأول: الزاوية المركزية وقياس الأقواس

- يتعرف الزاوية المركزية ويحسب قياس وطول قوس من دائرة.

الدرس الثانى: العلاقة بين الزاويتين المحيطية والمركزية المشتركتين فى القوس

- يتعرف الزاوية المحيطية وقياس القوس المقابل لها.
- يتعرف العلاقة بين قياس الزاوية المحيطية وقياس الزاوية المركزية المشتركتين فى القوس.

الدرس الثالث: الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس

- يتعرف العلاقة بين قياسات الزوايا المحيطية التى تحصر نفس القوس.
- يتعرف الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة.

الدرس الرابع: الشكل الرباعى الدائرى

- يتعرف بعض حالات الشكل الرباعى الدائرى.

الدرس الخامس: خواص الشكل الرباعى الدائرى

- يتعرف خصائص الشكل الرباعى الدائرى ويحل مسائل على هذه الخصائص.

الدرس السادس: العلاقة بين مماسات الدائرة

- يتعرف العلاقة بين القطعتين المماستين المرسومتين من نقطة خارج الدائرة.
- يتعرف مفهوم الدائرة الداخلة لمضلع.

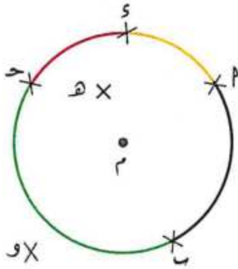
الدرس السابع: الزاوية المماسية

- يتعرف الزاوية المماسية ويستنتج علاقتها بكل من الزاوية المحيطية والزاوية المركزية المشتركة معها فى نفس القوس.



فيديو الشرح

ذاكر الدرس 1 الزاوية المركزية وقياس الأقواس



فكر وناقش فى الشكل المقابل:

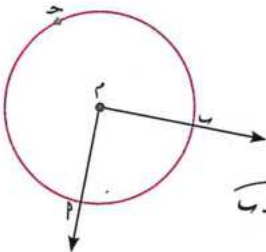
- النقاط ا ، ب ، حـ ، ء تقع **على** الدائرة م
- النقطتان هـ ، م تقعان **داخل** الدائرة م
- النقطة و تقع **خارج** الدائرة م
- طول القوس (ا ب) + طول القوس (ب حـ) + طول القوس (حـ ء) + طول القوس (ء ا) = محيط الدائرة م

لاحظ أن: طول القوس (ب حـ) الملون بالأخضر أكبر من طول القوس (ا ء) الملون بالأصفر

أولًا الزاوية المركزية وقياس القوس:

تعريف

الزاوية المركزية: هى الزاوية التى رأسها مركز الدائرة ويحمل كل من ضلعيها نصف قطر فى الدائرة.



فى الشكل المقابل:

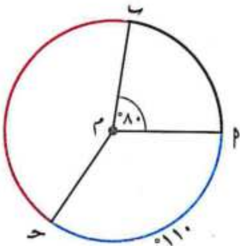
∠ ا م ب هى زاوية مركزية، حيث إن رأسها النقطة م (مركز الدائرة)،

م ا⃖ يحمل نصف القطر م ا ، م ب⃖ يحمل نصف القطر م ب

القوس الأصغر ا ب ويرمز له بالرمز ⌒ا ب ، القوس الأكبر ا ب ويرمز له بالرمز ⌒ا حـ ب

ق(⌒ا ب) = ق(∠ ب م ا)

أى أن: قياس القوس فى دائرة: هو قياس الزاوية المركزية المقابلة له.



فمثلًا: فى الشكل المقابل:

إذا كانت: م دائرة ، ا ، ب ، حـ ثلاث نقاط على الدائرة

وكان : ق(∠ ا م ب) = °٨٠ ، ق(⌒ا حـ) = °١١٠ **فإن:**

١ ق(⌒ا ب) = ق(∠ ا م ب) = °٨٠   ٢ ق(∠ ا م حـ) = ق(⌒ا حـ) = °١١٠

٣ ق(∠ ب م حـ) = °٣٦٠ - (°٨٠ + °١١٠) = °١٧٠

ويكون: ق(⌒ب حـ) = ق(∠ ب م حـ) = °١٧٠

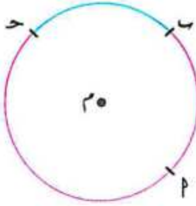
تذكر أن

قياس الدائرة = °٣٦٠



نقاط هامة

- دائمًا يقصد بالرمز $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ القوس الأصغر ما لم يذكر خلاف ذلك.
- مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول مركز الدائرة = ٣٦٠°
- القوسان المتجاوران هما قوسان من دائرة يشتركان فى نقطة واحدة فقط.



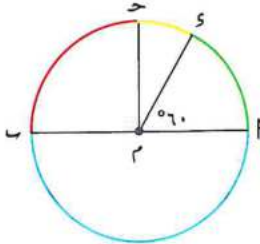
فمثلًا: فى الشكل المقابل:

القوسان $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ ، $\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$ متجاوران لأنهما مشتركان فى نقطة ب فقط

ويكـون: ق $(\overset{\frown}{\text{أ ب}})$ + ق $(\overset{\frown}{\text{ب حـ}})$ = ق $(\overset{\frown}{\text{أ ب حـ}})$

، ق $(\overset{\frown}{\text{أ ب}})$ = ق $(\overset{\frown}{\text{أ ب حـ}})$ − ق $(\overset{\frown}{\text{ب حـ}})$

مثـال ١



فى الشكل المقابل:

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{\text{م حـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ،

ق (∠ أ م ء) = ٦٠° أوجـد:

١ ق $(\overset{\frown}{\text{أ ء}})$ ٢ ق $(\overset{\frown}{\text{ء حـ}})$ ٣ ق $(\overset{\frown}{\text{أ حـ}})$

٤ ق $(\overset{\frown}{\text{أ ب}})$ ٥ ق $(\overset{\frown}{\text{ء ب}})$ ٦ ق $(\overset{\frown}{\text{أ حـ}})$ الأكبر

الحـل

١ ق $(\overset{\frown}{\text{أ ء}})$ = ق (∠ أ م ء) = ٦٠°

٢ ∵ $\overline{\text{م حـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

∴ ق (∠ ء م حـ) = ٩٠° − ٦٠° = ٣٠°

∴ ق $(\overset{\frown}{\text{ء حـ}})$ = ق (∠ ء م حـ) = ٣٠°

٣ ق $(\overset{\frown}{\text{أ حـ}})$ = ق (∠ أ م حـ) = ٩٠°

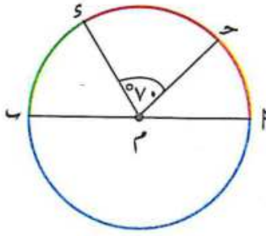
٤ ق $(\overset{\frown}{\text{أ ب}})$ = ق (∠ أ م ب) = ١٨٠°

٥ ق $(\overset{\frown}{\text{ء ب}})$ = ق (∠ ء م ب) = ٣٠° + ٩٠° = ١٢٠°

٦ ق $(\overset{\frown}{\text{أ حـ}})$ الأكبر = ق $(\overset{\frown}{\text{أ ب حـ}})$ = ق (∠ أ م حـ المنعكسة) = ٣٦٠° − ٩٠° = ٢٧٠°

مثال ٢

📖 فى الشكل المقابل: (الغربية ٢٠٢٣)



$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ، ق(∠ حـ م ء) = ٧٠° ،

ق($\overset{\frown}{أحـ}$) : ق($\overset{\frown}{ءب}$) = ٥ : ٦

أوجد ق($\overset{\frown}{أحـء}$)

الحل

∵ ق($\overset{\frown}{أحـ}$) : ق($\overset{\frown}{ءب}$) = ٥ : ٦

تذكر أن

ق($\overset{\frown}{حـء}$) = ق(∠ حـ م ء)

نفرض أن ق($\overset{\frown}{أحـ}$) = (٥ س)°

∴ ق($\overset{\frown}{ءب}$) = (٦ س)°

∵ $\overline{أب}$ قطر

∴ ق($\overset{\frown}{أحـ}$) + ق($\overset{\frown}{حـء}$) + ق($\overset{\frown}{ءب}$) = ١٨٠°

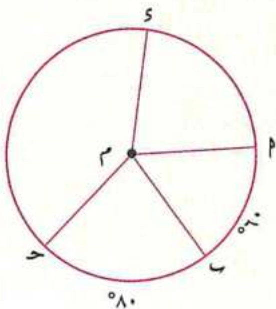
∴ (٥ س)° + ٧٠° + (٦ س)° = ١٨٠° ∴ (١١ س)° = ١١٠° ∴ س = ١٠

∴ ق($\overset{\frown}{أحـ}$) = (٥ × ١٠)° = ٥٠°

∴ ق($\overset{\frown}{أحـء}$) = ق($\overset{\frown}{أحـ}$) + ق($\overset{\frown}{حـء}$) = ٥٠° + ٧٠° = ١٢٠°

سؤال ١

فى الشكل المقابل:



إذا كان: ق($\overset{\frown}{أب}$) = ٦٠° ، ق($\overset{\frown}{بحـ}$) = ٨٠° ،

ق($\overset{\frown}{أء}$) : ق($\overset{\frown}{ءحـ}$) = ٤ : ٧

فأثبت أن: ق($\overset{\frown}{أء}$) = ق($\overset{\frown}{بحـ}$)

قياس القوس بمعلومية نسبة ما يمثله من قياس الدائرة:

قياس القوس = نسبة ما يمثله القوس من الدائرة × ٣٦٠°

حيث إن قياس الدائرة = ٣٦٠°

فمثلًا: قياس القوس الذى يمثل $\frac{١}{٦}$ قياس الدائرة = $\frac{١}{٦}$ × ٣٦٠° = ٦٠°

نقاط هامة

- **قياس نصف الدائرة = ١٨٠°**
- **قياس ربع الدائرة = ٩٠°**

مثال ٣

أوجد قياس القوس:

١ الذى يمثل $\frac{١}{٥}$ قياس الدائرة

٢ الذى يمثل $\frac{١}{٨}$ قياس الدائرة

الحل

١ قياس القوس = $\frac{١}{٥}$ × ٣٦٠° = ٧٢°

٢ قياس القوس = $\frac{١}{٨}$ × ٣٦٠° = ٤٥°

س؟ سؤال ٢

أوجد قياس القوس الذى يمثل:

١ $\frac{٢}{٣}$ قياس الدائرة ....

٢ $\frac{٥}{١٨}$ قياس الدائرة ....

٣ $\frac{٧}{٢٤}$ قياس الدائرة ....

ثانيًا طول القوس:

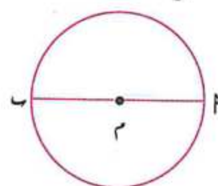
طول القوس من الدائـرة هو جزء من محيط الدائرة يتناسب مع قياس هذا القوس.

- يقاس طول القوس بوحدات قياس الأطوال (المتر – السنتيمتر ....).

العلاقـة بين طول القوس وقياس القوس:

- فى كل من الأشكال الآتية **لاحظ أن:**

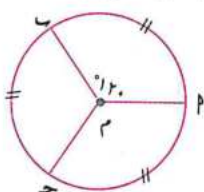
إذا كان: $\overline{أب}$ قطرًا



فـإن: $\frac{\text{طول}(\overset{\frown}{أب})}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{١}{٢}$

$\frac{ق(\overset{\frown}{أب})}{\text{قياس الدائرة}} = \frac{١٨٠°}{٣٦٠°} = \frac{١}{٢}$

إذا كان: ق $(\overset{\frown}{أب})$ = ق $(\overset{\frown}{بحـ})$ = ق $(\overset{\frown}{حـأ})$



فـإن: $\frac{\text{طول}(\overset{\frown}{أب})}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{١}{٣}$

$\frac{ق(\overset{\frown}{أب})}{\text{قياس الدائرة}} = \frac{١٢٠°}{٣٦٠°} = \frac{١}{٣}$

مما سبـق نستنتـج أن: $\frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠°}$

مثـال ٤



تذكـرأن

محيط الدائرة = ٢ π نق

أوجد **طول القوس** الذى يقابل زاوية مركزية قياسها ٧٢° فى دائرة محيطها ٦٠ سم.

الحـل

∵ $\frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠°}$ ⟸ $\frac{\text{طول القوس}}{٦٠} = \frac{٧٢°}{٣٦٠°}$ ⟸ طول القوس = $\frac{٦٠ \times ٧٢°}{٣٦٠°}$ = ١٢ سم



نقاط هامة

- **طول القوس** = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠°}$ × محيط الدائرة
- **قياس القوس** = $\frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}}$ × ٣٦٠°
- **طول الدائرة** = ٢ π نق ، **طول نصف الدائرة** = π نق ، **طول ربع الدائرة** = $\frac{١}{٢}$ π نق

مثـال ٥

أوجد قياس القوس الذى طوله ٨٨ سم فى دائرة طول نصف قطرها ٣٥ سم. (علمًا بأن $\pi \simeq \frac{٢٢}{٧}$)

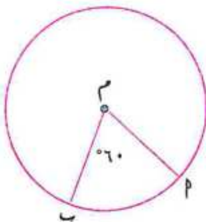
الحـل

$\because$ قياس القوس = $\frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}} \times ٣٦٠^\circ$

$\therefore$ قياس القوس $\simeq \frac{٨٨}{٣٥ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٢} \times ٣٦٠^\circ \simeq ١٤٤^\circ$

مثـال ٦

فى الشكل المقابل: الدائرة م فيها:



طول نصف قطرها ١٠,٥ سم ، ق($\angle$ أ م ب) = ٦٠° **أوجد:**

طول القوس ($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) (علمًا بأن $\pi \simeq \frac{٢٢}{٧}$)

الحـل

طول القوس ($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) $\simeq \frac{٦٠^\circ}{٣٦٠^\circ} \times ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ١٠,٥ \simeq ١١$سم

مثـال ٧

أوجد قياس القوس الذى يمثل $\frac{٣}{٤}$ قياس الدائرة، وإذا كان طول نصف قطر الدائرة يساوى ٢١سم **فأوجد** طول هذا القوس (علمًا بأن $\pi \simeq \frac{٢٢}{٧}$)

الحـل

قياس القوس = $\frac{٣}{٤} \times ٣٦٠^\circ = ٢٧٠^\circ$

طول القوس = $\frac{٣}{٤} \times ٢ \pi$ نق $\simeq \frac{٣}{٤} \times ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٢١ \simeq ٩٩$ سم

سؤال ٣

أوجد محيط الدائـرة التى طول قوس فيها ١٦سم وقياسه ١٤٤°

مثـال ٨

في الشكل المقابل:

دائرتان متحدتا المركز، طول نصف قطر الدائرة الصغرى ٧ سم وطول نصف قطر الدائرة الكبرى ١٤سم (علمًا بأن $\pi \simeq \frac{٢٢}{٧}$)

أثبت أن: ١ $\overset{\frown}{أب} \equiv \overset{\frown}{حـ ء}$ ٢ $\overset{\frown}{أب}$ لا يطابق $\overset{\frown}{هـ و}$

الحـل

١ في الدائرة الصغرى:

∵ ق(∠ ب م أ) = ق(∠ حـ م ء) = ٥٠°

∴ ق($\overset{\frown}{أب}$) = ق($\overset{\frown}{حـ ء}$) = ٥٠° ⟸ ①

∴ طول $\overset{\frown}{أب}$ = طول $\overset{\frown}{حـ ء}$ ⟸ ②

من ① ، ② ∴ $\overset{\frown}{أب} \equiv \overset{\frown}{حـ ء}$

٢ في الدائرة الكبرى:

∵ ق(∠ و م هـ) = ٥٠°

∴ ق($\overset{\frown}{هـ و}$) = ٥٠°

∴ ق($\overset{\frown}{أب}$) = ق($\overset{\frown}{هـ و}$) = ٥٠° ⟸ ①

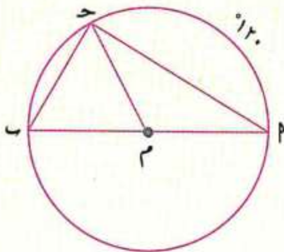
∵ طول ($\overset{\frown}{أب}$) = $\frac{٥٠°}{٣٦٠°} \times ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٧ \simeq ٦$سم

، طول ($\overset{\frown}{هـ و}$) = $\frac{٥٠°}{٣٦٠°} \times ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ١٤ \simeq ١٢$سم

∴ طول ($\overset{\frown}{أب}$) ≠ طول ($\overset{\frown}{هـ و}$) ⟸ ②

من ① ، ② ∴ $\overset{\frown}{أب}$ لا يطابق $\overset{\frown}{هـ و}$

س؟ سؤال ٤



في الشكل المقابل:

$\overline{أب}$ قطر في الدائرة م ، ق($\overset{\frown}{أحـ}$) = ١٢٠°

١ أوجد ق(∠ أ)

٢ أثبت أن: $\overline{أحـ} \perp \overline{ب حـ}$

ثالثًا نتائج هامة:

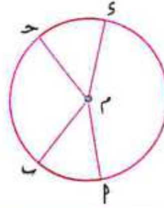
نتيجة ١

في الدائرة الواحدة (أو في الدوائر المتطابقة) الأقواس المتساوية في القياس متساوية في الطول، والعكس صحيح.

فمثلًا: في الشكل المقابل:

إذا كان: ق(⌢أ ب) = ق(⌢حـ ء)

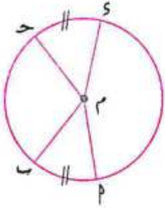
فإن : طول (⌢أ ب) = طول (⌢حـ ء)



فمثلًا: في الشكل المقابل:

إذا كان: طول (⌢أ ب) = طول (⌢حـ ء)

فإن : ق(⌢أ ب) = ق(⌢حـ ء)



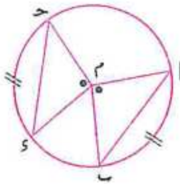
نتيجة ٢

في الدائرة الواحدة (أو في الدوائر المتطابقة) الأقواس المتساوية في القياس أوتارها متساوية في الطول، والعكس صحيح.

فمثلًا: في الشكل المقابل:

إذا كان: ق(⌢أ ب) = ق(⌢حـ ء)

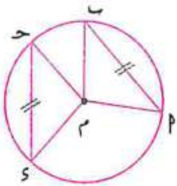
فإن : أ ب = حـ ء



فمثلًا: في الشكل المقابل:

إذا كان: أ ب = حـ ء

فإن : ق(⌢أ ب) = ق(⌢حـ ء)



لاحظ أن

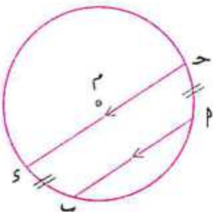
وتر القوس هو القطعة المستقيمة الواصلة بين نهايتي القوس.

نتيجة ٣

الوتران المتوازيان في الدائرة يحصران قوسين متساويين في القياس.

فمثلًا: في الشكل المقابل:

إذا كان: $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{حـ ء}}$ فإن : ق(⌢أ حـ) = ق(⌢ب ء)



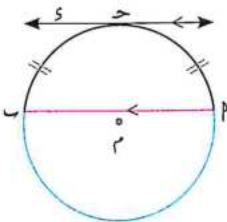
نتيجة ٤

القوسان المحصوران بين وتر ومماس يوازيه في الدائرة متساويان في القياس.

فمثلًا: في الشكل المقابل:

إذا كان: $\overline{\text{أ ب}}$ وترًا في الدائرة م ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ مماسًا للدائرة عند حـ ، $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$

فإن : ق(⌢أ حـ) = ق(⌢ب حـ)



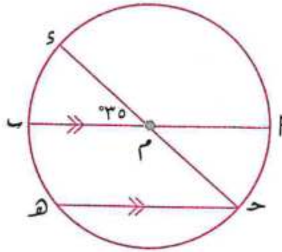
مثـال ٩

فى الشكل المقابل:

$\overline{أب}$ ، $\overline{حـ ء}$ قطران فى الدائرة م ،

$\overline{أب}$ // $\overline{حـ هـ}$ ، ق(∠ ء م ب) = ٣٥°

أوجد: ق($\overset{\frown}{حـ هـ}$) ، ق($\overset{\frown}{أ ء}$)



الحـل

∵ $\overline{أب}$ ∩ $\overline{حـ ء}$ = {م}

∴ ق(∠ أ م حـ) = ق(∠ ء م ب) = ٣٥° ⟸ **(بالتقابل بالرأس)**

∴ ق($\overset{\frown}{أ حـ}$) = ٣٥°

∵ $\overline{أب}$ // $\overline{حـ هـ}$

∴ ق($\overset{\frown}{أ حـ}$) = ق($\overset{\frown}{ب هـ}$) = ٣٥°

∵ $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م

∴ ق($\overset{\frown}{حـ هـ}$) = ١٨٠° − (٣٥° + ٣٥°) = ١١٠°

∵ ق(∠ أ م ء) = ١٨٠° − ٣٥° = ١٤٥°

∴ ق($\overset{\frown}{أ ء}$) = ١٤٥°

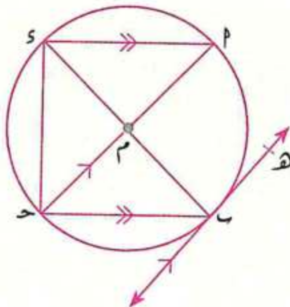
سؤال ٥

فى الشكل المقابل:

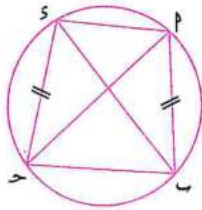
$\overline{أ ء}$ // $\overline{ب حـ}$ ، $\overleftrightarrow{ب هـ}$ يمس الدائرة فى ب ،

$\overleftrightarrow{ب هـ}$ // $\overline{أ حـ}$

أثبت أن: △ ب حـ ء متساوى الساقين



مثـال ١٠



فى الشكل المقابل:

أ ب حـ ء شكل رباعى مرسـوم داخل دائرة

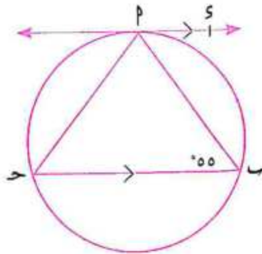
حيث أ ب = حـ ء   **أثبـت أن:** ب ء = أ حـ

الحـل

∵ أ ب = حـ ء   ∴ ق(⌒أ ب) = ق(⌒حـ ء) ⟸ **بإضافـة** ق(⌒أ ء) للطرفيـن

ينتـج أن: ق(⌒ب أ ء) = ق(⌒أ ء حـ)   ∴ ب ء = أ حـ

مثـال ١١



فى الشكل المقابل: $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ مماس للدائرة عند أ

، $\overline{\text{ب حـ}}$ وتر فى الدائرة **حيـث إن:** $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

فإذا كان: ق(∠ أ ب حـ) = ٥٥° **فأوجـد** ق(∠ ب أ حـ)

الحـل

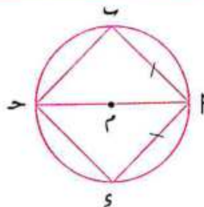
∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ مماس للدائرة ، $\overline{\text{ب حـ}}$ وتر فى الدائرة ، $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

∴ ق(⌒أ ب) = ق(⌒أ حـ)   ،   ∴ أ ب = أ حـ

∴ المثلث أ ب حـ متساوى الساقين   ∴ ق(∠ أ ب حـ) = ق(∠ أ حـ ب) = ٥٥° ،

∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث = ١٨٠°   ∴ ق(∠ ب أ حـ) = ١٨٠° − (٥٥° + ٥٥°) = ٧٠°

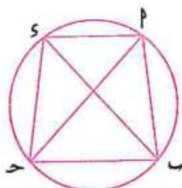
س؟ سؤال ٦



١ فى الشكل المقابل:

إذا كان : أ ب حـ ء شكلًا رباعيًّا مرسومًا داخل دائرة م

حيث أ ب = أ ء ، $\overline{\text{أ حـ}}$ قطر فيها، فأثبـت أن: ب حـ = ء حـ



٢ فى الشكل المقابل:

أ ب حـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة، فيـه:

أ حـ = ب ء ، أ ب = (٣س − ٥) سم ، حـ ء = (س + ٣) سم

أوجد بالبرهان طول $\overline{\text{أ ب}}$ (الشرقية ٢٠٢٣)



تدريبات الأضـــواء

أولًا الزاوية المركزية وقياس القوس

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ قياس الزاوية المركزية .... قياس القوس المقابل لها. (القليوبية ٢٠١٦)

(أ) ضعف (ب) نصف (جـ) يساوى (د) أكبر من

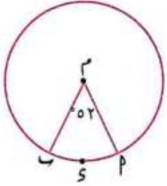
٢ قياس القوس الذى يمثل ربع قياس الدائرة يساوى .... (بورسعيد ٢٠٢٠)

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ٢٤٠°

٣ إذا كان $\overline{أ حـ}$ قطر فى الدائرة فإن ق($\overset{\frown}{أ حـ}$) = ... (أسوان ٢٠٢٣)

(أ) ٤٥° (ب) ٩٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٣٦٠°

٤ فى الشكل المقابل: (الأقصر ٢٠١٠)

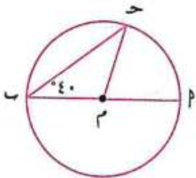


فى دائرة م إذا كان ق(∠ أ م ب) = ٥٢°

فإن: ق ($\overset{\frown}{أ ء ب}$) = ...

(أ) ٥٢° (ب) ١٠٤° (جـ) ٢٦° (د) ٣٠٨°

٥ فى الشكل المقابل: (البحر الأحمر ٢٠١٣)

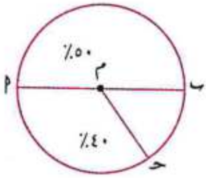


إذا كان $\overline{أ ب}$ قطرًا فى الدائرة م ، ق(∠ أ ب حـ) = ٤٠°

فإن ق($\overset{\frown}{ب حـ}$) = ...

(أ) ٤٠° (ب) ٥٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٠٠°

٦ فى الشكل المقابل: (جنوب سيناء ٢٠١٦)



إذا كان م مركز الدائرة، فإن ق(∠ حـ م ب) = ...

(أ) ٣٦° (ب) ٧٢° (جـ) ١٤٤° (د) ١٨٠°

٧ إذا كان أ ب حـ ء مربعًا مرسومًا داخل دائرة، فإن: ق ($\overset{\frown}{أ ب}$) = ...° (قنا ٢٠٢٣)

(أ) ٦٠ (ب) ٩٠ (جـ) ١٢٠ (د) ١٨٠

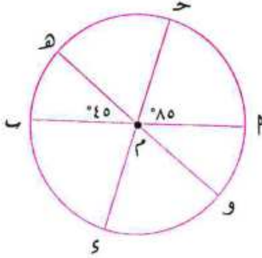
٢ أكمل ما يأتى:

١ الزاوية المركزية هى الزاوية التى رأسها .... ويحمل كل من ضلعيها ....

٢ قياس الدائرة = ...° بينما محيط الدائرة = ...

٣ قياس القوس فى الدائرة يساوى قياس الزاوية .... المقابلة له.

٤ فى الشكل المقابل:

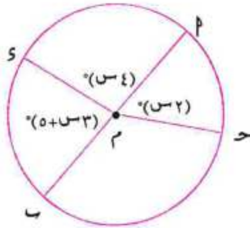


$\overline{أب}$ ، $\overline{حـء}$ ، $\overline{هـو}$ أقطار فى الدائرة م ، أكمل:

(أ) ق($\frown$ أحـ) = ...   (ب) ق($\frown$ أحـهـ) = ...

(جـ) ق($\frown$ أحـء) = ...   (د) ق($\frown$ أوهـ) = ...

٥ فى الشكل المقابل:



$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ، ادرس الشكل ثم أكمل:

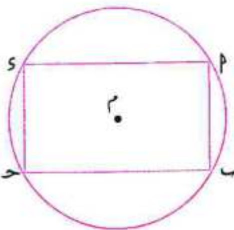
(أ) س = ...   (ب) ق($\frown$ أحـ) = ...°

(جـ) ق($\frown$ أء) = ...°   (د) ق($\frown$ بحـ) = ...°

(هـ) ق($\frown$ حـأء) = ...°   (و) ق($\frown$ حـبء) = ...°

(ز) ق($\frown$ أحـء) = ...°   (ح) ق($\frown$ أءحـ) = ...°

٦ فى الشكل المقابل:



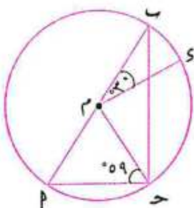
أ ب حـ ء مستطيل مرسوم داخل الدائرة م

إذا كان أ ب = $\frac{1}{2}$ أ حـ

فإن ق($\frown$ أء) = ...°

---

٣ فى الشكل المقابل:



$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ، ق($\angle$ ءمب) = ٣٠°،

ق($\angle$ محـأ) = ٥٩° أوجد:

١ ق($\frown$ أحـ)   ٢ ق($\frown$ بءحـ)

ثانيًا طول القوس

٤ اختر الإجابة الصحيحة:

١ نصف محيط الدائرة = ...

(أ) ١٨٠° (ب) ٣٦٠° (جـ) $\frac{١}{٣}$ π نق (د) π نق

٢ قياس القوس الذى طوله يساوى ثلث محيط الدائرة = ... ° (كفر الشيخ ٢٠٢٣)

(أ) ٦٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ١٨٠ (د) ٢٧٠

٣ قياس الزاوية المركزية التى تحصر قوسًا من الدائرة يمثل $\frac{١}{٤}$ محيط الدائرة هو ....

(أ) ٣٦٠° (ب) ٢٧٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٩٠°

٤ الزاوية المركزية التى قياسها يساوى ٩٠° تكون مرسومة على قوس من الدائرة يمثل .... محيط الدائرة.

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{١}{٥}$

٥ طول القوس من الدائرة الذى يمثل $\frac{١}{٤}$ محيط الدائرة يساوى .... (الدقهلية ٢٠١٧)

(أ) ٤ π نق (ب) ٢ π نق (جـ) π نق (د) $\frac{١}{٢}$ π نق

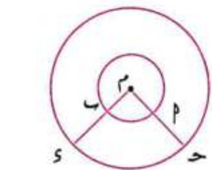
٦ قوس من دائرة طوله $\frac{١}{٣}$ π نق سم فإنه يقابل زاوية مركزية قياسها يساوى .... (الجيزة ٢٠٢٢)

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ٢٤٠°

٧ دائرة محيطها ٣٦ سم فإن قياس قوس منها طوله ٦ سم يساوى ....° (المنوفية ٢٠١٦)

(أ) ٦٠ (ب) ٣٠ (جـ) ٩٠ (د) ١٢٠

٨ فى الشكل المقابل: (الإسماعيلية ٢٠١٧)

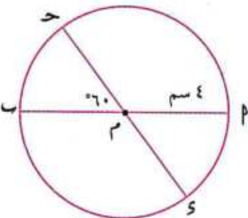


دائرتان متحدتا المركز م

إذا كان طولا نصفى قطريهما ٢ سم، ٥ سم فإن: $\frac{\text{ل}(\overset{\frown}{أ ب})}{\text{ل}(\overset{\frown}{جـ ء})}$ = ...

(أ) $\frac{٢}{٥}$ (ب) $\frac{٥}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) ١

٩ فى الشكل المقابل: م دائرة (المنوفية ٢٠١٩)



إذا كان م أ = ٤ سم، ق (∠ ب م جـ) = ٦٠°

فإن طول $(\overset{\frown}{ب ء})$ = ... سم

(أ) ٤ π (ب) ٨ π

(جـ) $\frac{٨}{٣}$ π (د) ١٦ π

٥ أكمل ما يأتى:

١ قيـاس نصف الدائرة = ... ، بينما طول القوس الذى يمثل نصف دائرة طول نصف قطرها نق سم = ... سم.

٢ $\frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{\text{قياس القوس}}{\text{............}^\circ}$

٣ إذا كان ($\overset{\frown}{أب}$) يمثل $\frac{٢}{٥}$ قياس دائرة طول نصف قطرها ٧سم فإن ق ($\overset{\frown}{أب}$) = ...°،

طول ($\overset{\frown}{أب}$) = ...سم.

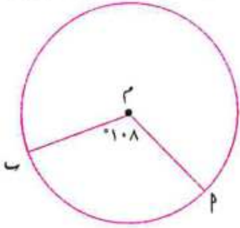
---

٦ أوجد قياس القوس الذى يمثل $\frac{١}{٣}$ قياس الدائرة،

ثم احسب طول هذا القوس إذا كان طول نصف قطر الدائرة ٧ سم. (حيث $\pi \simeq \frac{٢٢}{٧}$)

---

٧ فى الشكل المقابل: (البحيرة ٢٠٢٣)



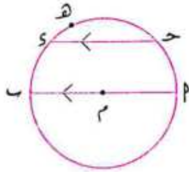
م دائرة طول نصف قطرها ٥سم، ق($\overset{\frown}{أب}$) = ١٠٨°

أوجد طول ($\overset{\frown}{أب}$) $(\pi \simeq ٣,١٤)$

ثالثا نتائج هامة

٨ اختر الإجابة الصحيحة:

١ فى الشكل المقابل: (الشرقية ٢٠١٨)

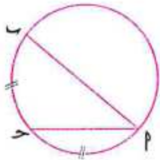


إذا كان $\overline{أب}$ قطرًا فى الدائرة م ، $\overline{أب}$ // $\overline{حـ د}$ ،

ق($\overset{\frown}{دهـ حـ}$) = ٨٠° ، فإن ق ($\overset{\frown}{أ حـ}$) = ...

(أ) ٤٠° (ب) ٥٠° (جـ) ٨٠° (د) ١٠٠°

٢ فى الشكل المقابل: (الجيزة ٢٠١٧)

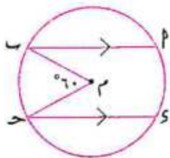


إذا كانت حـ منتصف ($\overset{\frown}{أب}$)،

فإن أب .... ٢ أ حـ

(أ) > (ب) < (جـ) ≤ (د) =

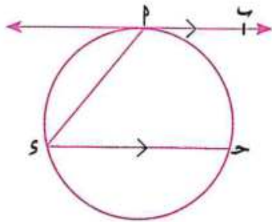
٣ فى الشكل المقابل: (أسوان ٢٠١٨)



م دائرة إذا كان: $\overline{أب}$ // $\overline{حـ د}$ ، ق(∠ ب م حـ) = ٦٠°،

فإن ق ($\overset{\frown}{أ د}$) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٠° (جـ) ٦٠° (د) ١٢٠°



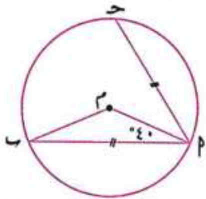
٤ في الشكل المقابل:

إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ مماسًا للدائرة عند أ ، $\overline{حـء}$ وترًا

حيث $\overleftrightarrow{أب}$ // $\overline{حـء}$ ، ق($\overset{\frown}{أحـ}$) = ١٠٠° فإن: ق($\overset{\frown}{أء}$) = ...

(أ) ١٠٠° (ب) ٥٠°

(جـ) ٢٥° (د) ١٣٠°



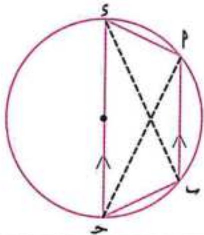
٥ في الشكل المقابل:

إذا كان $\overline{أب}$ // $\overline{حـء}$ ، $\overline{أو}$ // $\overline{حـهـ}$ ، ق($\overset{\frown}{بء}$) = ٤٠°

فإن: ق($\overset{\frown}{هـو}$) = ...

(أ) ٢٠° (ب) ٤٠°

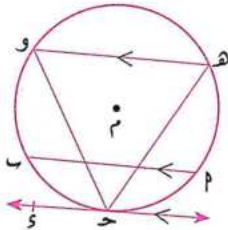
(جـ) ٨٠° (د) ١٤٠°



٩ في الشكل المقابل:

م دائرة ، ق (∠م أ ب) = ٤٠°، أ ب = أ حـ

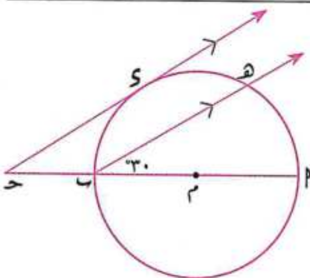
أوجد: ق ($\overset{\frown}{أحـ}$)



١٠ في الشكل المقابل:

أ ب حـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة، $\overline{أب}$ // $\overline{ءحـ}$

أثبت أن: حـ أ = ب ء



١١ في الشكل المقابل:

م دائرة، $\overleftrightarrow{حـء}$ مماس للدائرة عند حـ،

$\overline{أب}$ ، $\overline{هـو}$ وتران في الدائرة حيث: $\overline{أب}$ // $\overline{هـو}$ // $\overleftrightarrow{حـء}$

أثبت أن: حـ هـ = حـ و

١٢ في الشكل المقابل:

$\overleftarrow{حـء}$ مماس للدائرة م عند ء ، $\overline{أب}$ قطر في الدائرة ،

$\overleftarrow{حـء}$ // $\overleftarrow{بهـ}$ ، ق (∠أ ب هـ) = ٣٠°

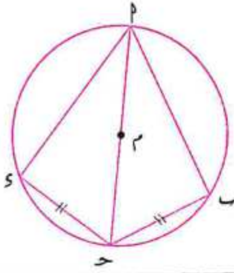
أوجد مع البرهان كلًّا من: ق ($\overset{\frown}{بء}$) ، ق ($\overset{\frown}{بأهـ}$)

١٣ في الشكل المقابل:

أ ب حـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة م ،

$\overline{\text{أ حـ}}$ قطر فى الدائرة ، حـ ب = حـ ء

أثبت أن: و($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = و($\overset{\frown}{\text{أ ء}}$)

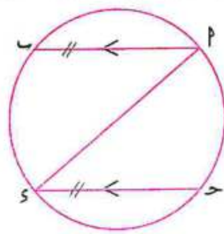


١٤ في الشكل المقابل: (بنى سويف ٢٠٢٣)

$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$ وتران فى الدائرة ،

أ ب = حـ ء ، $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{حـ ء}}$

أثبت أن: $\overline{\text{أ ء}}$ قطر فى الدائرة

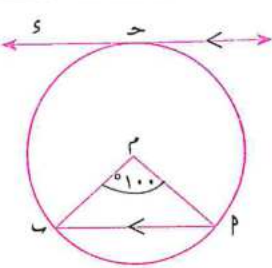


١٥ في الشكل المقابل:

$\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ مماس للدائرة عند حـ ،

و (∠ أ م ب) = ١٠٠°

أوجد: و ($\overset{\frown}{\text{أ حـ}}$)



TIMSS تفكير إبداعى

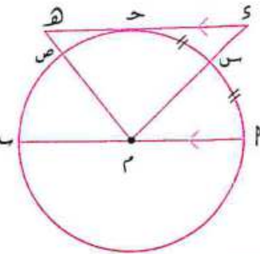
١٦ في الشكل المقابل:

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{\text{ءهـ}}$ مماس للدائرة عند حـ

$\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{ءهـ}}$ ، س منتصف $\overset{\frown}{\text{أ حـ}}$ ،

و($\overset{\frown}{\text{س ص}}$) = ٢و($\overset{\frown}{\text{حـ ص}}$)

أوجد و(∠ ء م هـ)



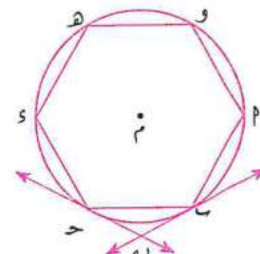
١٧ في الشكل المقابل:

إذا كان أ ب حـ ء هـ و سداسيًّا منتظمًا مرسومًا داخل الدائرة م ،

$\overleftrightarrow{\text{ب ن}}$ مماسًّا للدائرة عند ب ، $\overleftrightarrow{\text{ن حـ}}$ مماسًّا للدائرة عند حـ،

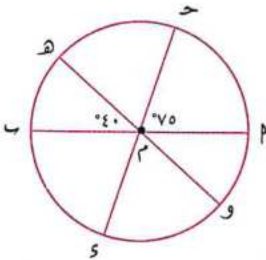
$\overleftrightarrow{\text{ب ن}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{ن حـ}}$ = {ن} **فأوجد:**

١ و($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$) ٢ و(∠ ب ن حـ)



١ فى الشكل المقابل:

$\overline{أب}$ ، $\overline{حـ ء}$ ، $\overline{هـ و}$ أقطار فى الدائرة م ، أكمل:



(أ) ق($\overset{\frown}{أ حـ}$) = ...

(ب) ق($\overset{\frown}{أ حـ هـ}$) = ...

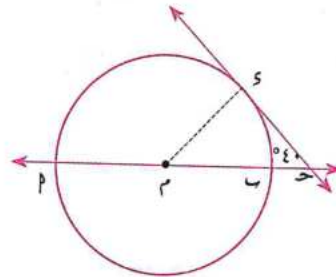
(جـ) ق($\overset{\frown}{أ حـ ء}$) = ...

(د) ق($\overset{\frown}{أ و هـ}$) = ...

---

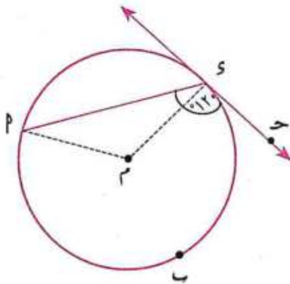
٢ فى كل من الشكلين الآتيين: $\overleftrightarrow{حـ ء}$ مماس للدائرة م عند ء ، **أكمل:**

(أ)



ق($\overset{\frown}{ء ب}$) = ... ، ق($\overset{\frown}{أ ء}$) = ...

(ب)



ق($\overset{\frown}{أ ب ء}$) = ...

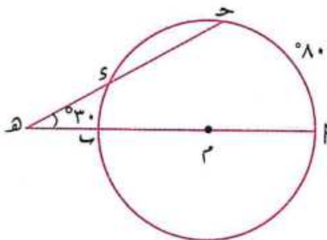
---

٣ فى الشكل المقابل: (البحيرة ٢٠٢٤)

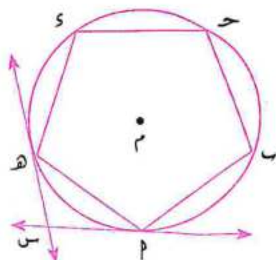
$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ، $\overrightarrow{أب} \cap \overrightarrow{حـ ء} = \{هـ\}$

ق(∠ أ هـ حـ) = ٣٠° ، ق($\overset{\frown}{أ حـ}$) = ٨٠°

أوجد ق($\overset{\frown}{حـ ء}$)



٤ في الشكل المقابل:



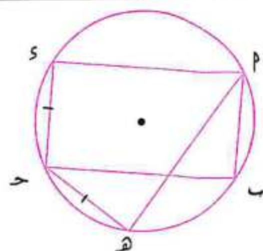
أ ب حـ ء هـ خماسي منتظم، مرسوم داخل الدائرة م،

$\overleftrightarrow{\text{أ س}}$ مماس للدائرة عند أ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ س}}$ مماس للدائرة عند هـ ،

حيث $\overleftrightarrow{\text{أ س}} \cap \overleftrightarrow{\text{هـ س}}$ = {س} أوجد:

(أ) ق($\overset{\frown}{\text{أ هـ}}$) (ب) ق(∠أ س هـ)

٥ في الشكل المقابل: (المنيا ٢٠٢٤)

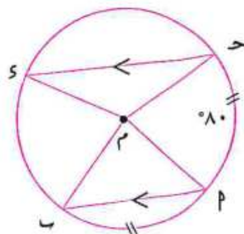


أ ب حـ ء مستطيل مرسوم داخل دائرة، رسم الوتر $\overline{\text{حـ هـ}}$

بحيث حـ هـ = حـ ء

أثبت أن: أ هـ = ب حـ

٦ في الشكل المقابل:



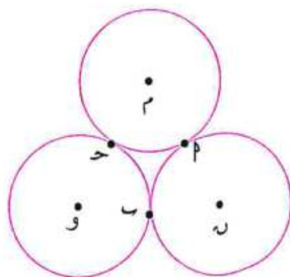
م دائرة طول نصف قطرها ١٥سم،

$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$ وتران متوازيان في الدائرة، ق($\overset{\frown}{\text{أ حـ}}$) = ٨٠° ،

طول ($\overset{\frown}{\text{أ حـ}}$) = طول ($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) أوجد:

(أ) ق(∠م أ ب) (ب) ق($\overset{\frown}{\text{حـ ء}}$) (جـ) طول ($\overset{\frown}{\text{حـ ء}}$)

٧ في الشكل المقابل:



م ، ن ، و ثلاث دوائر متطابقة ومتماسة في أ ، ب، حـ،

طول نصف قطر كل منها ١٠ سم.

(أ) أثبت أن: طول ($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = طول ($\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$) = طول ($\overset{\frown}{\text{أ حـ}}$)

(ب) أوجد محيط الشكل المظلل أ ب حـ

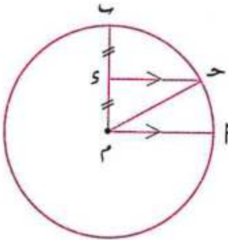
١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ قياس القوس الذى يمثل نصف قياس الدائرة = ... (جنوب سيناء ٢٠٢٣)

(أ) ٤٥° (ب) ٩٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٣٦٠°

٢ دائرتان طولا نصفى قطريهما ٣ سم ، ٧ سم تكونان متماستين إذا كان البُعد بين مركزيهما ∈ .... (الإسماعيلية ٢٠٢٣)

(أ)]٤ ، ١٠[(ب)]١٠ ، ∞[(جـ)]صفر ، ٤[(د) {٤ ، ١٠}



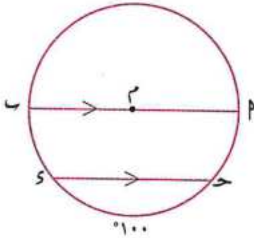
٣ فى الشكل المقابل: (سوهاج ٢٠١٨)

أم // حـء ، مء = ب ء، ق(∠أمب) = ٩٠°

فإن ق(أحـ⌒) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥°

(جـ) ٦٠° (د) ٩٠°



٤ فى الشكل المقابل: (الشرقية ٢٠١٩)

أب قطر فى الدائرة م ، أب // حـء

، ق(حـء⌒) = ١٠٠°، ق(بء⌒) = (٢ س − ١٠)° فإن

أولًا: ق(أحـ⌒) = ...

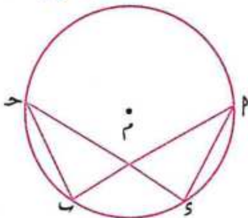
(أ) ١٠٠° (ب) ٨٠° (جـ) ٥٠° (د) ٤٠°

ثانيًا: قيمة س = ...

(أ) ٥٠ (ب) ٤٠ (جـ) ٣٠ (د) ٢٥

٢

١ أوجد قياس القوس الذى يمثل $\frac{٤}{٩}$ من قياس الدائرة، وإذا كان طول نصف قطر هذه الدائرة يساوى ٥ , ٤ سم فاحسب طول هذا القوس بدلالة π (الدقهلية ٢٠٢٣)



٢ فى الشكل المقابل: (الإسماعيلية ٢٠٢٣)

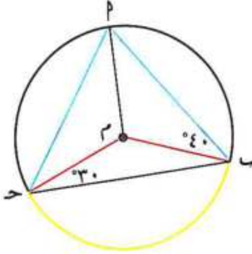
أب ، حـء وتران متساويان فى الدائرة م

أثبت أن : أء = حـب



ذاكر الدرس ٣
العلاقة بين الزاويتين المحيطية والمركزية المشتركتين فى القوس

فكر وناقش فى الشكل المقابل:

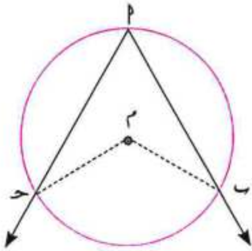


- ق (∠ م ب حـ) = ٣٠°
- ق (∠ ب م حـ) = ١٨٠° - (٣٠° + ٣٠°) = ١٢٠°
- ق (∠ ب م ء) = ١٠٠°، ق (∠ حـ م ء) = ١٤٠°، ق (∠ حـ ء م) = ٢٠°
- ق (∠ ب ء حـ) = ق (∠ ب ء م) + ق (∠ حـ ء م) = ٤٠° + ٢٠° = ٦٠°

قارن بين: ق (∠ ب ء حـ) ، ق (∠ ب م حـ) **ماذا تلاحظ؟**

تعريـف

الزاويـة المحيطية: هى الزاوية التى رأسها على الدائرة ويحمل كل ضلع من ضلعيها وترًا فى الدائرة.



فى الشكل المقابل:

(∠ ب ء حـ) هى زاوية محيطية لأن:

رأسها ء ∈ للدائرة م

يحمل كل من ضلعيها $\overrightarrow{ء حـ}$ ، $\overrightarrow{ء ب}$ وترًا فى الدائرة هما $\overline{ء حـ}$ ، $\overline{ء ب}$

(∠ ب ء حـ) المحيطية يقابلها ($\frown{ب حـ}$)

(∠ ب ء حـ) المحيطية تشترك مع (∠ ب م حـ) المركزية فى نفس القوس ($\frown{ب حـ}$)

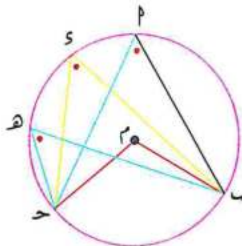


نقاط هامة

- لكل زاوية محيطية توجد زاوية مركزية واحدة تشترك معها فى نفس القوس.

أى أن: الزوايا المحيطية المشتركة فى نفس القوس لها زاوية مركزية واحدة تشترك معها فى نفس القوس.

فمثلًا: **فى الشكل المقابل، نلاحظ أن:**



(∠ ء) ، (∠ د) ، (∠ هـ) زوايا محيطية مشتركة فى القوس $\frown{ب حـ}$

، (∠ ب م حـ) المركزية لها نفس القوس ($\frown{ب حـ}$)

أى أنـه: يمكن رسم عدد لا نهائى من الزوايا المحيطية التى تشترك مع الزاوية المركزية فى نفس القوس.

أولًا نظرية

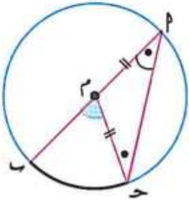
قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس.

المعطيـات : ∠ ب أ جـ زاوية محيطية ، ∠ ب م جـ زاوية مركزية

المطلـوب : **إثبات أن:** ق(∠ ب أ جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ ب م جـ)

توجد ثلاث حالات لإثبات صحة النظرية

البرهـان : **الحالة الأولى:** إذا كانت م تنتمى إلى أحد ضلعى الزاوية المحيطية



∵ ∠ ب م جـ زاوية خارجة عن المثلث أ م جـ

∴ ق(∠ ب م جـ) = ق(∠ ب أ جـ) + ق(∠ جـ) ⟸ (١)

∵ م أ = م جـ = نق

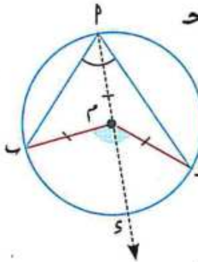
∴ ق(∠ ب أ جـ) = ق(∠ جـ) ⟸ (٢)

من (١) ، (٢)

∴ ق(∠ ب م جـ) = ٢ ق(∠ ب أ جـ)

∴ ق(∠ ب أ جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ ب م جـ)

الحالة الثانية: إذا كانت م تقع داخل الزاوية المحيطية ب أ جـ



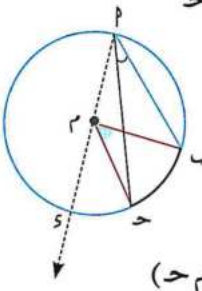
العمـل والبرهـان : نرسم $\overleftarrow{أم}$ ليقطع الدائرة فى د

∵ ق(∠ جـ أ د) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ جـ م د) (من الحالة الأولى) ⟸ (١)

، ق(∠ ب أ د) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ ب م د) (من الحالة الأولى) ⟸ (٢)

∴ بجمع (١) ، (٢) ينتج أن: ق(∠ ب أ جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ ب م جـ)

الحالة الثالثة: إذا كانت م تقع خارج الزاوية المحيطية ب أ جـ



العمـل والبرهـان : نرسم $\overleftarrow{أم}$ ليقطع الدائرة فى د

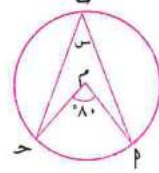
∵ ق(∠ ب أ د) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ ب م د) (من الحالة الأولى) ⟸ (١)

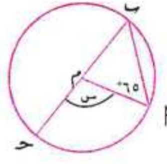
، ق(∠ جـ أ د) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ جـ م د) (من الحالة الأولى) ⟸ (٢)

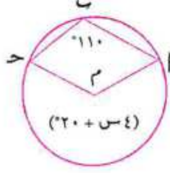
∴ بطرح (٢) من (١) ينتج أن: ق(∠ ب أ جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ ب م جـ)

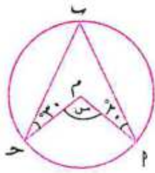
مثال ١

أوجد قيمة س فى كل من الأشكال الآتية حيث م مركز الدائرة:

١ 

٢ 

٣ 

٤ 

الحـل

١ ∵ ∠ ء ب حـ محيطية ، ∠ ء م حـ مركزية مشتركتان فى القوس ء حـ

∴ ق(∠ ء ب حـ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ ء م حـ) ⟸ (نظرية)

∴ س = $\frac{1}{2}$ × ٨٠° ∴ س = ٤٠°

٢ ∵ م ء = م ب = نق ∴ ق(∠ ء) = ق(∠ ب) = ٦٥°

∵ ق(∠ ء ب حـ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ ء م حـ) ⟸ (نظرية)

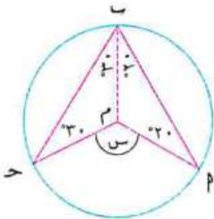
∴ ٦٥° = $\frac{1}{2}$ س ⟸ (×٢) ∴ س = ١٣٠°

٣ ∵ ق(∠ ء ب حـ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ ء م حـ المنعكسة)

∴ ١١٠° = $\frac{1}{2}$ (٤س + ٢٠°) ∴ ١١٠° = (٢س + ١٠°)

∴ ١١٠° − ١٠° = ٢س ∴ ١٠٠° = ٢س ∴ س = ٥٠°

٤ نرسم $\overline{\text{م ب}}$



∵ م ء = م ب = نق ∴ ق(∠ ء) = ق(∠ ء ب م) = ٢٠°

∵ م ب = م حـ = نق ∴ ق(∠ حـ) = ق(∠ م ب حـ) = ٣٠°

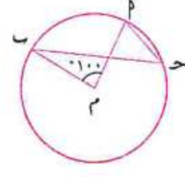
∴ ق(∠ ء ب حـ) = ٢٠° + ٣٠° = ٥٠° ،

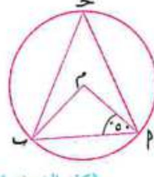
∵ ق(∠ ء م حـ) = ٢ ق(∠ ء ب حـ) ⟸ (نظرية)

∴ ق(∠ ء م حـ) = ٢ × ٥٠° = ١٠٠° ∴ س = ١٠٠°

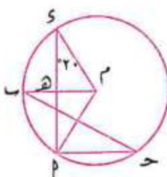
سؤال ١

أوجد ق (∠ ء حـ ب) فى كلٍّ من الأشكال التالية حيث م دائرة :

١ 

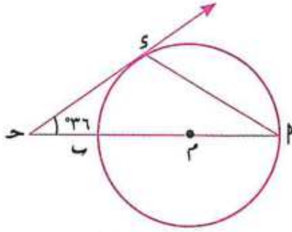
٢ 

(كفر الشيخ ٢٠٢٤)

٣ 

مثال ٢

فى الشكل المقابل: (سوهاج ٢٠٢٤)



$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ، حـ ∈ $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{حـء}$ مماس للدائرة م عند نقطة ء

إذا كان ق(∠ حـ) = ٣٦°

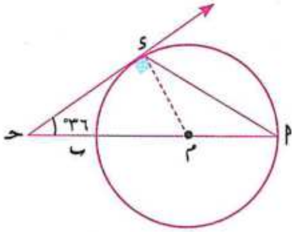
فأوجد بالبرهان ق(∠ أ)

الحـل

المعطيـات : $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ، $\overleftarrow{حـء}$ مماس لها عند نقطة ء ، ق(∠ حـ) = ٣٦°

المطلـوب : إيجاد ق(∠ أ)

العمـل : نرسم $\overline{مء}$



البرهـان : ∵ $\overleftarrow{حـء}$ مماس للدائرة م عند ء ، $\overline{ءم}$ نصف قطر فيها

∴ ق(∠ حـءم) = ٩٠°

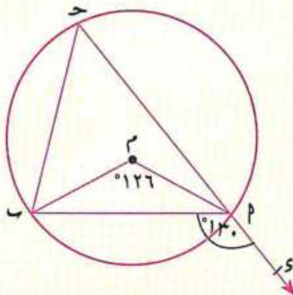
فى △ م ء حـ : ق(∠ ءمب) = ٩٠° − ٣٦° = ٥٤°

∵ ق(∠ أ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ ءمب) ⟸ (نظرية)

∴ ق(∠ أ) = $\frac{1}{2}$ × ٥٤° = ٢٧°

سؤال ٢

فى الشكل المقابل:



أ ب حـ مثلث مرسوم داخل الدائرة م ،

ء ∈ $\overleftarrow{حـأ}$ ، ق(∠ ب أ ء) = ١٣٠° ، ق(∠ أ م ب) = ١٢٦°

أكمل ما يأتى:

١ ق(∠ أ حـ ب) = ...°

٢ ق(∠ م ب أ) = ...°

٣ ق(∠ ب أ حـ) = ...°

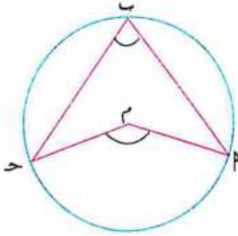
٤ ق(∠ م أ حـ) = ...°

٥ ق(∠ أ ب حـ) = ...°

ثانيًا نتائج على النظرية (١) وتمارين مشهورة عليها:

نتيجـــة ١

قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس القوس المقابل لها.



فمثلًا: فى الشكل المقابل:

ق(∠ أ ب حـ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ أ م حـ) ⟸ ١ (نظرية)

، ق(∠ أ م حـ) = ق(⌒أ حـ) ⟸ ٢

من ١ ، ٢ ينتـج أن:

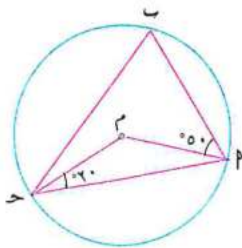
ق(∠ أ ب حـ) = $\frac{1}{2}$ ق(⌒أ حـ)

نقاط هامة

- قياس القوس يساوى ضعف قياس الزاوية المحيطية التى تحصره.

ففى الشكل السابق: ق(⌒أ حـ) = ٢ ق(∠ أ ب حـ)

مثـال ٣



فى الشكل المقابل: △ أ ب حـ مرسوم داخل الدائرة م

ق(∠ ب أ م) = ٥٠° ، ق(∠ م حـ أ) = ٢٠°

أوجد بالبرهان كلًّا مما يأتى:

١ ق(∠ أ م حـ)   ٢ ق(∠ ب)   ٣ ق(⌒ب حـ)

الحـل

١ ∵ م أ = م حـ = نق   ∴ ق(∠ م أ حـ) = ق(∠ م حـ أ) = ٢٠°

∴ ق(∠ أ م حـ) = ١٨٠° − (٢٠° + ٢٠°) = ١٤٠°

٢ ∵ ق(∠ ب) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ أ م حـ) ⟸ (نظرية)

∴ ق(∠ ب) = $\frac{1}{2}$ × ١٤٠° = ٧٠°

٣ ق(∠ ب أ حـ) = ٥٠° + ٢٠° = ٧٠°

∵ ق(⌒ب حـ) = ٢ ق(∠ ب أ حـ) ⟸ (نتيجة)

∴ ق(⌒ب حـ) = ٢ × ٧٠° = ١٤٠°

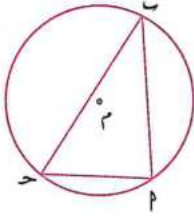
مثال ٤

📖 فى الشكل المقابل:

أ ب حـ مثلث مرسوم داخل الدائرة م فيه:

و(⌒أ ب) : و(⌒ب حـ) : و(⌒أ حـ) = ٤ : ٥ : ٣

أوجد: و(∠ أ حـ ب)



الحل

نفرض أن: و(⌒أ ب) = (٤س)° ، و(⌒ب حـ) = (٥س)° ، و(⌒أ حـ) = (٣س)°

∵ قياس الدائرة = ٣٦٠° ∴ (٤س)° + (٥س)° + (٣س)° = ٣٦٠°

∴ ١٢س = ٣٦٠ ∴ س = ٣٠

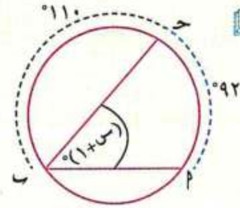
∴ و(⌒أ ب) = (٤ × ٣٠)° = ١٢٠° ويقابل ∠ أ حـ ب المحيطية

∵ و(∠ أ حـ ب) = $\frac{1}{2}$ و(⌒أ ب) ∴ و(∠ أ حـ ب) = $\frac{1}{2}$ × ١٢٠° = ٦٠°

سؤال ٣

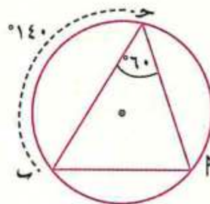
ادرس كلًّا من الأشكال الآتية ثم أوجد قياس الزاوية أو القوس المطلوب فى كل شكل:

١ 📖



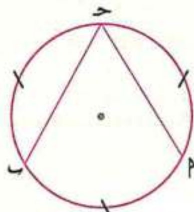
قيمة س، و(⌒أ ب)

٢ 📖



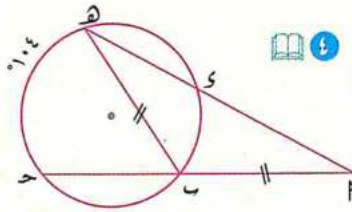
و(∠ أ)، و(⌒أ حـ)

٣ 📖



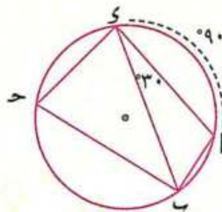
و(∠ حـ)

٤ 📖



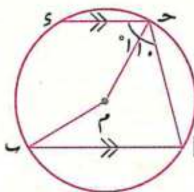
و(∠ هـ أ حـ)

٥ 📖



و(∠ ء حـ ب)

٦

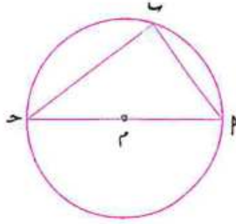


و(∠ ب م حـ)

(الشرقية ٢٠٢٤)

نتيجـــة (٢)

الزاويـة المحيطيـة المرسومة فى نصف دائرة قائمة.



فمثلًا: فى الشكل المقابل:

ﻫ حـ قطر فى الدائرة م ، ب ∈ ﻫ حـ

∵ ق(ﻫ حـ) = ١٨٠° (نصف دائرة)

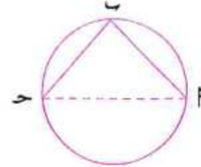
، ق(∠ ﻫ ب حـ) = ½ ق(ﻫ حـ) ⟸ نتيجـة (١)

∴ ق(∠ ﻫ ب حـ) = ½ × ١٨٠° = ٩٠°

نقاط هامة

• **الزاوية المحيطية القائمـــة تكون مرسومة فى نصف دائرة.**

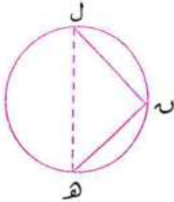
فمثلًا: ١



∵ ق (∠ ﻫ ب حـ) = ٩٠° (وهى زاوية محيطية)

∴ ﻫ حـ قطر فى الدائرة

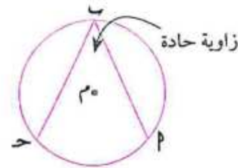
٢



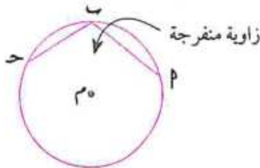
∵ ق (∠ ل ن ﻫ) = ٩٠° (وهى زاوية محيطية)

∴ ل ﻫ قطر فى الدائرة

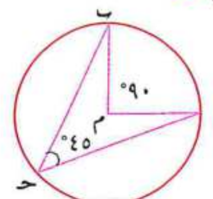
• **الزاوية المحيطية الحادة** تقابل قوسًا طوله **أصغر من** طول نصف الدائرة.



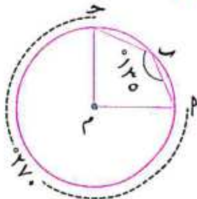
• **الزاوية المحيطية المنفرجة** تقابل قوسًا طوله **أكبر من** طول نصف الدائرة.



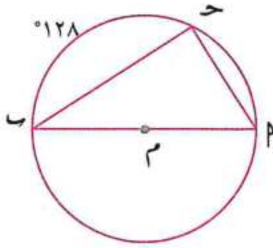
• **الزاوية المحيطية المرسومة على ربع دائرة** قياسها يساوى **٤٥°**



• **الزاوية المحيطية المرسومة فى ربع دائرة** قياسها يساوى **١٣٥°**



مثال ٥



فى الشكل المقابل: (أسوان ٢٠٢٣)

$\overline{ٮ ب}$ قطر فى الدائرة م ، ق$(\overset{\frown}{ب حـ})$ = ١٢٨°

أوجـد: ق(∠ ٮ حـ ب) ، ق(∠ ٮ ب حـ)

الحـل

∵ $\overline{ٮ ب}$ قطر

∴ ق(∠ ٮ حـ ب) = ٩٠° (زاوية محيطية مرسومة فى نصف دائرة)

∵ ق$(\overset{\frown}{ب حـ})$ = ١٢٨°

∴ ق(∠ حـ ٮ ب) = ١٢٨° ÷ ٢ = ٦٤°

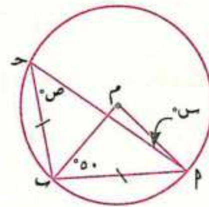
∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠ ٮ ب حـ) = ٩٠° − ٦٤° = ٢٦°

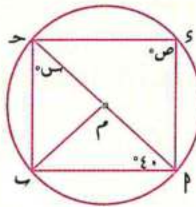
سؤال ٤

١ باستخدام المعطيات الموضحة على كل من الأشكال الآتية أوجد قيمة كل من س ، ص

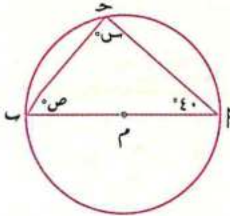
(أ)



(ب)



(جـ)

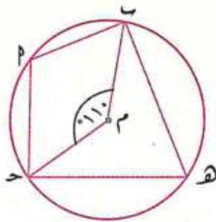


٢ فى الشكل المقابل:

ق (∠ ب م حـ) = ١١٠°

أوجد:

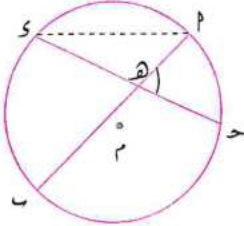
ق (∠ ب هـ حـ) ، ق (∠ ب ٮ حـ)



تمرين مشهور (١)

إذا تقاطع وتران فى نقطة داخل الدائرة، فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف مجموع قياسى القوسين المقابلين لها.

الحـل



المعطيات : $\overline{ءب} \cap \overline{حـ ى} = \{هـ\}$

المطلوب : **إثبات أن:** $ق(\angle ء هـ حـ) = \frac{1}{2}\left[ق(\widehat{ء حـ}) + ق(\widehat{ب ى})\right]$

العمل : نرسم $\overline{ء ى}$

البرهان : $\because \angle ء هـ حـ$ خارجة عن $\triangle ء هـ ى$

$\therefore ق(\angle ء هـ حـ) = ق(\angle ى) + ق(\angle ء)$

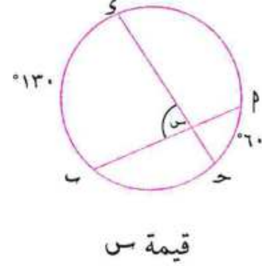
$= \frac{1}{2} ق(\widehat{ء حـ}) + \frac{1}{2} ق(\widehat{ب ى})$

$= \frac{1}{2}\left[ق(\widehat{ء حـ}) + ق(\widehat{ب ى})\right]$ (وهو المطلوب)

مثـال ٦

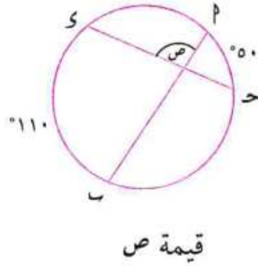
فى كل من الأشكال الآتيـة، أوجد قيمة الرمز المجهول:

١



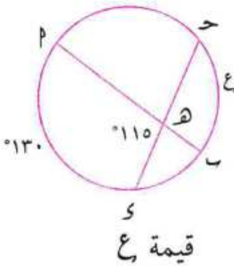
قيمة س

٢



قيمة ص

٣



قيمة ع

الحـل

١ $س = \frac{1}{2}\left[ق(\widehat{ء حـ}) + ق(\widehat{ى ب})\right] = \frac{1}{2}\left[°٦٠ + °١٣٠\right] = \frac{1}{2} \times °١٩٠ = °٩٥$

٢ $ص = \frac{1}{2}\left[ق(\widehat{ء ى}) + ق(\widehat{ب حـ})\right] = \frac{1}{2}\left[°٣٦٠ - (°٥٠ + °١١٠)\right] = \frac{1}{2} \times °٢٠٠ = °١٠٠$

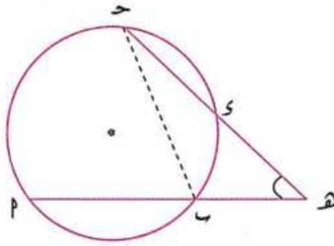
٣ $\because ق(\angle ء هـ ى) = \frac{1}{2}\left[ق(\widehat{ب حـ}) + ق(\widehat{ء ى})\right] \quad \therefore °١١٥ = \frac{1}{2}\left[ع + °١٣٠\right]$

$\therefore ع + °١٣٠ = °٢٣٠ \quad \therefore ع = °١٠٠$

تمرين مشهور (٢)

إذا تقاطع شعاعان حاملان لوترين فى دائرة خارجها، فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف قياس القوس الأكبر مطروحًا منه نصف قياس القوس الأصغر اللذين يحصرهما ضلعا هذه الزاوية.

الحل



المعطيات : $\overleftarrow{ٲب} \cap \overleftarrow{حـء} = \{ﻫ\}$ ، ﻫ ∉ للدائرة

المطلوب : **إثبات أن:** ق(∠ﻫ) = $\frac{1}{2}$[ق($\frown{ٲحـ}$) - ق($\frown{بء}$)]

العمل : نرسم $\overline{بحـ}$

البرهان : ∵ ∠ٲبحـ خارجة عن △ بﻫحـ

∴ ق(∠ٲبحـ) = ق(∠ﻫ) + ق(∠بحـﻫ)

∴ ق(∠ﻫ) = ق(∠ٲبحـ) - ق(∠بحـء)

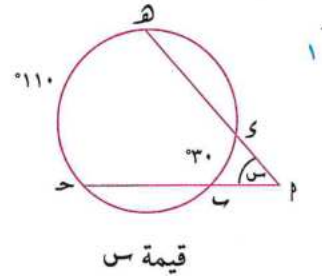
= $\frac{1}{2}$ ق($\frown{ٲحـ}$) - $\frac{1}{2}$ق($\frown{بء}$) = $\frac{1}{2}$[ق($\frown{ٲحـ}$) - ق($\frown{بء}$)]

(وهو المطلوب)

مثال ٧

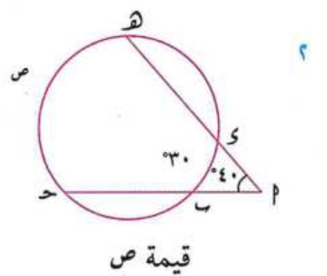
فى كل من الأشكال الآتية، أوجد قيمة الرمز المجهول:

١



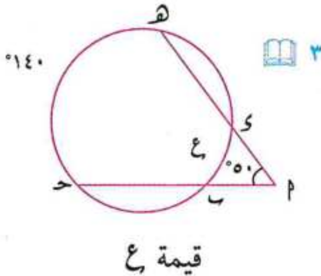
قيمة س

٢



قيمة ص

٣



قيمة ع

الحل

١ س = $\frac{1}{2}$[ق($\frown{ﻫحـ}$) - ق($\frown{ءب}$)]

س = $\frac{1}{2}$[١١٠° - ٣٠°]

س = $\frac{1}{2}$ × ٨٠°

س = ٤٠°

٢ ٤٠° = $\frac{1}{2}$[ص - ٣٠°]

٨٠° = ص - ٣٠°

ص = ٨٠° + ٣٠°

ص = ١١٠°

٣ ٥٠° = $\frac{1}{2}$[١٤٠° - ع]

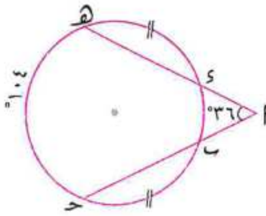
١٠٠° = ١٤٠° - ع

ع = ١٤٠° - ١٠٠°

ع = ٤٠°

مثال ٨

فى الشكل المقابل: (الإسكندرية ٢٠٢٤)



ق(∠ أ) = ٣٦° ، ق(⌒هـ حـ) = ١٠٤° ، ق(⌒ب حـ) = ق(⌒ء هـ)

أوجد: أولًا: ق(⌒ب ء)

ثانيًا: ق(⌒ء هـ)

الحل

∵ $\overleftarrow{حـ ب}$ ∩ $\overleftarrow{هـ ء}$ = {أ}

∴ ق(∠ أ) = $\frac{1}{2}$ [ق(⌒حـ هـ) − ق(⌒ب ء)]

∴ ٣٦° = $\frac{1}{2}$ [١٠٤° − ق(⌒ب ء)]   ∴ ٧٢° = ١٠٤° − ق(⌒ب ء)

∴ ق(⌒ب ء) = ١٠٤° − ٧٢° = ٣٢°   (المطلوب أولًا)

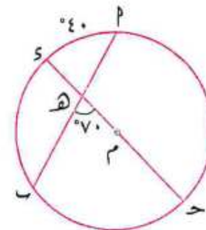
∵ ق(⌒ء هـ) = ق(⌒ب حـ) = $\frac{٣٦٠° - (١٠٤° + ٣٢°)}{٢}$ = ١١٢°

∴ ق(⌒ء هـ) = ١١٢°   (المطلوب ثانيًا)

سؤال ٥

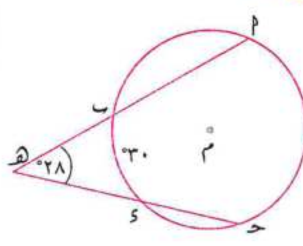
أكمل باستخدام المعطيات الموضحة على كل شكل:

١



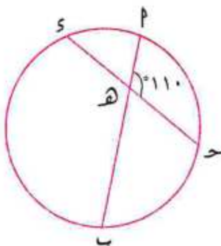
ق(⌒ب حـ) = ... °

٢



ق(⌒أ حـ) = ... °

٣



ق(⌒أ ء) + ق(⌒ب حـ) = ... °

مثال ٩

في الشكل المقابل:

$\overleftrightarrow{\text{ب د}} \cap \overleftrightarrow{\text{ج ه}} = \{\text{أ}\}$ ،

$\overline{\text{ج د}} \cap \overline{\text{ب ه}} = \{\text{ن}\}$ ،

ق(∠ أ) = ٣٠° ، ق(∠ د ج ه) = ٢٠°

أوجد: أولًا: ق(⌒ب ج)

ثانيًا: ق(∠ ب ن ج)

الحل

∵ ∠ ب د ج خارجة عن △ أ د ج

∴ ق(∠ ب د ج) = ق(∠ أ) + ق(∠ ج) = ٣٠° + ٢٠° = ٥٠°

ق(⌒ب ج) = ٢ ق(∠ ب د ج) = ٢ × ٥٠° = ١٠٠° ، ⟸ (١) (المطلوب أولًا)

ق(⌒د ه) = ٢ق(∠ ج) = ٢ × ٢٠° = ٤٠° ⟸ (٢)

∵ ق(∠ ب ن ج) = $\frac{1}{2}$ [ق(⌒د ه) + ق(⌒ب ج)]

من (١) ، (٢)

∴ ق(∠ ب ن ج) = $\frac{1}{2}$ [٤٠° + ١٠٠°] = ٧٠° (المطلوب ثانيًا)

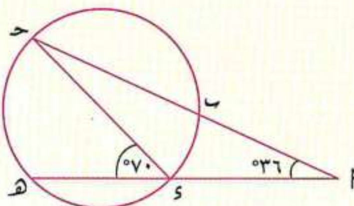
سؤال ٦

في الشكل المقابل:

$\overleftrightarrow{\text{ج ب}} \cap \overleftrightarrow{\text{ه د}} = \{\text{أ}\}$ ،

ق(∠ ج د ه) = ٧٠° ، ق(∠ أ) = ٣٦°

أوجد بالبرهان: ق(⌒ب د)





تدريبات الأضـــواء

أولًا نظرية (١)

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ قياس الزاوية المحيطية يساوى .... قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى نفس القوس.

(ا) نصف (ب) ضعف (جـ) ربع (د) ثلث (الفيوم ٢٠٢٣)

٢ قياس الزاوية المركزية يساوى .... قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى نفس القوس.

(ا) نصف (ب) ربع (جـ) ضعف (د) ثلث (أزهر إسكندرية ٢٠٢٢)

٣ النسبة بين قياس الزاوية المحيطية إلى قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس يساوى ....

(ا) ٢ : ١ (ب) ١ : ٣ (جـ) ١ : ١ (د) ٢ : ٤ (الدقهلية ٢٠٢٤)

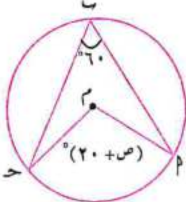
٤ الزاوية المحيطية المشتركة فى نفس القوس مع زاوية مركزية قياسها ١٧٨° يكون نوعها .... (دمياط ٢٠١٧)

(ا) حادة (ب) قائمة (جـ) منفرجة (د) منعكسة

٥ فى الشكل المقابل: م دائرة ، (الإسماعيلية ٢٠١٣)

إذا كان ق(∠ ا ب حـ) = ٦٠°، ق(∠ ا م حـ) = (ص + ٢٠)°

فإن قيمة ص = ...

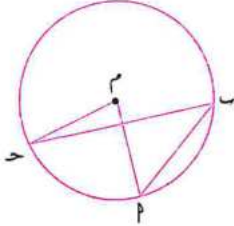


(ا) ٣٠ (ب) ٤٠

(جـ) ٨٠ (د) ١٠٠

٦ فى الشكل المقابل: الدائرة م فيها: ق(∠ ا ب حـ) = ٣٥°

إذا كان ق(∠ ا م حـ) = (٣س − ٥)°، فإن: قيمة س = ...



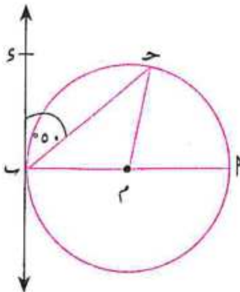
(ا) ٢٥ (ب) ٣٥

(جـ) ٥٠ (د) ٧٠

٧ فى الشكل المقابل: (سوهاج ٢٠٢٤)

$\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ مماس للدائرة م عند ب ، $\overline{\text{ا ب}}$ قطر فى الدائرة،

إذا كان ق(∠ حـ ب ء) = ٥٠° فإن: ق (∠ ا م حـ) = ...



(ا) ٢٥° (ب) ٥٠°

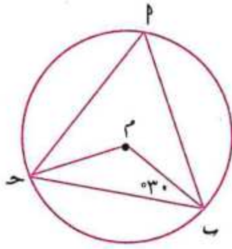
(جـ) ١٠٠° (د) ٨٠°

٨ فى الشكل المقابل: △ ٲ ب حـ مرسوم داخل الدائرة م (بورسعيد ٢٠٢٤)

إذا كان ق(∠ م ب حـ) = ٣٠°، فإن: ق(∠ ٲ) = ...

(أ) ٣٠°　　(ب) ٦٠°

(جـ) ٩٠°　　(د) ١٢٠°



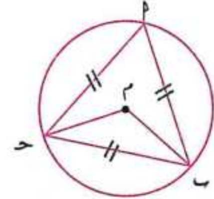
٩ فى الشكل المقابل:

إذا كان △ ٲ ب حـ متساوى الأضلاع مرسومًا داخل الدائرة م ،

فإن ق(∠ ٲ ب م) = ...

(أ) ٣٠°　　(ب) ٦٠°

(جـ) ١٢٠°　　(د) ٩٠°



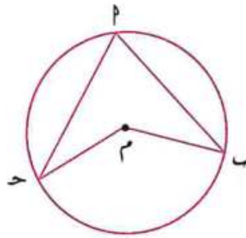
١٠ فى الشكل المقابل: فى الدائرة م ،

إذا كان ق(∠ ٲ) + ق(∠ ب م حـ) = ٢١٠°

فإن ق(∠ ب م حـ) = ...

(أ) ٧٠°　　(ب) ١٠٥°

(جـ) ١٤٠°　　(د) ٢١٠°



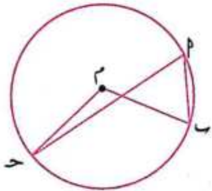
١١ فى الشكل المقابل: م دائرة (المنيا ٢٠١٧)

إذا كان ق (∠ ب م حـ) − ق (∠ ٲ) = ٥٠°

فإن: ق (∠ ٲ) = ...°

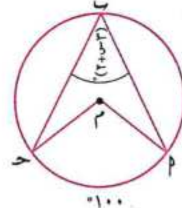
(أ) ٤٠　　(ب) ٥٠

(جـ) ١٠٠　　(د) ١٣٠



٢ أكمل ما يأتى: فى الأشكال الآتية:

١

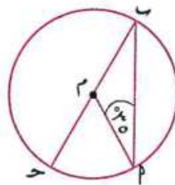


إذا كان ق(⌒ ٲ حـ) = ١٠٠°،

ق(∠ ب) = (٣ س + ٢)°

فإن: قيمة س = ...

٢



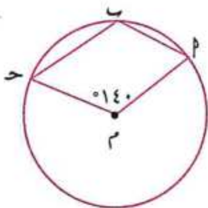
$\overline{\text{ب حـ}}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{\text{ٲ ب}}$ وتر فيها،

ق(∠ ب ٲ م) = ٣٥°

إذا كان ق(∠ ٲ م حـ) = (٧ س)°

فإن س = ...

٣



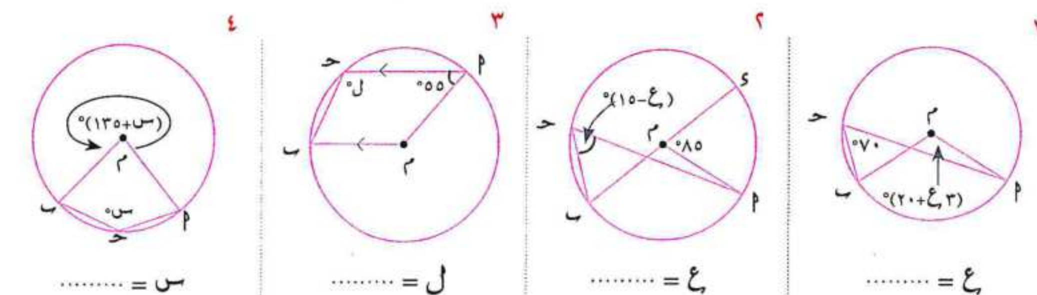
(بورسعيد ٢٠٢٤)

فى الدائرة م ،

إذا كان ق(∠ ٲ م حـ) = ١٤٠°

فإن: ق (∠ ٲ ب حـ) = ...

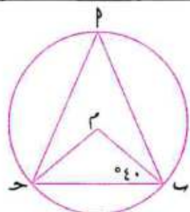
٣ في كل من الأشكال الآتية م دائرة، أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس:



٤ في الشكل المقابل:

م دائرة ، ق(∠م ب حـ) = ٤٠°

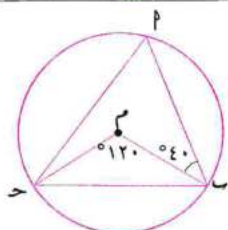
أوجد بالبرهان ق(∠ب أ حـ)



٥ في الشكل المقابل: الدائرة م فيها:

ق(∠أ ب م) = ٤٠° ، ق(∠ب م حـ) = ١٢٠°

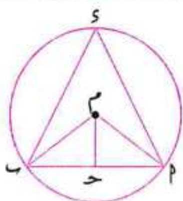
أوجد بالبرهان ق(∠أ حـ ب)



٦ في الشكل المقابل:

أ ب وتر في الدائرة م ، م حـ ⊥ أ ب

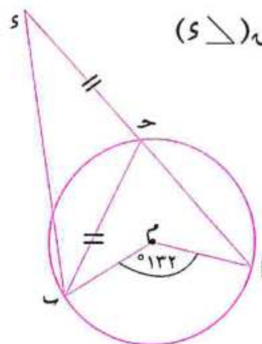
أثبت أن: ق(∠أ م حـ) = ق(∠أ ء ب)



٧ في الشكل المقابل: الدائرة م فيها:

ق(∠أ م ب) = ١٣٢° ، حـ ∈ أ ء ، حـ ء = حـ ب

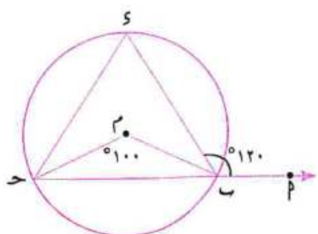
أوجد بالبرهان : ق(∠ء)



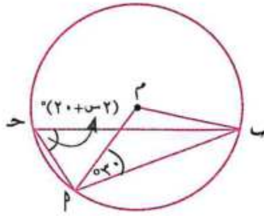
٨ في الشكل المقابل: الدائرة م فيها:

ق(∠ب م حـ) = ١٠٠° ، ق(∠أ ب ء) = ١٢٠°

أوجد بالبرهان: ق(∠ء حـ م)



٩ في الشكل المقابل:



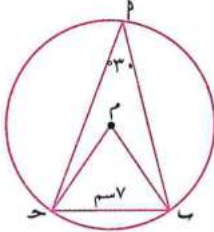
ق(∠ ب أ م) = ٣٠° ،

وإذا كان ق(∠ حـ) = (٢س + ٢٠)°

فأوجد قيمة س

---

١٠ في الشكل المقابل: (قنا ٢٠٢٣)

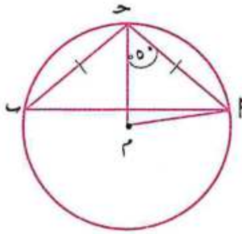


ق(∠ أ) = ٣٠° ، ب حـ = ٧سم

أوجد مساحة الدائرة م $(\pi \simeq \frac{22}{7})$

---

١١ في الشكل المقابل: (الغربية ٢٠٢٤)



دائرة مركزها م فيها:

أ حـ = ب حـ ، ق(∠ أ حـ م) = ٥٠°

أوجد: ق(∠ حـ أ ب)

ثانيًا نتائج على النظرية (١) وتمارين مشهورة عليها

١٢ اختر الإجابة الصحيحة:

١ الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة تكون .... (القاهرة ٢٠٢٤)

(أ) مستقيمة (ب) منفرجة (جـ) قائمة (د) حادة

٢ الزاوية المحيطية التي تقابل قوسًا أصغر من نصف الدائرة تكون .... (الدقهلية ٢٠٢٣)

(أ) منعكسة (ب) منفرجة (جـ) قائمة (د) حادة

٣ الزاوية المحيطية المرسومة في ربع دائرة قياسها = ...° (القليوبية ٢٠٢٣)

(أ) ١٣٥ (ب) ٩٠ (جـ) ٤٥ (د) ١٥٠

٤ إذا تقاطع وتران في نقطة داخل دائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوي.............. مجموع قياسي القوسين المقابلين لها. (القاهرة ٢٠٢٣)

(أ) ضعف (ب) نصف (جـ) ثلث (د) ربع

٥ إذا كان قياس قوس من دائرة يساوي ٨٠° فإن قياس الزاوية المحيطية المرسومة عليه يساوي ....

(أ) ٨٠° (ب) ٤٠° (جـ) ١٦٠° (د) ١٢٠°

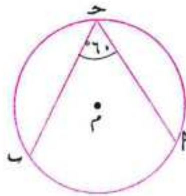
٦ قياس الزاوية المحيطية المرسومة فى ثلث دائرة = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ٢٤٠°

٧ قياس الزاوية المحيطية المرسومة على قوس يمثل ربع الدائرة يساوى ....

(أ) ٤٥° (ب) ٩٠° (جـ) ١٣٥° (د) ٦٠°

٨ فى الشكل المقابل: (الإسماعيلية ٢٠٢٣)

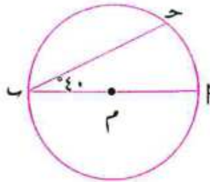


إذا كان ق (∠ أ حـ ب) = ٦٠° ، فإن طول ($\overset{\frown}{أ ب}$) = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}\pi$ نق (ب) $\frac{١}{٣}\pi$ نق

(جـ) $\frac{١}{٦}\pi$ نق (د) π نق

٩ فى الشكل المقابل:



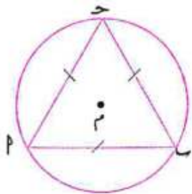
$\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م ، ق(∠ أ ب حـ) = ٤٠°

فإن ق ($\overset{\frown}{ب حـ}$) = ...°

(أ) ٤٠° (ب) ٥٠°

(جـ) ٩٠° (د) ١٠٠°

١٠ فى الشكل المقابل: (بورسعيد ٢٠٢٣)



△ أ ب حـ متساوى الأضلاع

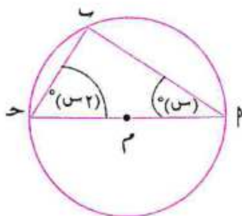
فإذا كان طول ($\overset{\frown}{أ ب}$) = ٨ سم

فإن محيط الدائرة المارة برءوس المثلث = ... سم

(أ) ٢٤ (ب) ٤٨

(جـ) ١٦ (د) ٤٠

١١ فى الشكل المقابل: (الأقصر ٢٠١٨)



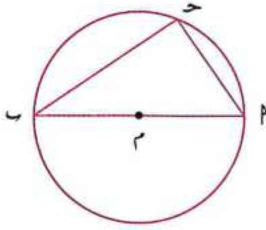
إذا كان $\overline{أ حـ}$ قطرًا فى الدائرة م ،

فإن: قيمة س = ...

(أ) ٤٠ (ب) ٢٠

(جـ) ٣٠ (د) ٦٠

12 فى الشكل المقابل:



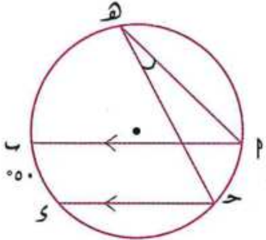
إذا كان $\overline{أب}$ قطرًا فى الدائرة م ،

و $(\widehat{أحـ}) = \frac{1}{2}$ و $(\widehat{بحـ})$ ، فإن: و $(\angle أ) = $ ....

(أ) °٣٠ (ب) °٤٥

(جـ) °٦٠ (د) °٩٠

13 فى الشكل المقابل:



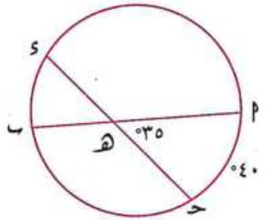
إذا كان $\overline{أب}$ // $\overline{حـء}$ ، و $(\widehat{بء})$ = °٥٠،

فإن: و $(\angle هـ) = $ ....

(أ) °٥٠ (ب) °٢٥

(جـ) °١٠٠ (د) °١٣٠

14 فى الشكل المقابل:



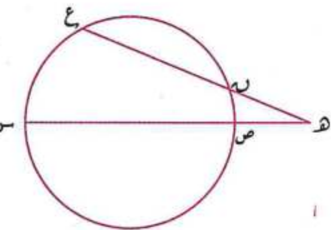
إذا كان $\overline{أب}$ ، $\overline{حـء}$ وترين فى الدائرة، $\overline{أب} \cap \overline{حـء} = \{هـ\}$

و $(\angle أهـحـ)$ = °٣٥، و $(\widehat{أحـ})$ = °٤٠، فإن و $(\widehat{بء}) = $ ....

(أ) °٣٥ (ب) °٤٠

(جـ) °٣٠ (د) °٤٥

15 فى الشكل المقابل:



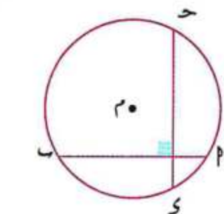
إذا كان و $(\widehat{سع})$ = °٧٠ ، و $(\widehat{صن})$ = °٣٠

فإن و $(\angle هـ) = $ .... °

(أ) ٢٠ (ب) ٤٠

(جـ) ٥٠ (د) ١٠٠

16 فى الشكل المقابل: (بورسعيد ٢٠٢٣)



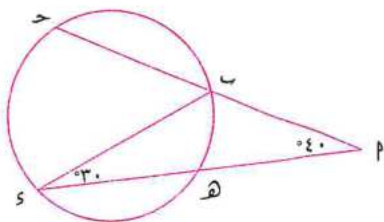
م دائرة فيها: $\overline{أب} \perp \overline{حـء}$ ،

فإن و $(\widehat{أحـ})$ + و $(\widehat{بء}) = $ ....°

(أ) ٤٥ (ب) ٩٠

(جـ) ١٨٠ (د) ٢٧٠

١٧ فى الشكل المقابل:



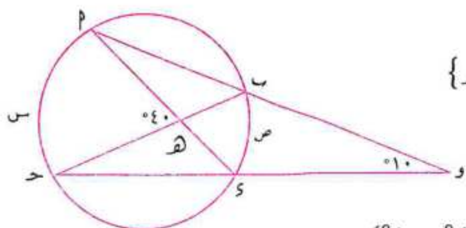
إذا كان $\overleftarrow{\text{حـ ب}} \cap \overleftarrow{\text{ءهـ}}$ = {أ}، ق(∠ أ) = ٤٠°،

ق(∠ ء) = ٣٠° فإن: ق (حـ ء⌒) = ...

(أ) ٣٠°　　(ب) ٤٠°

(جـ) ١٣٠°　　(د) ١٤٠°

١٨ فى الشكل المقابل:



إذا كان $\overleftarrow{\text{أ ب}} \cap \overleftarrow{\text{حـ ء}}$ = {و}، $\overline{\text{أ ء}} \cap \overline{\text{ب حـ}}$ = {هـ}

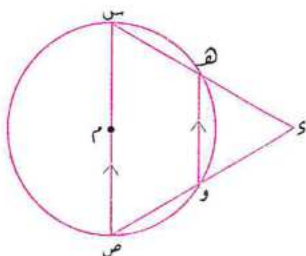
، ق (∠ أ هـ حـ) = ٤٠°، ق (∠ و) = ١٠°

فإن (س، ص) = ...

(أ) (١٠°، ٤٠°)　　(ب) (٤٠°، ١٠°)

(جـ) (٣٠°، ٥٠°)　　(د) (٥٠°، ٣٠°)

١٩ فى الشكل المقابل:



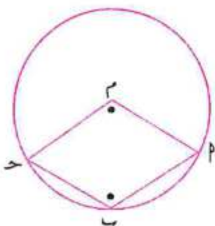
$\overline{\text{س ص}}$ قطر فى الدائرة، $\overline{\text{هـ و}}$ وتر فيها حيث $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{هـ و}}$

فإذا كان ق(∠ ء) = ٧٠° فإن ق(هـ س⌒) = ...°

(أ) ٤٠　　(ب) ١١٠

(جـ) ٧٠　　(د) ١٤٠

٢٠ فى الشكل المقابل:



إذا كان: م مركز الدائرة، ق(∠ أ م حـ) = ق(∠ ب)،

فإن ق(∠ ب) = ...°

(أ) ١٢٠　　(ب) ١٥٠

(جـ) ٦٠　　(د) ٩٠

٢١ قياس الزاوية المحيطية المرسومة فى $\frac{١}{٣}$ دائرة .... قياس الزاوية المحيطية المرسومة على $\frac{١}{٣}$ دائرة.

(أ) <　　(ب) >　　(جـ) =　　(د) غير ذلك

---

١٣ أكمل ما يأتى:

١ الزاوية المحيطية المرسومة على قوس أكبر من نصف الدائرة تكون زاوية ....

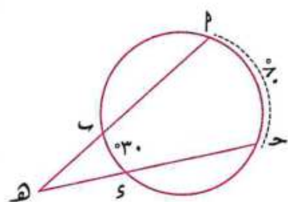
٢ قياس الزاوية المحيطية يساوى .... قياس القوس من الدائرة المحصور بين ضلعيها.

٣ قياس الزاوية المحيطية المرسومة على قوس طوله يمثل $\frac{١}{٣}$ محيط الدائرة هو ....

٤ في الشكل المقابل: ⟵أ ب ∩ ⟵حـ ء = {هـ}

إذا كان ق(⌒أ حـ) = ٨٠° ، ق(⌒ب ء) = ٣٠°

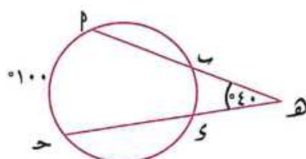
فإن ق(∠هـ) = ...°



٥ في الشكل المقابل: ⟵أ ب ∩ ⟵حـ ء = {هـ}

إذا كان ق(⌒أ حـ) = ١٠٠° ، ق(∠هـ) = ٤٠°

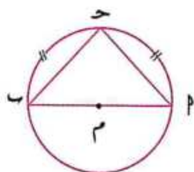
فإن ق(⌒ب ء) = ...°



٦ في الشكل المقابل: الدائرة م فيها أ ب قطر ،

إذا كان ق(⌒أ حـ) = ق(⌒ب حـ)

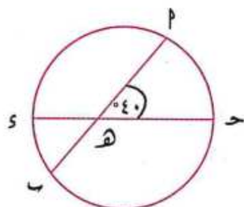
فإن ق(∠أ) = ...



٧ في الشكل المقابل:

أ ب ∩ حـ ء = {هـ}

إذا كان ق(∠أ هـ حـ) = ٤٠° ، فإن ق(⌒أ حـ) + ق(⌒ب ء) = ...°

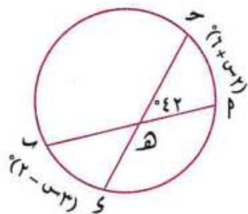


٨ في الشكل المقابل:

إذا كان أ ب ∩ حـ ء = {هـ} ، ق(∠أ هـ حـ) = ٤٢° ،

ق(⌒أ حـ) = (٢س + ٦)° ، ق(⌒ب ء) = (٣س − ٢)°

فإن س = ...

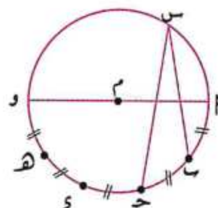


٩ في الشكل المقابل:

إذا كان أ و قطرًا في الدائرة م

ق(⌒أ ب) = ق(⌒ب حـ) = ق(⌒حـ ء) = ق(⌒ء هـ) = ق(⌒هـ و)

فإن ق(∠ب س حـ) = ...°

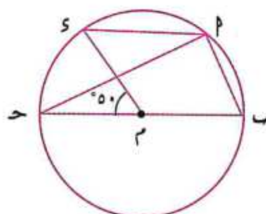


---

١٤ في الشكل المقابل:

ب حـ قطر في الدائرة م ، ق(∠ء م حـ) = ٥٠°

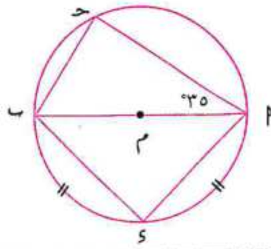
أوجد بالبرهان: ق(∠ب أ ء)



١٥ فى الشكل المقابل:

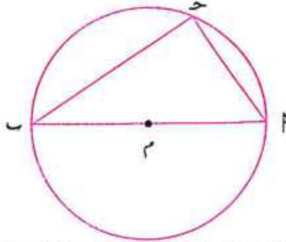
$\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م ، طول ($\overset{\frown}{أ ء}$) = طول ($\overset{\frown}{ب ء}$)
، ق(∠ حـ أ ب) = ٣٥°

أوجد بالبرهان: ق(∠ حـ ب ء)



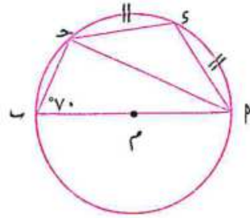
١٦ فى الشكل المقابل:

الدائرة م ، فيها $\overline{أ ب}$ قطر ، أ حـ = ٦سم ،
طول نصف قطر الدائرة يساوى ٥ سم
أوجد مساحة △ أ ب حـ



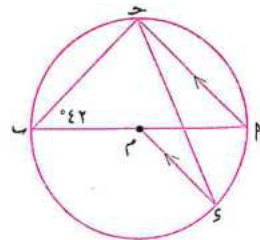
١٧ فى الشكل المقابل:

$\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م
طول ($\overset{\frown}{أ ء}$) = طول ($\overset{\frown}{حـ ء}$) ، ق(∠ أ ب حـ) = ٧٠°
أوجد كلًّا من: ق(∠ حـ أ ب) ، ق(∠ ء حـ أ)



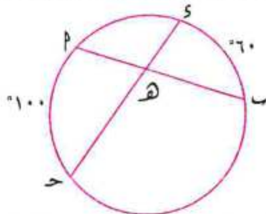
١٨ فى الشكل المقابل:

$\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{ء م}$ // $\overline{أ حـ}$
، ق(∠ أ ب حـ) = ٤٢°
أوجد ق(∠ أ حـ ء)



١٩ بالاستعانة بالشكل المقابل:

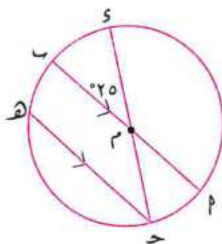
أوجد ق(∠ أ هـ حـ)



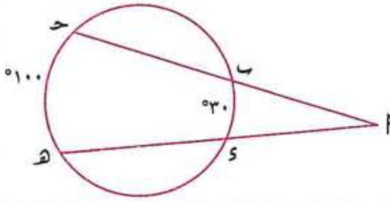
٢٠ فى الشكل المقابل:

(القليوبية ٢٠٢٤)

$\overline{أ ب}$ ، $\overline{حـ ء}$ قطران فى الدائرة م
بحيث ق(∠ ء م ب) = ٢٥° ، $\overline{حـ هـ}$ // $\overline{أ ب}$
أوجد: ق ($\overset{\frown}{ب هـ}$)



٢١ فى الشكل المقابل: (القاهرة ٢٠٢٤)

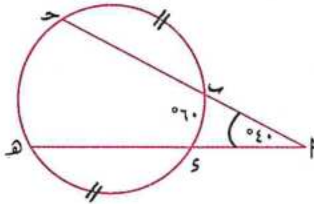


ق($\overset{\frown}{حـ هـ}$) = ١٠٠° ، ق($\overset{\frown}{ب ء}$) = ٣٠°

أوجد بالبرهان: ق(∠ أ)

---

٢٢ فى الشكل المقابل: (الدقهلية ٢٠٢٣)



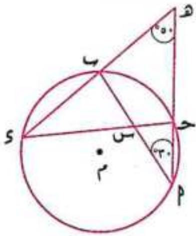
ق(∠ أ) = ٤٠° ، ق($\overset{\frown}{ب ء}$) = ٦٠°

، ق($\overset{\frown}{ب حـ}$) = ق($\overset{\frown}{ء هـ}$)

أوجد: ١ ق($\overset{\frown}{ب حـ}$)   ٢ ق($\overset{\frown}{حـ ء}$) الأكبر

---

٢٣ فى الشكل المقابل: (القاهرة ٢٠١٨)



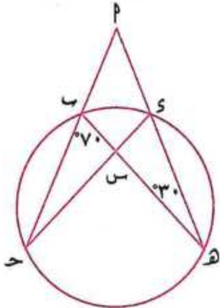
$\overline{أب} \cap \overline{حـ ء}$ = {س} ، $\overleftarrow{أحـ} \cap \overleftarrow{ء ب}$ = {هـ}

، ق(∠ أ) = ٣٠° ، ق(∠ هـ) = ٥٠°

أوجد: ١ ق($\overset{\frown}{أ ء}$)   ٢ ق(∠ أ س ء)

---

٢٤ فى الشكل المقابل:



ق(∠ هـ ب حـ) = ٧٠° ، ق(∠ ء هـ ب) = ٣٠°

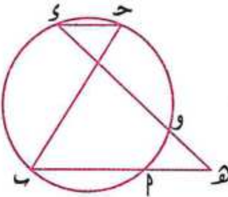
أوجد:

١ ق(∠ أ)

٢ ق(∠ هـ س حـ)

---

٢٥ فى الشكل المقابل:

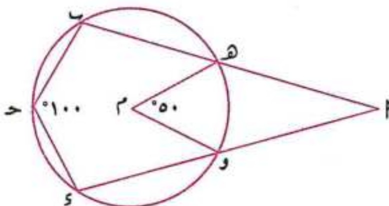


هـ نقطة خارج الدائرة

أثبت أن: ق(∠ هـ) < ق(∠ ب حـ ء)

---

٢٦ فى الشكل المقابل:



ق(∠ م) = ٥٠° ، ق(∠ ب حـ ء) = ١٠٠°

أوجد ق(∠ أ)

تفكير إبداعى TIMSS


٢٧ $\overline{مP}$ ، $\overline{مب}$ نصفا قطرين متعامدان فى الدائرة م ، $\overline{Pحـ}$ ، $\overline{بء}$ وتران متعامدان ومتقاطعان فى هـ .

١ **أوجد** ق (∠ حـ ب ء) ٢ **أثبت أن** $\overleftrightarrow{Pء}$ // $\overleftrightarrow{بحـ}$


٢٨ **فى الشكل المقابل:** $\overline{Pب}$ قطر فى الدائرة م ،

$\overline{Pحـ}$ قطعة مماسة للدائرة عند P ، $\overline{بحـ}$ تقطع الدائرة فى ء

فإذا كان ب ء = ٩,٦ سم ، ء حـ = ٥,٤ سم

فأوجد طول نصف قطر الدائرة.

---

٢٩ **فى الشكل المقابل:**

ء منتصف ($\frown{Pب}$) فى الدائرة ن

أثبت أن: ق (∠ حـ) = $\frac{1}{4}$ ق (∠ P ن ب)

تدريبات الكتاب المدرسى

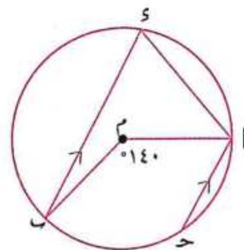
١ فى كل من الأشكال التالية م دائرة، ادرس الشكل ثم أكمل:

٣	٢	١
ق(∠ حـ P م) = ... °	ق(∠ ب ء م) = ... °	ق(∠ P م ء) = ... °



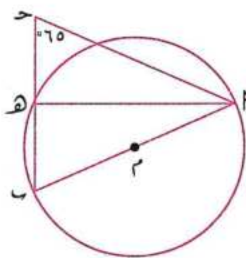

(سوهاج ٢٠٢٤)

٤



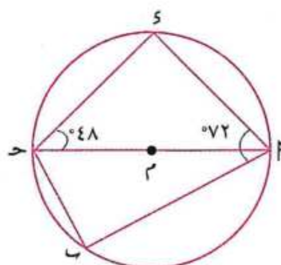
ق(∠ حـ أ ء) = ...°

٥



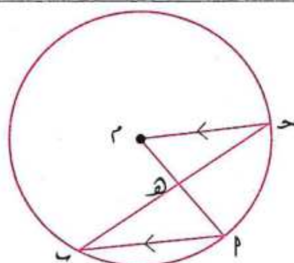
ق(∠ حـ أ هـ) = ...°

٦



ق(∠ ب أ حـ) = ...°

٢ فى الشكل المقابل:

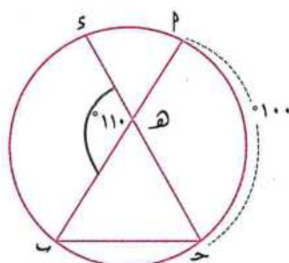


أب وتر فى الدائرة م ، حـم // أب ،

بحـ ∩ أم = {هـ}

أثبت أن: بهـ > أهـ

٣ فى الشكل المقابل:

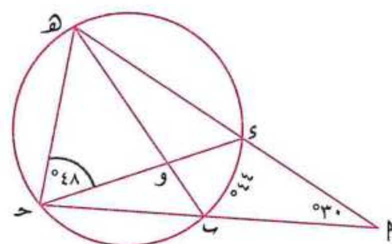


أب ، حـء وتران فى الدائرة ، أب ∩ حـء = {هـ}

، ق(∠ ءهـب) = ١١٠° ، ق(أحـ⌢) = ١٠٠°

أوجد: ق(∠ ءحـب)

٤ فى الشكل المقابل:



حـب ∩ هـء = {أ} ،

بهـ ∩ حـء = {و}

فإذا كان: ق(∠أ) = ٣٠° ، ق(بء⌢) = ٤٤° ،

ق(∠ ءحـهـ) = ٤٨° **فأوجد:**

(ا) ق(حـهـ⌢)   (ب) ق(بحـ⌢)

٥ أب ، أحـ وتران فى الدائرة ، س ، ص منتصفا أب⌢ ، أحـ⌢ على الترتيب ،
رُسمت سص فقطعت أب فى ء ، أحـ فى هـ **أثبت أن:** أء = أهـ

١ اختر الإجابة الصحيحة:

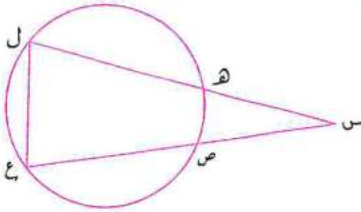
١ قياس الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة يساوى .... (الغربية ٢٠٢٤)

(أ) ٤٥° (ب) ٩٠° (جـ) ١٣٥° (د) ١٨٠°

٢ الزاوية المحيطية التى تقابل قوسًا أكبر من نصف الدائرة تكون .... (القاهرة ٢٠٢٢)

(أ) حادة (ب) قائمة (جـ) منفرجة (د) مستقيمة

٣ فى الشكل المقابل: (بورسعيد ٢٠٢٤)



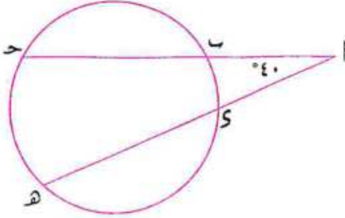
إذا كان: ق (⌒ل ع) = ٧٠°، ق (⌒هـ ص) = ٣٠°

فإن ق (∠ س) = ... °

(أ) ١٠٠ (ب) ٥٠

(جـ) ٤٠ (د) ٢٠

٤ فى الشكل المقابل: (الفيوم ٢٠٢٢)



إذا كان ق (∠ أ) = ٤٠°

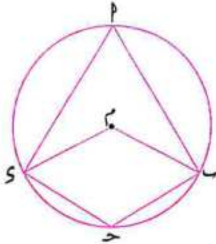
فإن ق (⌒حـ هـ) − ق (⌒ب د) = ...

(أ) ٢٠° (ب) ٤٠°

(جـ) ٨٠° (د) ١٢٠°

---

٢ ١ فى الشكل المقابل: (الدقهلية ٢٠٢٢)

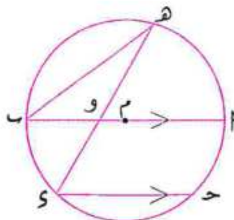


أ ب حـ د شكل رباعى مرسوم داخل الدائرة ،

ق (∠ ب م د) = ق (∠ ب حـ د)

أوجد: ق (∠ أ) بالدرجات

٢ فى الشكل المقابل: (أسيوط ٢٠٢٢)



$\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م، $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{حـ د}}$ ، ق (⌒حـ د) = ٨٠°،

ق (⌒أ هـ) = ١٠٠°، أوجد بالبرهان:

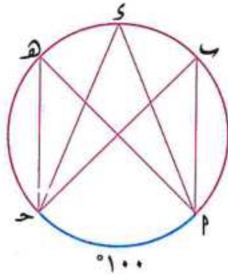
(أ) ق (∠ د هـ ب) (ب) ق (∠ أ و هـ)



ذاكر — الدرس ٣

الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القـوس

فكر وناقش في الشكل المقابل:



إذا كان: ق ($\overset{\frown}{أحـ}$) = ١٠٠°

فـإن : ق(∠ أ ب حـ) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{أحـ}$) = ٥٠°

، ق(∠ أ ء حـ) المحيطيـة = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{أحـ}$) = ٥٠°

، ق(∠ أ هـ حـ) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{أحـ}$) = ٥٠°

مما سبق نستنتج أن : ق(∠ أ ب حـ) = ق(∠ أ ء حـ) = ق(∠ أ هـ حـ)

أولًا الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس:

نظـريـة (٢)

الزوايا المحيطية التي تحصر نفسَ القوس في الدائرة الواحدة متساوية في القياس.

المعطيـات : ∠ حـ ، ∠ ء ، ∠ هـ زوايا محيطية مشتركة في $\overset{\frown}{أب}$

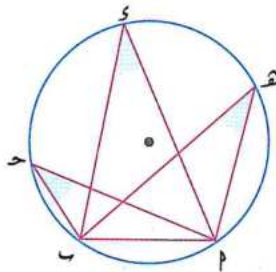
المطلـوب : إثبـات أن: ق(∠ حـ) = ق(∠ ء) = ق(∠ هـ)

البرهـان : ∵ ق(∠ حـ) = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{أب}$)

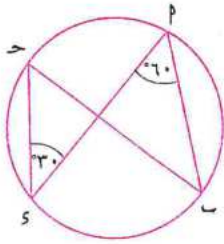
∵ ق(∠ ء) = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{أب}$)

∵ ق(∠ هـ) = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{أب}$)

∴ ق(∠ حـ) = ق(∠ ء) = ق(∠ هـ) (وهو المطلوب)



مثال ١



فى الشكل المقابل:

ق(∠ أ) = ٦٠° ، ق(∠ ء) = ٣٠°

أوجد مع ذكر السبب: ق(∠ ب) ، ق(∠ حـ)

الحـل

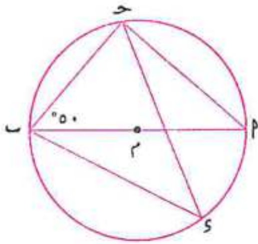
∵ ق(∠ أ) = ق(∠ حـ) محيطيتـان مشتركتـان (⌒ب ء)

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ حـ) = ٦٠° ، ⟸ (نظرية)

∵ ق(∠ ب) = ق(∠ ء) محيطيتـان مشتركتـان فى (⌒أ حـ)

∴ ق(∠ ب) = ق(∠ ء) = ٣٠° ⟸ (نظرية)

مثال ٢



فى الشكل المقابل: (الإسكندرية ٢٠٢١)

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م ، ق(∠ أ ب حـ) = ٥٠°

أوجد ق(∠ ب ء حـ)

الحـل

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م ∴ ق(∠ أ حـ ب) = ٩٠° ،

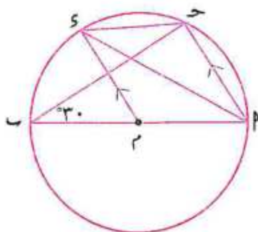
∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠ حـ أ ب) = ١٨٠° − (٩٠° + ٥٠°) = ٤٠°

∵ ق(∠ ب ء حـ) = ق(∠ ب أ حـ) محيطيتان مشتركتان فى (⌒ب حـ)

∴ ق(∠ ب ء حـ) = ٤٠°

سؤال ١



فى الشكل المقابل:

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{\text{أ حـ}}$ // $\overline{\text{م ء}}$ ،

ق(∠ أ ب حـ) = ٣٠° أوجد:

١ ق(∠ ء أ ب)   ٢ ق(∠ أ حـ ء)

مثـال ٣

في الشكل المقابل:

$\overline{أب}$ قطر في الدائرة م ، ق(∠ أ ب ء) = ٢٠°

أوجد بالبرهان ق(∠ ب حـ ء)

الحـل

المعطيـــات : $\overline{أب}$ قطر ، ق(∠ أ ب ء)= ٢٠°

المطلـــوب : إيجاد ق(∠ ب حـ ء)

البرهـــــان : ∵ $\overline{أب}$ قطر ∴ ق(∠ أ حـ ب) = ٩٠°

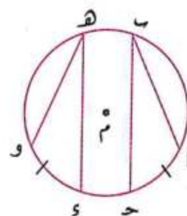
∵ ق(∠ أ حـ ء) = ق(∠ أ ب ء) = ٢٠° محيطيتان مشتركتان في نفس (⌒ أ ء)

∴ ق(∠ ب حـ ء) = ٩٠° + ٢٠° = ١١٠°

نتيجـــة

الزوايا المحيطية التي تحصر أقواسًا متساوية في القياس في الدائرة الواحدة (أو في الدوائر المتطابقة) متساوية في القياس.

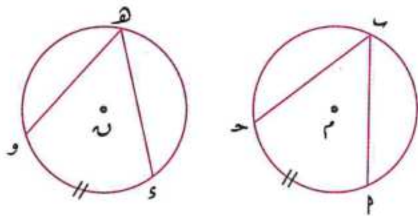
فمثلًا: في الدائرة م :



إذا كان: ق(⌒ أ حـ) = ق(⌒ ء و)

فــإن : ق(∠ ب) = ق(∠ هـ)

فمثلًا: لأى دائرتين متطابقتين م ، ن :



إذا كان: ق(⌒ أ حـ) = ق(⌒ ء و)

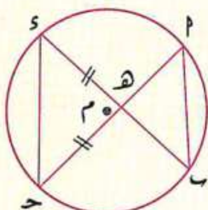
فــإن : ق(∠ ب) = ق(∠ هـ)

سؤال ٢

في الشكل المقابل:

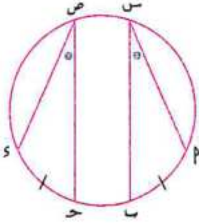
م دائرة فيها هـ ء = هـ حـ

أثبـت أن: أ هـ = ب هـ



عكس النتيجة السابقة صحيح أى أن:

الزوايا المحيطية المتساوية فى القياس فى الدائرة الواحدة (أو فى عدة دوائر متطابقة) تحصر أقواسًا متساوية فى القياس.



فمثلًا: فى الشكل المقابل:

إذا كان: ق(∠ س) = ق(∠ ص)

فـإن : ق(⌒ أ ب) = ق(⌒ حـ ء)

مثـال ٤

فى الشكل المقابل: (الشرقية ٢٠٢٤)

$\overleftarrow{\text{ب س}}$ ∩ $\overleftarrow{\text{حـ ص}}$ = {أ} ، ب س = حـ ص

أثبـت أن: المثلث أ ب حـ متساوى الساقين

الحـل

المعطيـات : ب س = حـ ص

المطلـوب : **إثبات أن:** المثلث أ ب حـ متساوى الساقين

البرهـان : ∵ ب س = حـ ص

∴ ق(⌒ ب س) = ق(⌒ حـ ص)



تذكـر أن

الأوتار المتساوية فى الطول فى الدائرة تحصر أقواسًا متساوية فى القياس.

بإضافة ق(⌒ س ص) للطرفين

∴ ق(⌒ ب س) + ق(⌒ س ص) = ق(⌒ حـ ص) + ق(⌒ س ص)

∴ ق(⌒ ب س ص) = ق(⌒ حـ ص س) ∴ ق(∠ حـ) = ق(∠ ب)

∴ أ ب = أ حـ ∴ △ أ ب حـ متساوى الساقين

سؤال ٣

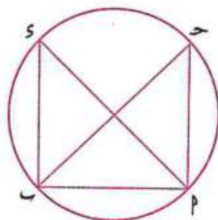
الدائرة م فيها $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$ وتران متقاطعان فى نقطة ن

فإذا كان: أ ن = حـ ن فأثبت أن: أ ب = حـ ء

ثانيًا عكس النظرية:

عكس نظرية (٢)

إذا تساوى قياسا زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة، وفى جهة واحدة منها، فإنه تمر برأسيهما دائرة واحدة تكون هذه القاعدة وترًا فيها.



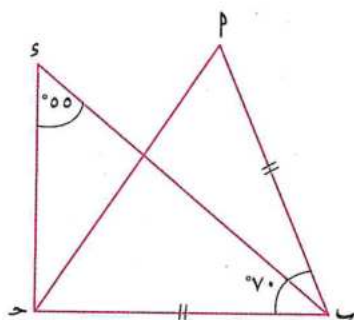
فمثلًا: فى الشكل المقابل، إذا كانت:

∠ حـ ، ∠ ء مرسومتين على القاعدة أ ب ، وفى جهة واحدة منها،

ق(∠ حـ) = ق(∠ ء)

فـإن: النقط أ ، ب ، ء ، حـ تمر بها دائرة واحدة، ويكون أ ب وترًا فيها

مثـال ٥



فى الشكل المقابل: (المنيا ٢٠٢٤)

أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيـه:

أ ب = ب حـ ، ق(∠ أ ب حـ) = ٧٠° ،

ء ب حـ مثلث فيه: ق(∠ ب ء حـ) = ٥٥°

أثبت أن: النقط أ ، ب ، حـ ، ء تقـع على دائرة واحدة

الحـل

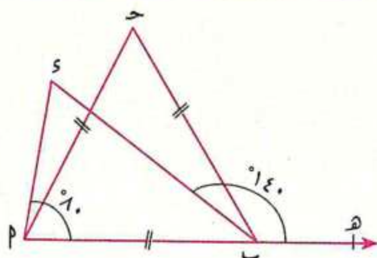
∵ △ أ ب حـ فيـه: أ ب = ب حـ

∴ ق(∠ ب أ حـ) = ق(∠ ب حـ أ) = $\frac{١٨٠° - ٧٠°}{٢}$ = ٥٥°

∵ ق(∠ ب أ حـ) = ق(∠ ب ء حـ) = ٥٥° وهما مرسومتان على القاعدة ب حـ وفى جهة واحدة منها

∴ النقط أ، ب، حـ ، ء تقع على دائرة واحدة

سؤال ٤



فى الشكل المقابل:

أ ب = ب حـ = حـ أ ،

ق(∠ ء ب هـ) = ١٤٠° ، ق(∠ ء أ ب) = ٨٠° ،

أثبت أن: النقط أ ، ب ، حـ ، ء تقع على دائرة واحدة

مثال ٦

في الشكل المقابل:

إذا كان: ٵ ب حـ مثلثًا متساوى الأضلاع ، ق(∠ ب ء حـ) = ٦٠°

فأثبت أن: النقط ٵ ، ب ، حـ ، ء تمر بها دائرة واحدة

الحـل

المعطيـات : △ ٵ ب حـ متساوى الأضلاع ، ق(∠ ب ء حـ) = ٦٠°

المطلـوب : إثبات أن: النقط ٵ ، ب ، حـ ، ء تمر بها دائرة واحدة

البرهـان : ∵ △ ٵ ب حـ متساوى الأضلاع

∴ ق(∠ ب ٵ حـ) = ٦٠° ،

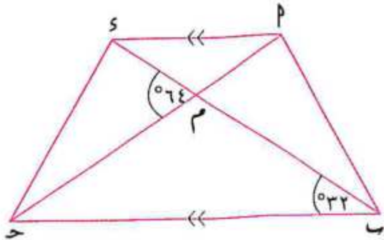
∵ ق(∠ ب ء حـ) = ٦٠°

∴ ق(∠ ب ٵ حـ) = ق(∠ ب ء حـ) = ٦٠°

وهما زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة $\overline{\text{ب حـ}}$ وفى جهة واحدة منها

∴ النقط ٵ، ب، حـ، ء تمر بها دائرة واحدة

س؟ سؤال ٥



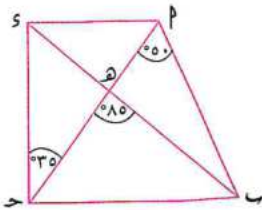
١ في الشكل المقابل:

ٵ ب حـ ء شكل رباعى تقاطع قطراه فى م

ق(∠ ء ب حـ) = ٣٢° ، ق(∠ ء م حـ) = ٦٤° ،

$\overline{\text{ٵ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

أثبت أن: النقط ٵ ، ب ، حـ ، ء تمر بها دائرة واحدة



٢ في الشكل المقابل:

إذا كان: ق(∠ ب ٵ حـ) = ٥٠° ، ق(∠ ب هـ حـ) = ٨٥° ،

ق(∠ ٵ حـ ء) = ٣٥°

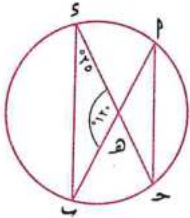
فأثبت أن: النقط ٵ ، ب ، حـ ، ء تمر بها دائرة واحدة



تدريبات الأضـــواء

أولاً الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس

١ اختر الإجابة الصحيحة:

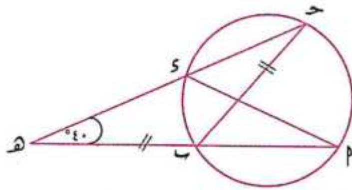


١ في الشكل المقابل:

إذا كان $\overline{أب} \cap \overline{حـ ء}$ = {هـ}، ق(∠ ء) = ٢٥°، ق(∠ ءهـ ب) = ١٢٠°

فإن ق(∠ حـ) = ...

(أ) ٢٥° (ب) ٣٥° (جـ) ٥٠° (د) ٧٠°

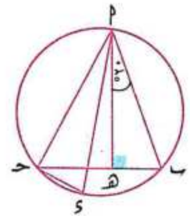


٢ في الشكل المقابل:

إذا كان $\overleftarrow{أب} \cap \overleftarrow{حـ ء}$ = {هـ}، ب حـ = ب هـ،

ق(∠ هـ) = ٤٠° فإن ق(∠ ء أ ب) = ...

(أ) ٢٠° (ب) ٤٠° (جـ) ٨٠° (د) ٥٠°

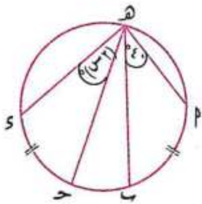


٣ في الشكل المقابل:

ق(∠ أ ء حـ) = ...

(أ) ٩٠° (ب) ٨٠°

(جـ) ٧٠° (د) ٦٠°

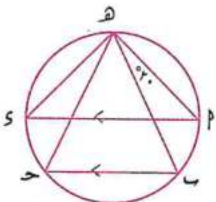


٤ في الشكل المقابل:

إذا كان طول ($\overset{\frown}{أب}$) = طول ($\overset{\frown}{حـ ء}$)، ق(∠ أ هـ ب) = ٤٠°،

ق(∠ حـ هـ ء) = (٢س)° فإن س = ...

(أ) ٢٠ (ب) ٣٠ (جـ) ٤٠ (د) ٨٠

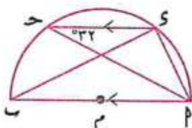


٥ في الشكل المقابل:

إذا كان $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب حـ}$، ق(∠ أ هـ ب) = ٢٠°

فإن ق(∠ حـ هـ ء) = ...°

(أ) ٨٠ (ب) ٤٠ (جـ) ٢٠ (د) ١٠



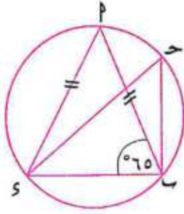
٦ في الشكل المقابل:

$\overline{أب}$ قطر فى نصف الدائرة م، $\overline{أب}$ // $\overline{ءحـ}$

إذا كان ق(∠ أ حـ ء) = ٣٢° فإن ق(∠ أ ء حـ) = ...°

(أ) ٣٢ (ب) ٦٤ (جـ) ٩٠ (د) ١٢٢

٧ فى الشكل المقابل: (بنى سويف ٢٠١٨)

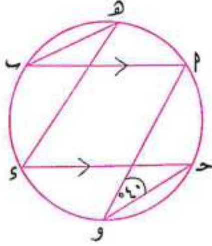


إذا كان ق(∠ أ ب ء) = ٦٥° ، أ ب = أ ء

فإن: ق(∠ ب حـ ء) = ...

(أ) ١٥°   (ب) ٢٥°   (جـ) ٣٠°   (د) ٥٠°

٨ فى الشكل المقابل: (الشرقية ٢٠١٧)

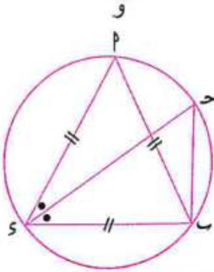


إذا كان: $\overline{أ ب}$ // $\overline{حـ ء}$ ، ق(∠ أ و حـ) = ٤٠°

فإن ق(∠ ء هـ ب) = ...

(أ) ٣٠°   (ب) ٤٠°   (جـ) ٤٥°   (د) ٥٠°

٩ فى الشكل المقابل:



إذا كان △ أ ب ء متساوى الأضلاع، $\overrightarrow{ء حـ}$ ينصف (∠ أ ء ب)

فإن ق (∠ حـ ب ء) = ...°

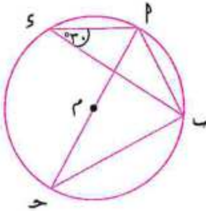
(أ) ٣٠   (ب) ٦٠   (جـ) ٩٠   (د) ١٢٠

٢ أكمل كلًّا مما يأتى:

١ الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس فى الدائرة تكون ....

٢ الزوايا المحيطية التى تحصر أقواسًا متساوية فى القياس تكون ....

٣ فى الشكل المقابل:



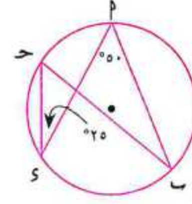
إذا كان أ ب حـ مثلثًا مرسومًا داخل الدائرة م

، $\overline{أ حـ}$ قطرًا فى الدائرة م ، ق(∠ ء) = ٣٠° ، أ ب = ٧سم

فإن مساحة الدائرة = ... π سم²

٣ ادرس كلًّا من الأشكال الآتية، ثم أوجد قياسات الزوايا المبينة أسفل كل شكل:

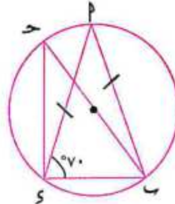
١



ق(∠ حـ) = ...°

ق(∠ ب) = ...°

٢

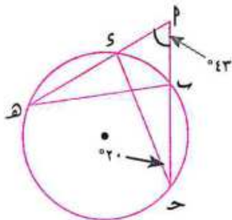


ق(∠ ب ء حـ) = ...°

ق(∠ ء ب حـ) = ...°

ق(∠ حـ) = ...°

٣

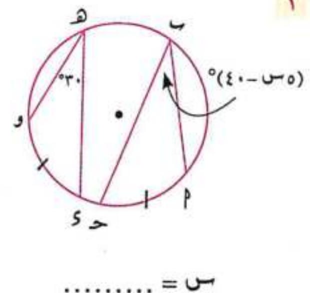


ق(∠ ب هـ ء) = ...°

ق(∠ أ ب هـ) = ...°

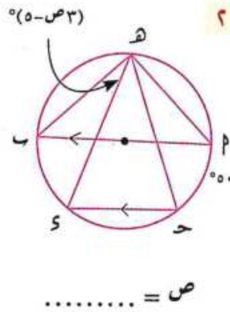
٤ في كل من الأشكال الآتية، أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس:

١



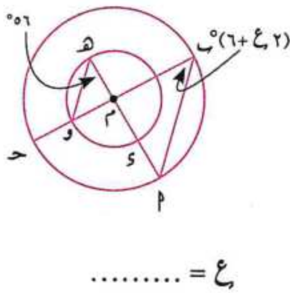
س = ...

٢



ص = ...

٣

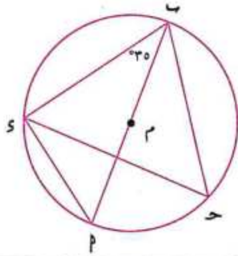


ع = ...

٥ في الشكل المقابل:

أ ب قطر في الدائرة م ، ق(∠أ ب ء) = ٣٥°

أوجد بالبرهان: ق(∠ب حـ ء)

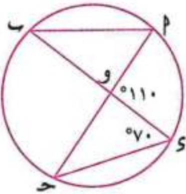


٦ في الشكل المقابل: (الإسماعيلية ٢٠٢٣)

أ حـ ، ب ء وتران في الدائرة حيث ق(∠أ و ء) = ١١٠°،

ق(∠ء) = ٧٠°،

أوجد ق(∠ب)

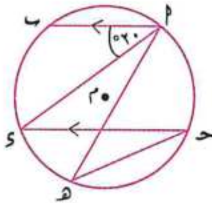


٧ في الشكل المقابل: (الغربية ٢٠١٩)

أ ب // حـ ء ، ق(∠ب أ ء) = ٢٠°،

ق(∠أ هـ حـ) = (٣س − ٧)°

فما قيمة س؟

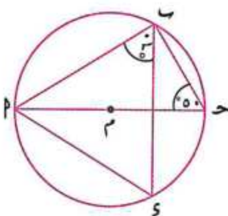


٨ في الشكل المقابل: (الإسماعيلية ٢٠١٩)

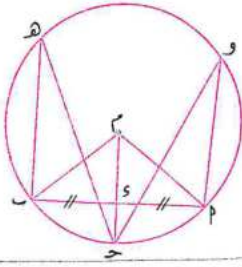
أ حـ قطر في الدائرة م ، ق(∠حـ) = ٥٠°، ق(∠أ ب ء) = ٦٠°

أوجد بالبرهان كلًّا من:

ق(∠حـ ب ء)، ق(∠ب أ ء)



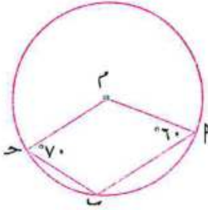
٩ في الشكل المقابل:



- ى منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

أثبت أن ق ($\angle$ و) = ق ($\angle$ هـ)

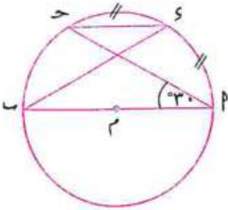
١٠ في الشكل المقابل: (البحيرة ٢٠١٩)



- ق ($\angle$ م أ ب) = ٦٠°، ق ($\angle$ م حـ ب) = ٧٠°

أوجد بالبرهان ق ($\angle$ أ م حـ)

١١ في الشكل المقابل: (الوادي الجديد ٢٠٢٣)

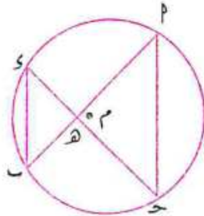


- $\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة م، ق ($\angle$ حـ أ ب) = ٣٠°، ق($\overset{\frown}{\text{أ ى}}$) = ق ($\overset{\frown}{\text{ى حـ}}$)

١ أوجد بالبرهان ق ($\angle$ حـ ى ب)

٢ أثبت أن $\overline{\text{ى حـ}}$ // $\overline{\text{أ ب}}$

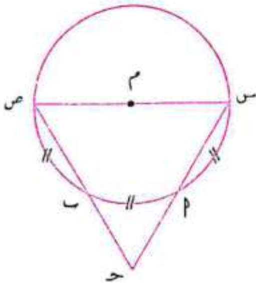
١٢ في الشكل المقابل: (الشرقية ٢٠١٣)



- $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{حـ ى}}$ وتران في الدائرة م ومتقاطعان عند هـ

أثبت أن: $\triangle$ أ هـ حـ $\sim$ $\triangle$ ى هـ ب

١٣ في الشكل المقابل:



- $\overline{\text{س ص}}$ قطر في الدائرة م

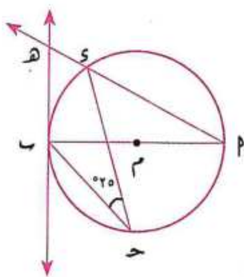
أ $\in$ $\overset{\frown}{\text{س ص}}$ ، ب $\in$ $\overset{\frown}{\text{س ص}}$ بحيث إن

ق($\overset{\frown}{\text{س أ}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{ب ص}}$)

$\overleftarrow{\text{س أ}}$ $\cap$ $\overleftarrow{\text{ص ب}}$ = {حـ}

أثبت أن: $\triangle$ حـ س ص متساوي الأضلاع

١٤ في الشكل المقابل:



$\overline{ٯب}$ قطر فى الدائرة م

$\overleftrightarrow{بهـ}$ مماس للدائرة، $\overrightarrow{ٯء} \cap \overleftrightarrow{بهـ} = \{هـ\}$

، ق(∠ ب ح ء) = ٢٥°

أوجد بالبرهان: ق(∠ ٯ هـ ب)

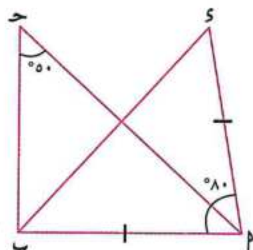
---

١٥ أثبت أن: الزوايا المحيطية التى تحصر نفس القوس فى الدائرة الواحدة متساوية فى القياس.

(كفر الشيخ ٢٠١٦)

ثانيًا عكس النظرية

١٦ في الشكل المقابل: (المنيا ٢٠٢٤)



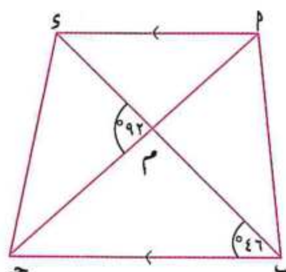
ٯ ب = ٯ ء ، ق(∠ ء ٯ ب) = ٨٠° ، ق(∠ ح) = ٥٠°

أثبت أن النقط: ٯ ، ب، ح، ء تمر بها دائرة واحدة

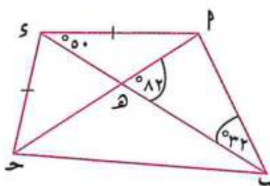
---

١٧ بين فى أيٍّ من الأشكال الآتية يمكن رسم دائرة تمر بالنقط ٯ ، ب ، ح ، ء واذكر السبب:

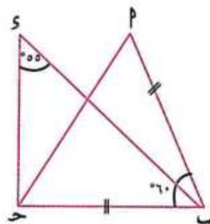
١



٢

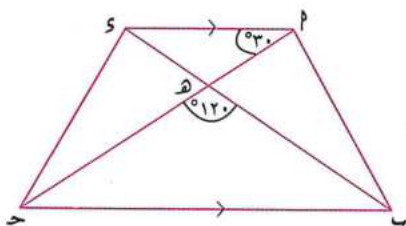


٣



---

١٨ في الشكل المقابل:



ٯ ب ح ء شكل رباعى فيه:

$\overline{ٯء} // \overline{بح}$ ، ق(∠ ء ٯ ح) = ٣٠° ،

ق(∠ ح هـ ب)= ١٢٠°

أثبت أن النقط: ٯ ، ب، ح، ء تمر بها دائرة واحدة.

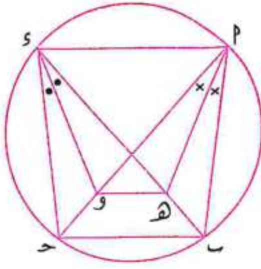
١٩ فى الشكل المقابل:

$\overleftarrow{أ هـ}$ ب حـ ء شكل رباعى فيه:

$\overleftarrow{أ هـ}$ ينصف (∠ ب أ حـ) ،

$\overleftarrow{ء و}$ ينصف (∠ حـ ء هـ)

أثبت أن النقط: أ ، هـ ، و ، ء تمر بها دائرة واحدة



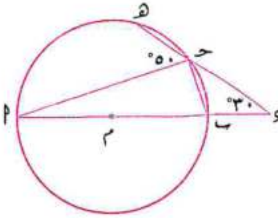
تفكير إبداعى TIMSS

٢٠ فى الشكل المقابل: (الدقهلية ٢٠٢٢)

$\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م ، ق (∠ ء) = ٣٠° ،

ق (∠ أ حـ هـ) = ٥٠°

أوجد بالبرهان ق (∠ حـ ب أ)

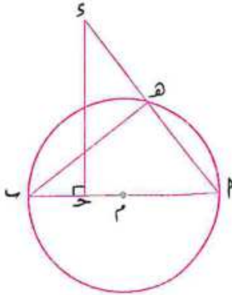


٢١ فى الشكل المقابل:

$\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{أ هـ}$ وتر فيها ،

رسم $\overline{حـ ء}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ فقطع $\overleftarrow{أ هـ}$ فى ء

أثبت أن: النقط ء ، هـ ، حـ ، ب تمر بها دائرة واحدة.



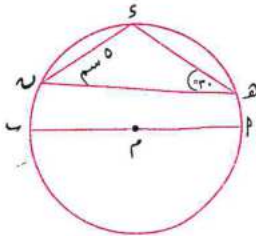
٢٢ فى الشكل المقابل:

دائرة مركزها م ، ءن = ٥ سم ،

ق (∠ ء هـ ن) = ٣٠° **أوجد:**

١ ق (∠ ء أ ن)

٢ محيط الدائرة م بدلالة π



تدريبات الكتاب المدرسى

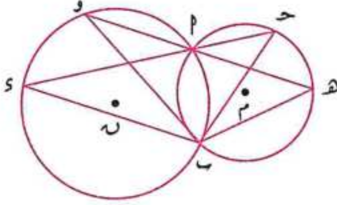
١ فى الشكل المقابل: (المنوفية ٢٠٢٣)

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب

$\overleftrightarrow{أ ح}$ يقطع الدائرة م فى ح ويقطع الدائرة ن فى ء

$\overleftrightarrow{أ هـ}$ يقطع الدائرة م فى هـ ويقطع الدائرة ن فى و

أثبت أن: ق(∠ هـ ب ح) = ق(∠ و ب ء)



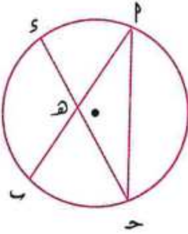
---

٢ فى الشكل المقابل: (البحيرة ٢٠٢٤)

$\overline{أ ب}$ ، $\overline{ح ء}$ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة،

$\overline{أ ب} \cap \overline{ح ء} = \{هـ\}$

أثبت أن: △ أ حـ هـ متساوى الساقين

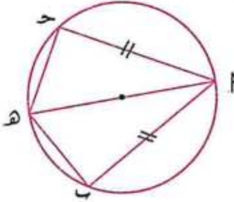


---

٣ فى الشكل المقابل:

أ ب = أ ح ، هـ ∈ (⌒ب ح)

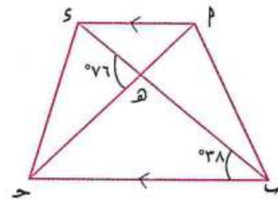
أثبت أن: ق(∠ أ هـ ب) = ق(∠ أ هـ ح)



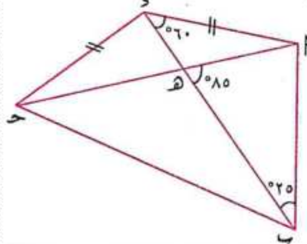
---

٤ بيّن فى أىٍّ من الأشكال الآتية يمكن رسم دائرة تمر بالنقط أ ، ب ، ح ، ء واذكر السبب:

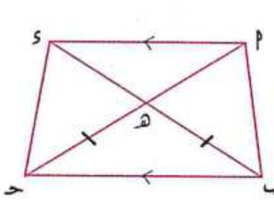
(أ)



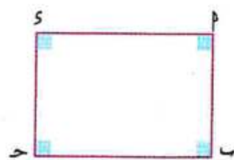
(ب)



(جـ)



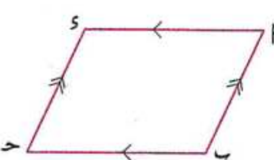
(د)



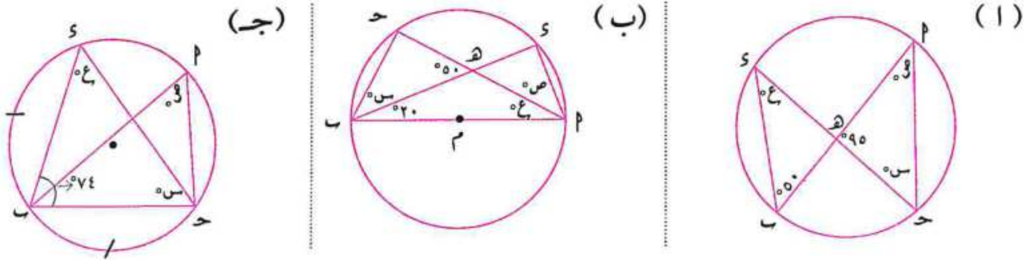
(هـ)



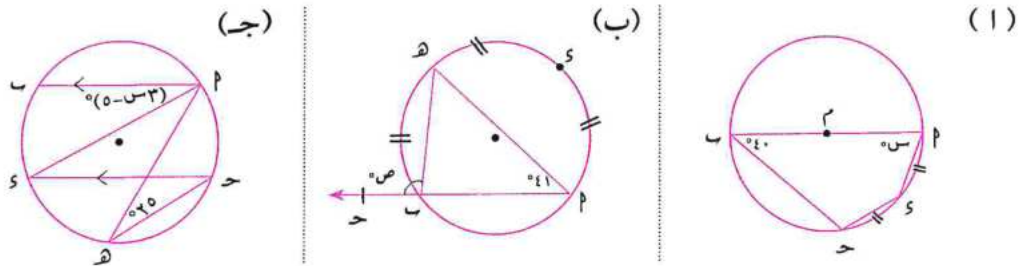
(و)



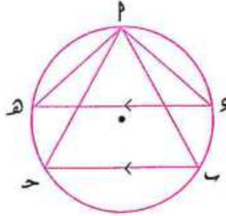
٥ فى كلٍّ من الأشكال الآتية، أوجد قيمة الرمز المستخدم فى القياس:



٦ فى كلٍّ من الأشكال الآتية، أوجد قيمة الرمز المستخدم فى القياس:



٧ فى الشكل المقابل: (البحيرة ٢٠٢٣)



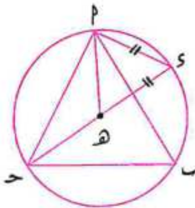
أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة ، $\overline{\text{ءهـ}} \parallel \overline{\text{ب حـ}}$

أثبت أن: ق (∠ ء أ حـ) = ق(∠ ب أ هـ)

٨ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م ، ق (∠ أ ب حـ) = ٤٠° ، ء ∈ (ب حـ)

أوجد: ق(∠ حـ ء ب)

٩ فى الشكل المقابل: (الدقهلية ٢٠٢٤)



أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع مرسوم داخل دائرة،

ء ∈ (أ ب) ، هـ ∈ $\overline{\text{ء حـ}}$ بحيث أ ء = ء هـ

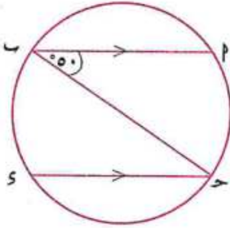
أثبت أن: Δ أ ء هـ متساوى الأضلاع.

١٠ أ ب حـ مثلث متساوى الساقين فيـه: أ ب = أ حـ، ء منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، رسم $\overleftarrow{\text{ب هـ}} \perp \overline{\text{أ حـ}}$
حيث $\overleftarrow{\text{ب هـ}} \cap \overline{\text{أ حـ}}$ = {هـ} أثبت أن: النقط أ ، ب، ء ، هـ تمر بها دائرة واحدة.

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان قياس قوس فى دائرة يساوى ٦٠° فإن طول هذا القوس = ... محيط الدائرة. (بورسعيد ٢٠٢٢)

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) $\frac{١}{٤}$ (د) $\frac{١}{٣}$



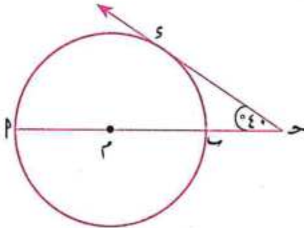
٢ فى الشكل المقابل: (أسوان ٢٠٢٣)

$\overline{أب} \parallel \overline{جـ ء}$ ، ق($\angle$ ب) = ٥٠° ،

فإن ق($\overset{\frown}{أ جـ}$) + ق($\overset{\frown}{ب ء}$) = ...

(أ) ٥٠° (ب) ٢٠٠°

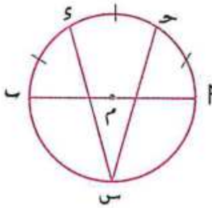
(جـ) ١٠٠° (د) ١٨٠°



٣ فى الشكل المقابل: ق ($\overset{\frown}{ء ب}$) = ...° (كفر الشيخ ٢٠٢٢)

(أ) ٢٥ (ب) ٥٠

(جـ) ٨٠ (د) ١٣٠



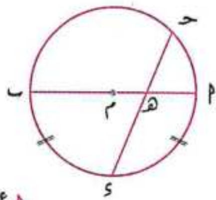
٤ فى الشكل المقابل: (بورسعيد ٢٠٢٢)

$\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م فإن ق ($\angle$ جـ س ء) = ...°

(أ) ١٥ (ب) ٣٠

(جـ) ٤٥ (د) ٦٠

٢

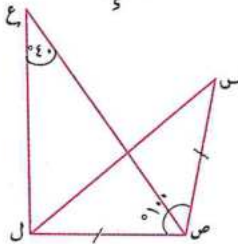


١ فى الشكل المقابل: (الدقهلية ٢٠٢٣)

$\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{أ ب} \cap \overline{جـ ء}$ = {هـ} ،

ق ($\overset{\frown}{أ ء}$) = ق ($\overset{\frown}{ب ء}$) = ٣ ق ($\overset{\frown}{أ جـ}$)

أوجد: ق ($\angle$ أ هـ جـ)



٢ فى الشكل المقابل: (كفر الشيخ ٢٠٢٢)

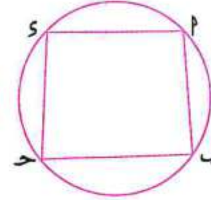
س ص = ل ص ، ق ($\angle$ س ص ل) = ١٠٠° ، ق ($\angle$ ع) = ٤٠°

أثبت أن: النقط س ، ص ، ل ، ع تمر بها دائرة واحدة

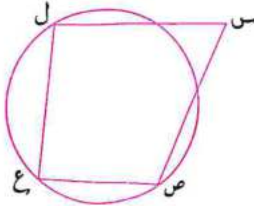
الشكـل الرباعـى الدائرى



فكر وناقش لاحظ الفرق بين:



الشكل ء ب حـ ء رباعى
أمكننا رسم دائرة تمر برءوسه الأربعة،
• لذا يسمى شكلًا **رباعيًا دائريًا.**

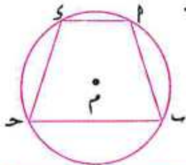


الشكل س ص ع ل رباعى
لا يمكننا رسم أى دائرة تمر برءوسه الأربعة مهما حاولنا،
• لذا الشكل س ص ع ل **ليس رباعيًا دائريًا.**

الشكل الرباعى الدائرى:

تعريف

الشكل الرباعى الدائرى: هو شكل رباعى لا بد أن تنتمى رءوسه الأربعة إلى دائرة واحدة.

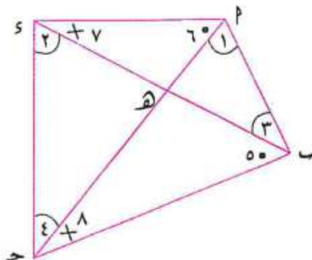


فمثلًا: فى الشكل المقابل: ء ب حـ ء شكل رباعى دائرى ،

لأن رءوسه الأربعة ء ، ب ، حـ، ء تنتمى للدائرة م

نقاط هامة

• **إذا كان:** الشكل الرباعى دائريًّا، **فإن:** كل زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها متساويتان فى القياس.



فمثلًا: فى الشكل المقابل:

إذا كان: الشكل ء ب حـ ء رباعيًا دائريًا فيـه: $\overline{ءحـ} \cap \overline{بء} = \{هـ\}$

فـإن : ق($\angle$ ١) = ق($\angle$ ٢) ، ق($\angle$ ٣) = ق($\angle$ ٤)

، ق($\angle$ ٥) = ق($\angle$ ٦) ، ق($\angle$ ٧) = ق($\angle$ ٨)

لأن كلًّا منهما زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة من القاعدة.

• **إذا كان:** الشكل الرباعى دائريًّا، **فإنه:** توجد نقطة فى مستوى الشكل تكون على مسافات متساوية من رءوس هذا الشكل الرباعى.

مما سبق نستنتج بعض الحالات التى يكون فيها الشكل الرباعى دائريًا:

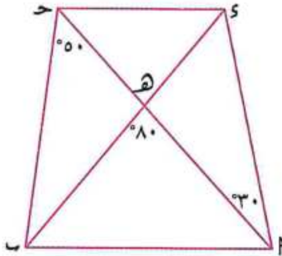
الحالة الأولى:

- إذا وجدت زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة فيه وفى جهة واحدة منها ومتساويتان فى القياس.

الحالة الثانية:

- إذا وجدت نقطة فى المستوى تبعد مسافات متساوية عن جميع رءوس الشكل الرباعى.

مثال ١



فى الشكل المقابل: أ ب حـ ء شكل رباعى فيه:

ق(∠ أ حـ ب) = ٥٠° ، ق(∠ أ هـ ب) = ٨٠° ،

ق(∠ ء أ حـ) = ٣٠°

أثبت أن: الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى

الحل

∵ ∠ أ هـ ب خارجة عن △ حـ هـ ب ∴ ق (∠ ء ب حـ) = ٨٠° − ٥٠° = ٣٠°

∴ ق (∠ ء أ حـ) = ق (∠ ء ب حـ) = ٣٠° (وهما مرسومتان على قاعدة واحدة $\overline{\text{ء حـ}}$ وفى جهة واحدة منها)

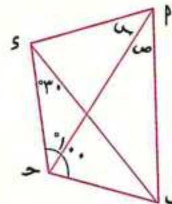
∴ الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى

سؤال ١

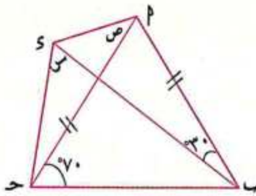
١ إذا كان: الشكل أ ب حـ ء رباعيًا دائريًا فى كل مما يأتى،

فأوجد قياس الزوايا المشار إليها بالرموز س ، ص

(أ)

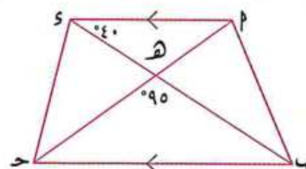


(ب)

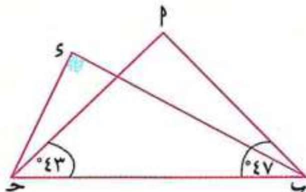


٢ بيِّن: أيٌّ من الشكلين الآتيين يمثل شكلًا رباعيًا دائريًا:

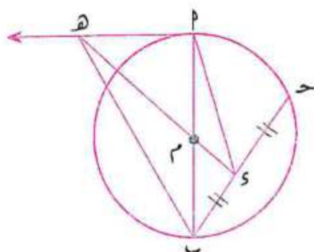
(أ)



(ب)



مثال ٢



فى الشكل المقابل:

$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{بحـ}$ وتر فيها ،

ء منتصف $\overline{بحـ}$ ، $\overleftarrow{أهـ}$ مماس للدائرة عند أ ،

$\overleftarrow{ءم} \cap \overleftarrow{أهـ} = \{هـ\}$

أثبت أن الشكل أ ء ب هـ رباعى دائرى

الحل

∵ $\overleftarrow{أهـ}$ مماس الدائرة عند أ ، $\overline{أب}$ قطر فيها

∴ ق (∠ ب أ هـ) = ٩٠° ——— ١

∵ ء منتصف $\overline{بحـ}$

∴ $\overline{مء} \perp \overline{بحـ}$ ∴ ق (∠ ب ء هـ) = ٩٠° ——— ٢

من ١ ، ٢

الشكل الرباعى أ ء ب هـ فيه:

ق (∠ ب أ هـ) = ق (∠ ب ء هـ) = ٩٠° (وهما زاويتان مرسومتان على القاعدة $\overline{بهـ}$ وفى جهة واحدة منها)

∴ الشكل الرباعى أ ء ب هـ رباعى دائرى. (وهو المطلوب)

لاحظ أن

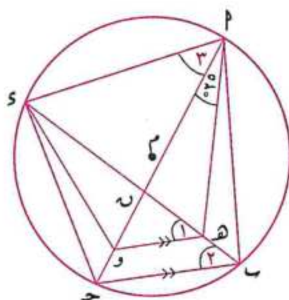
$\overline{بهـ}$ يكون قطر الدائرة المارة برءوس الشكل الرباعى أ ء ب هـ ، ومنتصف $\overline{بهـ}$ هو مركز الدائرة المار برءوس هذا الشكل.

نقاط هامة

- المربع والمستطيل وشبه المنحرف المتساوى الساقين أشكال رباعية دائرية.
- المعين ومتوازى الأضلاع وشبه المنحرف غير المتساوى الساقين أشكال رباعية غير دائرية.
- إذا وجدت زاويتان قائمتان ومرسومتان على قاعدة واحدة، وفى جهة واحدة منها، فإن هذه القاعدة هى قطر الدئرة المارة بهذا الشكل الرباعى.
- **إذا كانت** إحدى زوايا الشكل الرباعى الدائرى قائمة:

  فإن قطر الشكل الرباعى المقابل للزاوية القائمة هو قطر الدائرة المارة برءوس الشكل، ومنتصف هذا القطر هو مركز هذه الدائرة.

مثـال ٣



في الشكل المقابل:

ٮ ٮـ حـ ء شكل رباعى مرسوم داخل الدائرة م

$\overline{ٮ حـ} \cap \overline{ٮـ ء} = \{ن\}$ ، هـ $\in \overline{ٮـ ء}$ ، و $\in \overline{ٮ حـ}$

حيث إن: $\overline{هـ و}$ // $\overline{ٮـ حـ}$ ، ق($\angle$ هـ ٮ و) = ٢٥°

أولًا: أثبت أن الشكل ٮ هـ و ء رباعى دائرى

ثانيًا: استنتج ق($\angle$ هـ ء و)

الحـل

∵ الشكل ٮ ٮـ حـ ء رباعى دائرى

∴ ق($\angle$٢) = ق($\angle$٣) محيطيتان مشتركتان فى $\overset{\frown}{حـ ء}$

∵ $\overline{هـ و}$ // $\overline{ٮـ حـ}$ ∴ ق($\angle$٢) = ق($\angle$١) ________ (بالتناظر)

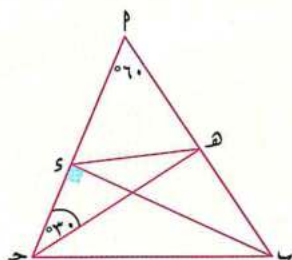
∴ ق($\angle$١) = ق($\angle$٣) (وهما مرسومتان على القاعدة $\overline{ء و}$ وفى جهة واحدة منها)

∴ الشكل ٮ هـ و ء رباعى دائرى **(وهو المطلوب أولًا)**

∴ ق($\angle$ هـ ٮ و) = ق($\angle$ هـ ء و) (مرسومتان على القاعدة $\overline{هـ و}$ وفى جهة واحدة منها)

∵ ق($\angle$ هـ ٮ و) = ٢٥° ∴ ق($\angle$ هـ ء و) = ٢٥° **(وهو المطلوب ثانيًا)**

س؟ سؤال ٢



فى الشكل المقابل: $\triangle$ ٮ ٮـ حـ فيـه :

$\overline{ٮـ ء} \perp \overline{ٮ حـ}$ ، هـ $\in \overline{ٮ ٮـ}$ حيث إن:

ق($\angle$ٮ) = ٦٠° ، ق($\angle$ ٮ حـ هـ) = ٣٠°

أثبت أن الشكل هـ ٮـ حـ ء رباعى دائرى



تدريبات الأضــواء

الشكل الرباعى الدائرى

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ يمكن رسم دائرة تمر برءوس .... (بورسعيد ٢٠٢٤)

(أ) معين (ب) مستطيل (جـ) شبه منحرف (د) متوازى أضلاع

٢ إذا كان ﺃ ب جـ ء شكلًا رباعيًا دائريًا فإن ق(∠ ب ﺃ جـ) = ق(∠ ....) (القليوبية ٢٠١٩)

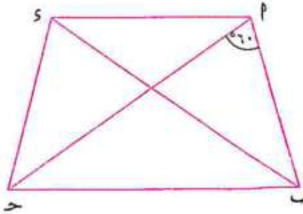
(أ) ب جـ ﺃ (ب) ء ب ﺃ (جـ) ب ء جـ (د) ﺃ جـ ء

٣ إذا كان الشكل ءهـ و ص رباعيًا دائريًا حيث ق(∠ ص) = ٩٠°،

فإن .... قطر فى الدائرة المارة برءوسه. (الدقهلية ٢٠١٦)

(أ) $\overline{\text{هـ ص}}$ (ب) $\overline{\text{هـ و}}$ (جـ) $\overline{\text{ء و}}$ (د) $\overline{\text{ء هـ}}$

٤ فى الشكل المقابل: (بورسعيد ٢٠٢٢)



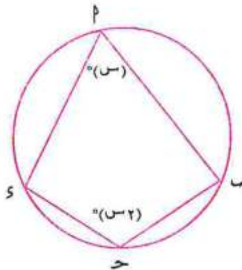
ﺃ ب جـ ء شكل رباعى دائرى، ق(∠ ب ﺃ جـ) = ٦٠°

فإن ق(∠ ب ء جـ) = ...°

(أ) ٣٠٠ (ب) ١٢٠

(جـ) ٦٠ (د) ٣٠

٥ فى الشكل المقابل: (دمياط ٢٠١٧)



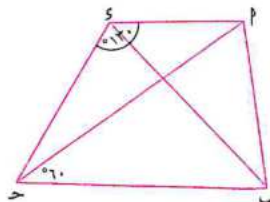
إذا كان ق(∠ ﺃ) = (س°) ، ق(∠ جـ) = (٢س°)

فإن: س = ...

(أ) ٦٠ (ب) ٥٠

(جـ) ٨٠ (د) ١٢٠

٦ فى الشكل المقابل: ﺃ ب جـ ء شكل رباعى دائرى



ق(∠ ﺃ ء جـ) = ١٣٠° ، ق(∠ ﺃ جـ ب) = ٦٠°

فإن ق(∠ ب ﺃ جـ) = ...°

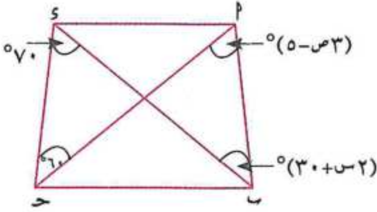
(أ) ٦٠ (ب) ٧٠

(جـ) ٥٠ (د) ٢٥

٧ في الشكل المقابل:

إذا كان: ٢ ب حـ ٤ شكلًا رباعيًا دائريًا ،

فإن قيمة (ص − س)^{٢}= ....

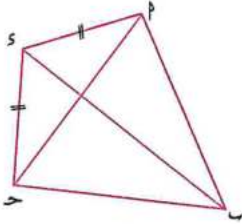


(١) ٦٢٥	(ب) ٢٢٥
(جـ) ١٠٠	(د) ٢٥

٨ في الشكل المقابل: إذا كان ٢ ب حـ ٤ شكلًا رباعيًا دائريًا

، وكان للمثلث ٢ ب حـ ثلاثة محاور تماثل

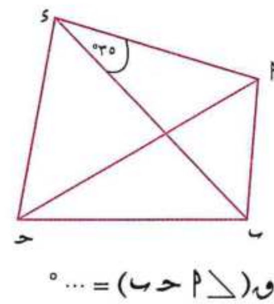
فإن ق(∠ ب٢ ٤) = ...°



(١) ٣٠	(ب) ٦٠
(جـ) ٤٥	(د) ٩٠

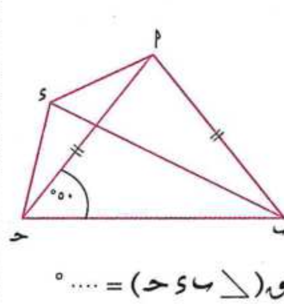
٢ في كل شكل من الأشكال الآتية إذا كان ٢ ب حـ ٤ شكلًا رباعيًا دائريًا، فأوجد قياس الزاوية المطلوبة:

١



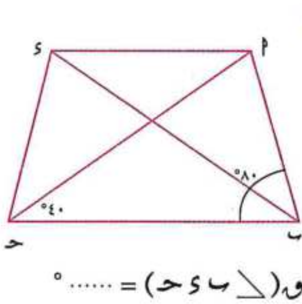
ق(∠٢ حـ ب) = ...°

٢



ق(∠ ب ٤ حـ) = ...°

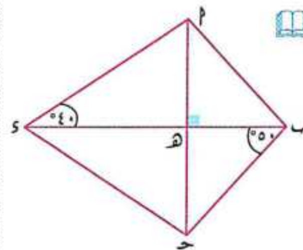
٣



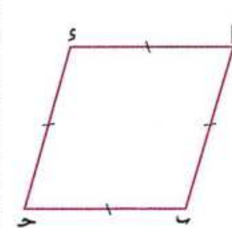
ق(∠ ب ٤ حـ) = ...°

٣ بيِّن: أي من الأشكال الآتية رباعي دائري؟ فسِّر إجابتك.

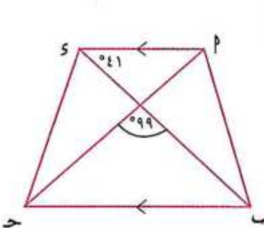
١



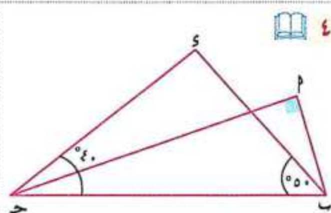
٢



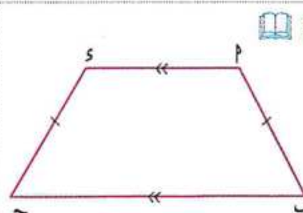
٣



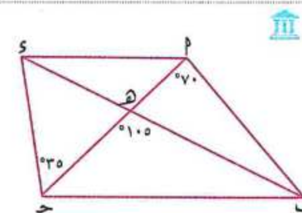
٤



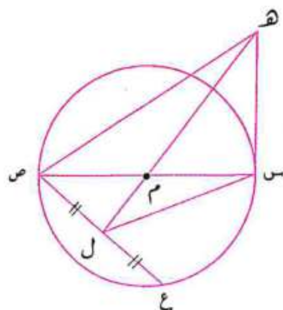
٥



٦



٤ في الشكل المقابل: (دمياط ٢٠٢٢)



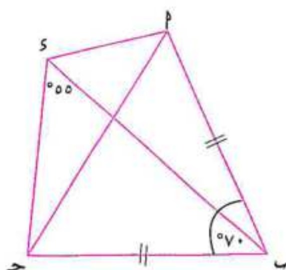
سص قطر فى الدائرة ، سهـ قطعة مماسة للدائرة عند س

ل منتصف صع ، لم ∩ سهـ = {هـ}

أثبت أن: س ل ص هـ رباعى دائرى

---

٥ في الشكل المقابل:



Δ أ ب ح فيه: ب أ = ب ح ،

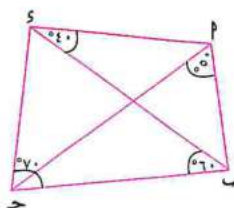
ق(∠ أ ب ح) = ٧٠° ،

Δ ء ب ح فيه ق(∠ ب ء ح) = ٥٥°

أثبت أن: أ ب ح ء شكل رباعى دائرى

---

٦ في الشكل المقابل:



ق(∠ ب أ ح) = ٥٠° ، ق(∠ ء ب ح) = ٦٠° ،

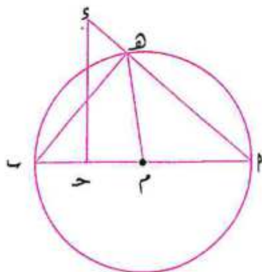
ق(∠ أ ء ب) = ٤٠° ، ق(∠ ء ح ب) = ٧٠° أثبت أن:

١ الشكل أ ب ح ء رباعى دائرى

٢ أ ح قطر فى الدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، ح ، ء

---

٧ في الشكل المقابل:



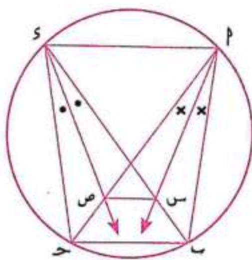
أ ب قطر فى الدائرة م ، أ هـ وتر فيها،

رسم ح ء ⊥ أ ب فقطع أ هـ فى ء أثبت أن:

١ النقط ء ، هـ ، ح ، ب تمر بها دائرة واحدة

٢ ق(∠ أ م هـ) = ٢ ق(∠ ء)

٨ في الشكل المقابل:



أ ب جـ د شكل رباعي دائري فيه:

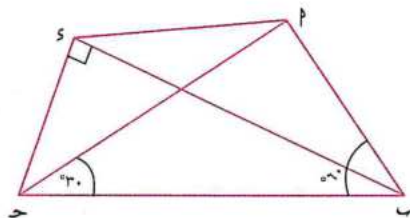
أس ينصف ∠ ب أ جـ ، دص ينصف ∠ ب د جـ **أثبت أن:**

١ أ س ص د رباعي دائري (المنوفية ٢٠٢٣)

٢ $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ (الأقصر ٢٠١٦)

---

٩ في الشكل المقابل:



ق(∠ ب د جـ) = ٩٠° ، ق(∠ أ جـ ب) = ٣٠°

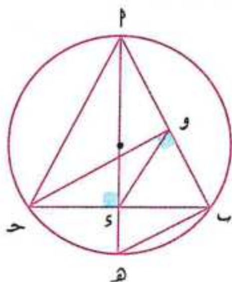
ق(∠ أ ب جـ) = ٦٠°

١ **أثبت أن** أ ب جـ د شكل رباعي دائري.

٢ **أوجد** ق(∠ ب د أ)

---

١٠ في الشكل المقابل:



$\overline{\text{أ د}}$ ⊥ $\overline{\text{ب جـ}}$ ويقطعه في د ، ويقطع الدائرة في هـ ، $\overline{\text{جـ و}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ،

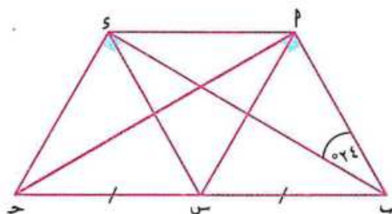
جـ و ∩ $\overline{\text{أ ب}}$ = {و} **أثبت أن:**

١ الشكل أ و د جـ رباعي دائري

٢ ق(∠ هـ ب جـ) = ق(∠ د و جـ)

---

١١ في الشكل المقابل:



$\overline{\text{أ جـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب د}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ د}}$

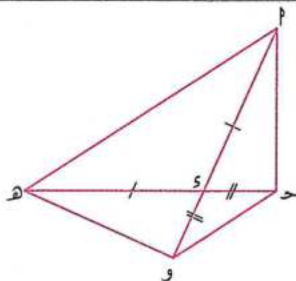
أثبت أن: الشكل أ ب جـ د شكل رباعي دائري

وإذا كان س منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ق(∠ أ ب د) = ٢٤°

أوجد: ق(∠ أ س د)

---

١٢ في الشكل المقابل:



أ د = د هـ ، جـ د = د و

أثبت أن: الشكل أ جـ و هـ رباعي دائري

١٣ في الشكل المقابل: (الدقهلية ٢٠٢٣)

أ ب جـ مثلث فيه: $\overline{\text{أ د}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$

، $\overline{\text{ب هـ}} \perp \overline{\text{أ جـ}}$ ، س منتصف $\overline{\text{ن ب}}$

، ص منتصف $\overline{\text{ن أ}}$

أثبت أن: الشكل س ص هـ د رباعي دائري

---

١٤ في الشكل المقابل: (الشرقية ٢٠٢٤)

دائرة مركزها م

أ ب = جـ د ، ق(∠أ م هـ) = ٤٠°

١ أثبت أن أ ب م هـ رباعي دائري

٢ أوجد ق(∠أ د جـ)

تفكير إبداعي TIMSS

١٥ أ ب جـ د شبه منحرف فيه: $\overline{\text{أ د}} \parallel \overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}} \cap \overline{\text{ب د}}$ = {و}

حيث و ب = و جـ **أثبت أن**: الشكل أ ب جـ د رباعي دائري

---

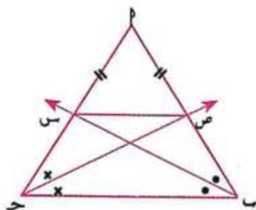
١٦ س ص ع مثلث حاد الزوايا، رُسِمَ المربعان س ص أ ب ، ص ع جـ د خارج المثلث س ص ع

فإذا كان $\overline{\text{س د}} \cap \overline{\text{أ ع}}$ = {و} **فأثبت أن:**

١ الشكل أ س و ص رباعي دائري

٢ $\overline{\text{أ ع}} \perp \overline{\text{س د}}$

تدريبات الكتاب المدرسى

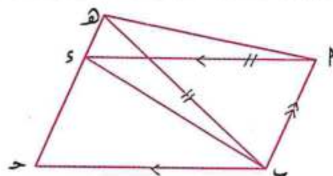


١ في الشكل المقابل: أ ب ح مثلث فيـه:

أ ب = أ ح ، $\overleftrightarrow{\text{ب س}}$ ينصف ∠ ب ، ويقطع $\overline{\text{أ ح}}$ في س

، $\overleftrightarrow{\text{ح ص}}$ ينصف ∠ ح ويقطع $\overline{\text{أ ب}}$ في ص **أثبت أن:**

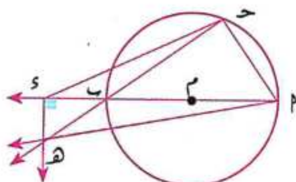
أولًا: ب ح س ص رباعى دائرى **ثانيًا:** $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب ح}}$



٢ في الشكل المقابل:

أ ب ح ء متوازى أضلاع ، هـ ∈ $\overleftrightarrow{\text{ح ء}}$ حيث ب هـ = أ ء

أثبت أن: الشكل أ ب ء هـ رباعى دائرى

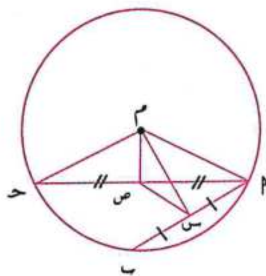


٣ في الشكل المقابل: (سوهاج ٢٠٢٤)

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة م، ء ∈ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ،

ء ∉ $\overline{\text{أ ب}}$ ، رسم $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، ح ∈ $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ح ب}}$ ∩ $\overleftrightarrow{\text{ء هـ}}$ = {هـ}

أثبت أن: الشكل أ ح ء هـ رباعى دائرى



٤ في الشكل المقابل:

دائرة مركزها م ، س، ص منتصفا $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ ح}}$ على الترتيب **أثبت أن:**

أولاً: الشكل أ س ص م رباعى دائرى

ثانيًا: ق(∠ م س ص) = ق(∠ م ح ص)

ثالثًا: $\overline{\text{أ م}}$ قطر في الدائرة المارة بالنقط أ ، س ، ص ، م

---

٥ أ ب ح ء مربع فيه: $\overleftrightarrow{\text{أ س}}$ ينصف (∠ ب أ ح) ، ويقطع $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ في س ، $\overleftrightarrow{\text{ء ص}}$ ينصف (∠ ح ء ب) ويقطع $\overleftrightarrow{\text{أ ح}}$ في ص **أثبت أن:**

أولًا: الشكل أ س ص ء رباعى دائرى **ثانيًا:** ق(∠ أ ص س) = ٤٥°

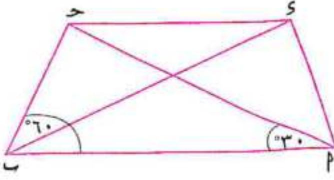
---

٦ أ ب ح مثلث مرسوم داخل دائرة فيه: س ∈ ($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) ، ص ∈ ($\overset{\frown}{\text{أ ح}}$) (مطروح ٢٠٢٣)

حيث ق($\overset{\frown}{\text{أ س}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{أ ص}}$) ، $\overline{\text{ح س}}$ ∩ $\overline{\text{أ ب}}$ = {ء}، $\overline{\text{ب ص}}$ ∩ $\overline{\text{أ ح}}$ = {هـ} **أثبت أن:**

أولًا: الشكل ب ح هـ ء رباعى دائرى **ثانيًا:** ق(∠ ء هـ ب) = ق(∠ س أ ب)

١ اختر الإجابة الصحيحة:



١ **فى الشكل المقابل:** أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى (المنوفية ٢٠٢٢)

إذا كان ق (∠ ب أ حـ) = ٣٠°، ق (∠ أ ب حـ) = ٦٠°

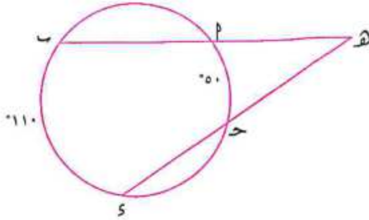
فإن: ق (∠ أ ء ب) = ...°

(أ) ٥٠ (ب) ٦٠

(جـ) ٨٠ (د) ٩٠

٢ إذا كان أ ب حـ ء معينًا، فإن عدد الدوائر التى يمكن أن تمر بالرءوس أ ، ب ، حـ يساوى .... (الغربية ٢٠٢٣)

(أ) صفرًا (ب) ١ (جـ) ٣ (د) عددًا لا نهائيًّا



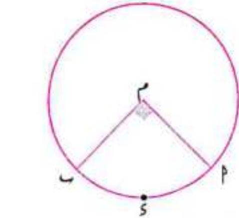
٣ **فى الشكل المقابل:** (بورسعيد ٢٠٢٣)

ق ($\overset{\frown}{\text{أ حـ}}$) = ٥٠°، ق ($\overset{\frown}{\text{ب ء}}$) = ١١٠°

فإن ق (∠ هـ) = ...°

(أ) ١٠ (ب) ٢٠

(جـ) ٣٠ (د) ٦٠

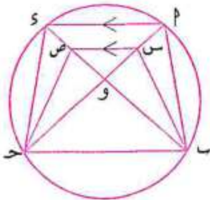


٤ **فى الشكل المقابل:** (السويس ٢٠٢٣)

إذا كانت م دائرة ، ق (∠ أ م ب) = ٩٠° فإن طول ($\overset{\frown}{\text{أ ء ب}}$) = ...

(أ) ٢ π نق (ب) π نق

(جـ) $\frac{1}{2}$ π نق (د) $\frac{1}{4}$ π نق



٢ **فى الشكل المقابل:** (الجيزة ٢٠١٦)

أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى، تقاطع قطراه فى و،

س ∈ $\overline{\text{أ و}}$ ، ص ∈ $\overline{\text{ء و}}$ حيث $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{أ ء}}$ أثبت أن:

(أ) الشكل ب س ص حـ رباعى دائرى

(ب) ق (∠ س ب ص) = ق (∠ س حـ ص)

٣ أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى فيه: (الإسكندرية ٢٠١٣)

$\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{ء حـ}}$ ، هـ منتصف ($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) أثبت أن: هـ ء = هـ حـ

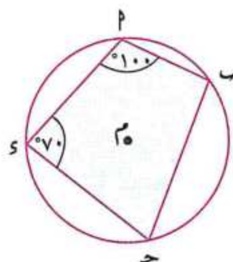
خواص الشكل الرباعى الدائرى





فكر وناقش

- مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى الداخلة = ٣٦٠° ، قياس الدائرة = ٣٦٠°
- فى الشكل المقابل:



إذا كان: ق (∠ أ) = ١٠٠° فـإن : ق (ب حـ ء⌒) = ٢٠٠°

∵ ق (ب حـ ء⌒) + ق (ب أ ء⌒) = قياس الدائرة

فـإن : ق (ب أ ء⌒) = ١٦٠° فيكون : ق (∠ حـ) = ٨٠°

، ق (∠ أ) + ق (∠ حـ) = ١٨٠°

وإذا كان: ق (∠ ء) = ٧٠°

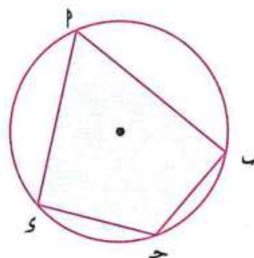
فـإن : ق (∠ ب) = ١١٠° ، ق (∠ ء) + ق (∠ ب) = ١٨٠°

ما العلاقـة بين قياسى كل زاويتين متقابلتين فى الشكل الرباعى الدائرى؟

أولًا نظريـة (٣) والنتيجـة :

نظـريـة (٣)

إذا كان الشكل الرباعى دائريًّا فإن كل زاويتين متقابلتين فيه متكاملتان.



المعطيـات : أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى

المطلـوب : إثبـات أن: ١ ق (∠ أ) + ق (∠ حـ) = ١٨٠°

٢ ق (∠ ب) + ق (∠ ء) = ١٨٠°

البرهـان : ∵ ق (∠ أ) = $\frac{1}{2}$ ق (ب حـ ء⌒)

، ق (∠ حـ) = $\frac{1}{2}$ ق (ب أ ء⌒)

∴ ق (∠ أ) + ق (∠ حـ) = $\frac{1}{2}$ [ق (ب حـ ء⌒) + ق (ب أ ء⌒)]

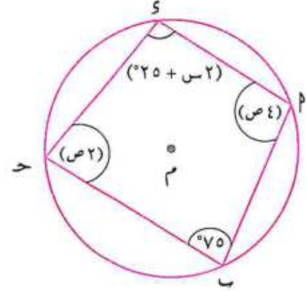
= $\frac{1}{2}$ × ٣٦٠° = ١٨٠°

بالمثل: ق (∠ ب) + ق (∠ ء) = ١٨٠° (وهو المطلوب)

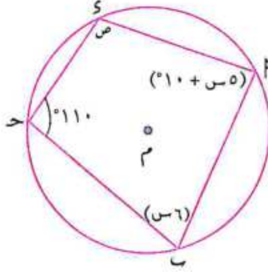
مثال ١

في كل من الأشكال الآتية، أوجد قيمة كل من س ، ص:

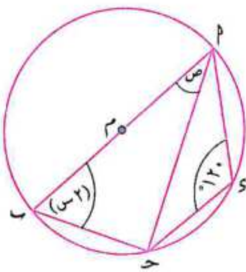
١



٢



٣



الحـل

١ ∵ أ ب حـ ء رباعى دائرى

∴ (٢س + ٢٥°) + ٧٥° = ١٨٠°

٢س + ١٠٠° = ١٨٠°

٢س = ٨٠°

∴ س = ٤٠°

بالمثـل:

٤ص + ٢ص = ١٨٠°

∴ ٦ص = ١٨٠°

∴ ص = ٣٠°

٢ ∵ أ ب حـ ء رباعى دائرى

∴ (٥س + ١٠°) + ١١٠° = ١٨٠°

٥س + ١٢٠° = ١٨٠°

٥س = ٦٠°

∴ س = ١٢°

بالمثـل:

٦س + ص = ١٨٠°

٦ × ١٢° + ص = ١٨٠°

٧٢° + ص = ١٨٠°

ص = ١٠٨°

٣ ∵ أ ب حـ ء رباعى دائرى

∴ (٢س) + ١٢٠° = ١٨٠°

∴ ٢س = ٦٠°

س = ٣٠°

∵ $\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م

∴ ق(∠ أ حـ ب) = ٩٠°

فى △ أ ب حـ

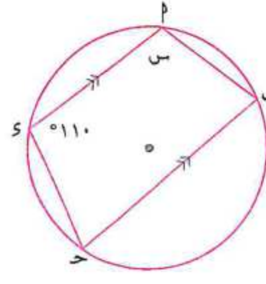
ص = ١٨٠° − (٩٠° + ٦٠°)

ص = ٣٠°

س؟ سؤال ١

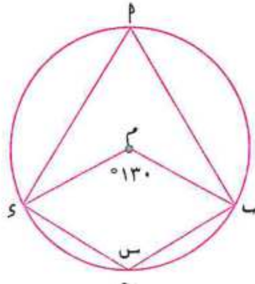
في كل من الأشكال التالية أوجد قياس الزاوية المشار إليها بالرمز س :

١



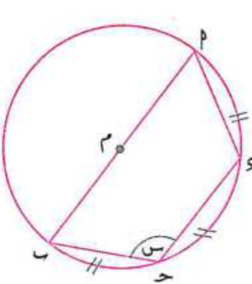
س = ...°

٢



س = ...°

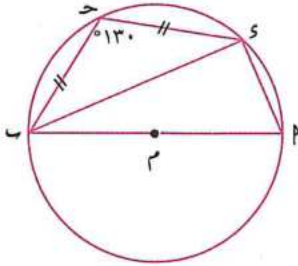
٣



س = ...°

مثال ٢

فى الشكل المقابل: (المنيا ٢٠٢٤)



ٲ ب حـ ء شكل رباعى مرسوم داخل الدائرة م فيه:

ق (∠ حـ) = ١٣٠° ، $\overline{ٲ ب}$ قطر فى الدائرة م ،

حـ ء = حـ ب أوجد بالبرهان:

أولًا: ق (∠ ٲ) ثانيًا: ق (∠ ٲ ء حـ)

الحل

∵ ٲ ب حـ ء شكل رباعى دائرى

∴ ق (∠ حـ) + ق (∠ ٲ) = ١٨٠° ——— (نظرية)

∵ ق (∠ حـ) = ١٣٠° ∴ ق (∠ ٲ) = ١٨٠° − ١٣٠° = ٥٠° (وهو المطلوب أولًا)

∵ △ ب حـ ء فيه: حـ ب = حـ ء

∴ ق (∠ حـ ب ء) = ق (∠ حـ ء ب) = $\frac{١٨٠° - ١٣٠°}{٢}$ = ٢٥°

∵ $\overline{ٲ ب}$ قطر فى الدائرة م

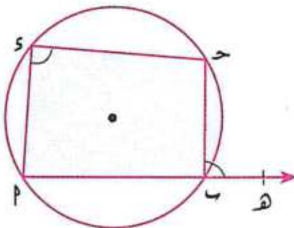
∴ ق (∠ ٲ ء ب) = ٩٠° (زاوية محيطية مرسومة فى نصف دائرة)

∴ ق (∠ ٲ ء حـ) = ٩٠° + ٢٥° = ١١٥° (وهو المطلوب ثانيًا)

نتيجـة

قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس من رءوس الشكل الرباعى الدائرى يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها.

فمثلًا: فى الشكل المقابل:



ٲ ب حـ ء رباعى دائرى ، هـ ∈ $\overleftarrow{ٲ ب}$ ، هـ ∉ $\overline{ٲ ب}$

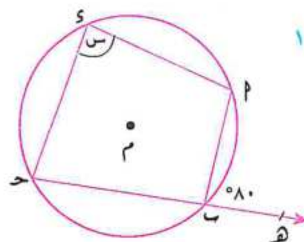
∵ ∠ هـ ب حـ زاوية خارجة عن الشكل الرباعى الدائرى ٲ ب حـ ء ،

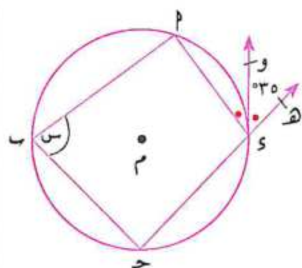
∠ ء هى الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها

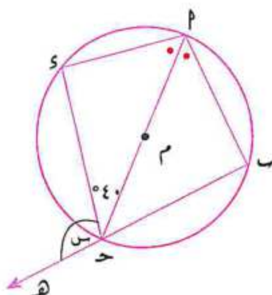
فيكون: ق (∠ هـ ب حـ) = ق (∠ ء)

مثـال ٣

فى كل من الأشكال الآتية، أوجد قياس الزاوية المشار إليها بالرمز س :

١


٢


٣


الحـل

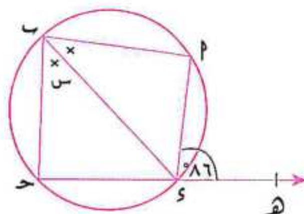
١ ∵ ∠ أ ب هـ خارجه عن
الشكل أ ب حـ ء الرباعى الدائرى
∴ ق (∠ ء) = ق (∠ أ ب هـ)
∴ س = ٨٠°

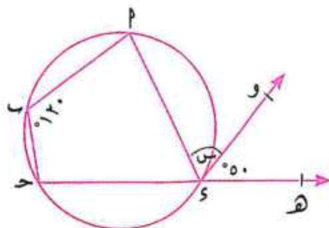
٢ ∵ ء و← ينصف ∠ أ ء هـ
∴ ق (∠ أ ء هـ) = ٢ × ٣٥° = ٧٠°
∵ أ ب حـ ء رباعى دائرى
، ∠ أ ء هـ خارجه عنه
∴ ق (∠ ب) = ق (∠ أ ء هـ)
∴ س = ٧٠°

٣ ∵ أ حـ قطر فى الدائرة م
∴ ق (∠ ء) = ٩٠°
∵ ق (∠ أ حـ ء) = ٤٠°
∴ ق (∠ ء أ حـ) = ٥٠°
∵ أ حـ← ينصف ∠ ب أ ء
∴ ق (∠ ب أ ء) = ١٠٠°
∵ أ ب حـ ء رباعى دائرى
، ∠ ء حـ هـ خارجه عنه
∴ ق (∠ ء حـ هـ) = ق (∠ ب أ ء)
∴ س = ١٠٠°

سؤال ٢

فى الشكلين الآتيين أوجد قياس الزاوية المشار إليها بالرمز س :

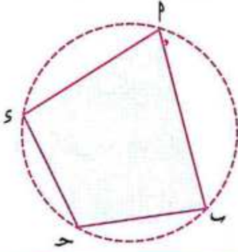
١


٢


ثانيًا عكس نظرية (٣) والنتيجة :

عكس نظرية (٣)

إذا وجدت زاويتان متقابلتان متكاملتان فى شكل رباعى كان هذا الشكل رباعيًا دائريًا.



فمثلًا: فى الشكل المقابل:

إذا كان : ق (∠ ٲ) + ق (∠ حـ) = ١٨٠°

أو ق (∠ ب) + ق (∠ ء) = ١٨٠°

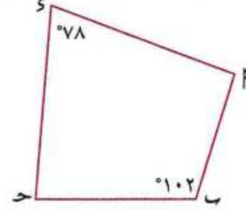
فيكون : الشكل ٲ ب حـ ء رباعيًا دائريًّا

مثال ٤

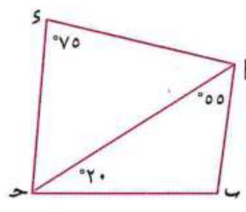
(باستخدام المعطيات الموضحة على كل شكل)

أثبت أن الشكل ٲ ب حـ ء رباعى دائرى فى كل من الأشكال الآتية:

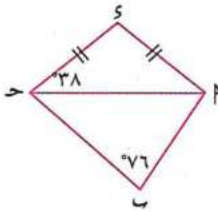
١



٢



٣



الحل

١ **فى الشكل الرباعى ٲ ب حـ ء**

∵ ق (∠ ب) + ق (∠ ء) = ١٠٢° + ٧٨° = ١٨٠° ∴ الشكل ٲ ب حـ ء رباعى دائرى

٢ فى △ ٲ ب حـ : ق (∠ ب) = ١٨٠° − (٥٥° + ٢٠°) = ١٠٥°

فى الشكل الرباعى ٲ ب حـ ء

∵ ق (∠ ب) + ق (∠ ء) = ١٠٥° + ٧٥° = ١٨٠° ∴ الشكل ٲ ب حـ ء رباعى دائرى

٣ △ ٲ حـ ء فيه: ءٲ = ء حـ ∴ ق (∠ ء ٲ حـ) = ق (∠ ء حـ ٲ) = ٣٨°

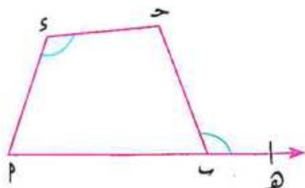
∴ ق (∠ ء) = ١٨٠° − (٣٨° + ٣٨°) = ١٠٤°

فى الشكل الرباعى ٲ ب حـ ء

∵ ق (∠ ب) + ق (∠ ء) = ٧٦° + ١٠٤° = ١٨٠° ∴ الشكل ٲ ب حـ ء رباعى دائرى

نتيجــة

إذا وجدت زاويــة خارجــة عند رأس من رءوس شكل رباعى قياسها يساوى قياس الزاوية الداخلـة المقابلة لهذا الرأس كان الشكل رباعيًّا دائريًّا.



فمثلاً: فى الشكل المقابل:

ا ب حـ ء شكل رباعى ، هـ ∈ $\overleftarrow{اب}$ ، هـ ∉ $\overline{اب}$

∵ ∠هـ ب حـ زاوية خارجة عن الشكل الرباعى ا ب حـ ء ،

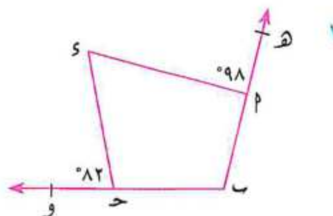
∠ء هى الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها

فإذا كان: ق(∠هـ ب حـ) = ق(∠ء) **يكون:** الشكل ا ب حـ ء رباعيًّا دائريًّا

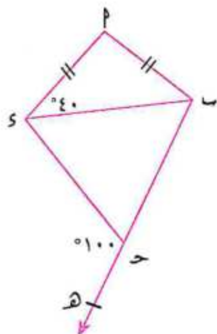
مثـال ٥

استخدم المعطيات الموضحة على كل شكل لإثبات أن ا ب حـ ء رباعى دائرى:

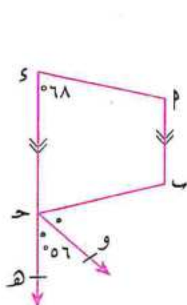
١



٢



٣



الحـل

١

∵ ق(∠ب حـ ء) = ١٨٠° - ٨٢° = ٩٨°

∴ ق(∠هـ ا ء) = ق(∠ب حـ ء)

= ٩٨°

، ∠هـ ا ء خارجه عن الشكل ا ب حـ ء

∴ الشكل ا ب حـ ء رباعى دائرى

٢

∵ △ ا ب ء فيه ا ب = ا ء

∴ ق(∠ا ء ب) = ق(∠ا ب ء)

= ٤٠°

∴ ق(∠ا) = ١٨٠° - (٤٠° + ٤٠°)

= ١٠٠°

، ∠ء حـ هـ خارجه عن الشكل ا ب حـ ء

∵ ق(∠ا) = ق(∠ء حـ هـ)

= ١٠٠°

∴ الشكل ا ب حـ ء رباعى دائرى

٣

∵ $\overline{اب}$ // $\overline{ءحـ}$

∴ ق(∠ا) = ١٨٠° - ٦٨° = ١١٢°

∵ $\overrightarrow{حـو}$ ينصف (∠ب حـ هـ)

∴ ق(∠ب حـ هـ) = ٥٦° × ٢ = ١١٢°

∵ ق(∠ا) = ق(∠ب حـ هـ)

∴ الشكل ا ب حـ ء رباعى دائرى

ملخص الحالات التى يكون فيها الشكل الرباعى دائريًا:

يكون الشكل الرباعى دائريًا إذا تحققت إحدى الحالات الآتية:

١ إذا وجدت نقطة فى المستوى على أبعاد متساوية من رءوس الشكل الرباعى.

٢ إذا وجدت زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة فى جهة واحدة منها ومتساويتان فى القياس.

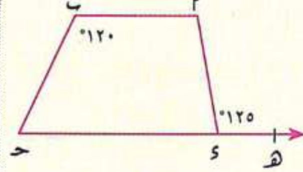
٣ إذا وجدت زاويتان متقابلتان متكاملتان (أى مجموع قياسيهما = ١٨٠°).

٤ إذا وجدت زاوية خارجة عند رأس من رءوس الشكل الرباعى وتساوى فى القياس الزاوية الداخلة المقابلة لهذا الرأس.

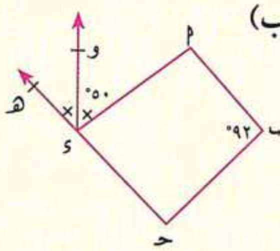
س؟ سؤال ٣

١ **بيِّن: أى الأشكال الآتية رباعى دائرى؟ حيث هـ ∈ $\overleftarrow{حء}$:**

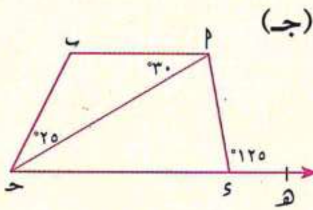
(أ)



(ب)



(جـ)

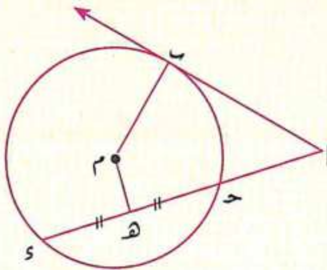


٢ **فى الشكل المقابل:**

$\overleftarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند ب

، $\overleftarrow{أء}$ يقطع الدائرة فى حـ ، ء ، وكانت هـ منتصف $\overline{حء}$

أثبت أن: الشكل أ ب م هـ رباعى دائرى

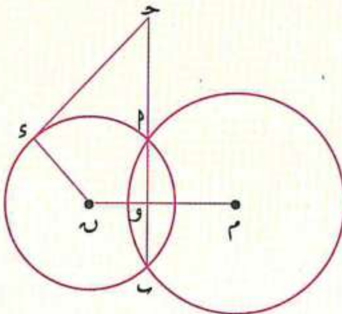


٣ **فى الشكل المقابل:**

م ، ن دائرتان متقاطعتان فى أ ، ب

، $\overline{حء}$ قطعة مماسة للدائرة ن عند ء

أثبت أن: الشكل حـ و ن ء رباعى دائرى





تدريبات الأضـــواء

أولًا نظرية (٣) والنتيجة

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ فى الشكل الرباعى الدائرى كل زاويتين متقابلتين .... (مطروح ٢٠١٩)

(أ) متساويتان (ب) متكاملتان (جـ) متتامتان (د) متبادلتان

٢ فى الشكل أ ب جـ ء الرباعى الدائرى إذا كان ق($\angle$ أ) = ٧٠°، فإن: ق($\angle$ جـ) = ...° (البحيرة ٢٠١٩)

(أ) ٣٥ (ب) ٢٠ (جـ) ١١٠ (د) ١٠٠

٣ فى الشكل الرباعى الدائرى أ ب جـ ء إذا كان ق($\angle$ أ) = $\frac{1}{2}$ ق($\angle$ جـ) فإن: ق($\angle$ أ) = ...° (القاهرة ٢٠١٩)

(أ) ٢٠ (ب) ٣٠ (جـ) ٦٠ (د) ١٢٠

٤ فى الشكل الرباعى الدائرى أ ب جـ ء إذا كان ق($\angle$ أ) = ٣ ق($\angle$ جـ) فإن ق($\angle$ أ) = ...° (الغربية ٢٠١٩)

(أ) ٩٠ (ب) ٤٥ (جـ) ١٣٥ (د) ١٢٠

٥ إذا كان الشكل أ ب جـ ء رباعيًا دائريًا، ق ($\angle$ أ) : ق($\angle$ جـ) = ١ : ٤ فإن: ق ($\angle$ أ) = ...°

(أ) ٣٦ (ب) ٧٢ (جـ) ١٠٨ (د) ١٤٤

٦ إذا كان أ ب جـ ء رباعيًا دائريًا فإن: ق ($\angle$ أ) + ق($\angle$ جـ) − ٩٠° = ...° (جنوب سيناء ٢٠١٩)

(أ) ١٨٠ (ب) ١٠٠ (جـ) ٩٠ (د) ١٢٠

٧ إذا كان الشكل س ص ع ل رباعيًا دائريًا، فإن: ق ($\angle$ س) + ق($\angle$ ع) − ١٣٠° = ...°

(أ) ١٨٠° (ب) ١٣٠° (جـ) ٦٥° (د) ٥٠°

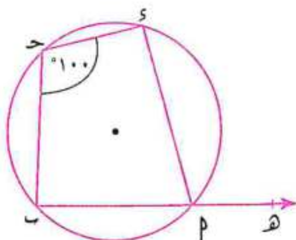
٨ فى الشكل المقابل: (السويس ٢٠١٩)

هـ $\in$ $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، إذا كان ق ($\angle$ جـ) = ١٠٠°،

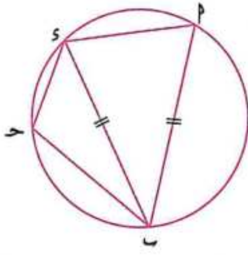
فإن: ق ($\angle$ ء أ هـ) = ...°

(أ) ٨٠ (ب) ٦٠

(جـ) ١٠٠ (د) ٢٠٠



٩ في الشكل المقابل: (الأقصر ٢٠١٩)



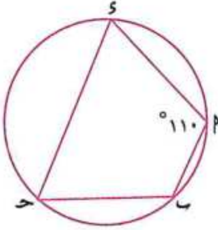
إذا كان ء ب = ب ء ، ق (∠ ء ب ء) = ٣٦° ،

فإن ق (∠ حـ) = ... °

(أ) ١٤٠ (ب) ١٠٨

(جـ) ٧٠ (د) ٥٤

١٠ في الشكل المقابل: (السويس ٢٠١٨)

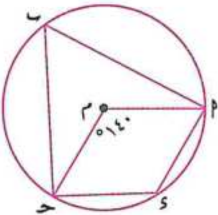


إذا كان ق(∠ ء) = ١١٠°، فإن ق(∠ حـ) = ...

(أ) ١١٠° (ب) ٧٠°

(جـ) ٥٥° (د) ١٨٠°

١١ في الشكل المقابل: (الفيوم ٢٠١٧)

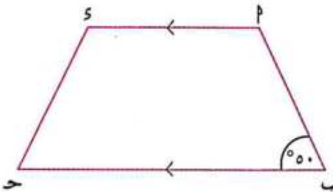


إذا كان ق(∠ حـ م ء) = ١٤٠°، فإن ق(∠ ء ء حـ) = ...

(أ) ٤٠° (ب) ٧٠°

(جـ) ١١٠° (د) ١٤٠°

١٢ في الشكل المقابل:



ء ب حـ ء رباعي دائري

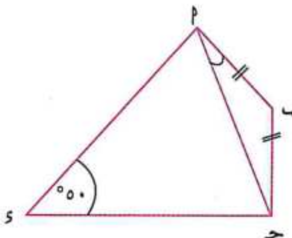
إذا كان $\overline{ء ء}$ // $\overline{ب حـ}$ ، ق(∠ ب) = ٥٠°

فإن ق(∠ حـ) = ...

(أ) ٢٥° (ب) ٥٠°

(جـ) ١٠٠° (د) ١٣٠°

١٣ في الشكل المقابل:



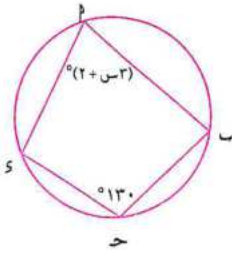
إذا كان ء ب حـ ء رباعيًا دائريًا، ق (∠ ء) = ٥٠° ،

ب ء = ب حـ، فإن ق (∠ ب ء حـ) = ...

(أ) ٢٥° (ب) ٥٠°

(جـ) ١٠٠° (د) ١٣٠°

١٤ فى الشكل المقابل:



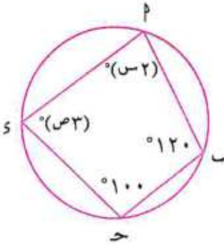
و(∠ٲ) = (٣س + ٢)° ، و(∠ حـ) = ١٣٠°

فإن: س = ...

(أ) ١٦ (ب) ٥٠

(جـ) ٥٢ (د) ٦٥

١٥ فى الشكل المقابل:

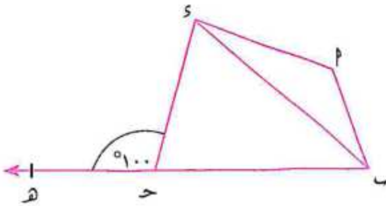


(س ، ص) = ...

(أ) (٢٠، ٤٠) (ب) (٤٠، ٢٠)

(جـ) (٤٠، ٥٠) (د) (٥٠، ٤٠)

١٦ فى الشكل المقابل:



إذا كان ٲ ب حـ ء شكلًا رباعيًا دائريًّا

و(∠ ء حـ هـ) = ١٠٠°

، و(∠ ٲ ء ب) : و(∠ ٲ ب ء) = ٢ : ٣

فإن: و(∠ ٲ ب ء) = ...

(أ) ٣٢° (ب) ٤٨°

(جـ) ٨٠° (د) ٥٠°

---

٢ أكمل كلًّا مما يأتى:

١ فى الشكل الرباعى الدائرى، كل زاويتين متقابلتين ....

٢ فى الشكل الرباعى الدائرى، قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس من رءوسه ....

٣ إذا كان ٲ ب حـ ء شكلًا رباعيًّا دائريًّا وكان و(∠ ٲ) = ٩٠° فإن: و(∠ حـ) = ...

٤ إذا كان ٲ ب حـ ء شكلًا رباعيًّا دائريًّا وكان قياس الزاوية الخارجة عند ب يساوى ٨٠°

فإن: و(∠ ء) = ...

٥ إذا كان ٲ ب حـ ء شكلًا رباعيًّا دائريًّا وكان و(∠ ٲ) = $\frac{١}{٣}$ و(∠ حـ) فإن: و(∠ حـ) = ...

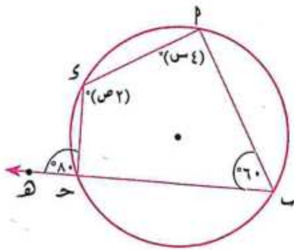
٦ في الشكل المقابل:

$\overleftarrow{بحـ}$ ∋ هـ ، أ ب حـ ء رباعى دائرى

إذا كان ق(∠ ب) = ٦٠° ، ق(∠ ء حـ هـ) = ٨٠°

، ق(∠ أ) = (٤ س)° ، ق(∠ ء) = (٢ ص)°

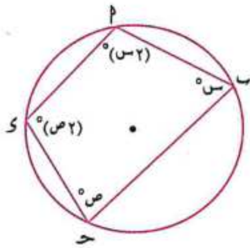
فإن: س = ... ، ص = ...



٧ في الشكل المقابل:

إذا كان أ ب حـ ء شكلًا رباعيًا دائريًا

فإن : س = ... ، ص = ...



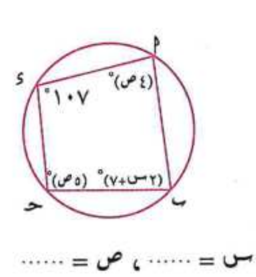
٨ إذا كان س ص ع ل شكلًا رباعيًا دائريًا بحيث:

ق(∠ س) = ٢ ق(∠ ص) = ٥ ق(∠ ع)، فإن: ق(∠ ل) = ...

---

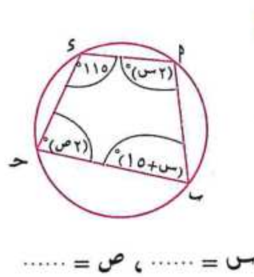
٣ في كل من الأشكال الآتية، أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس:

١



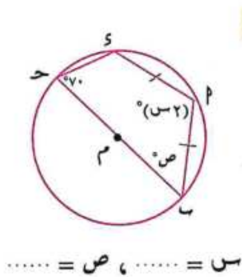
س = ... ، ص = ...

٢



س = ... ، ص = ...

٣



س = ... ، ص = ...

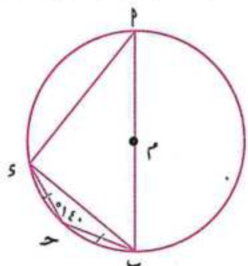
---

٤ في الشكل المقابل:

أ ب حـ ء شكل رباعى مرسوم داخل الدائرة م ،

م ∈ $\overline{أب}$ ، حـ ب = حـ ء ، ق(∠ ب حـ ء) = ١٤٠° أوجد:

١ ق(∠ أ) ٢ ق(∠ أ ء حـ)

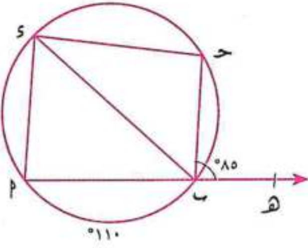


---

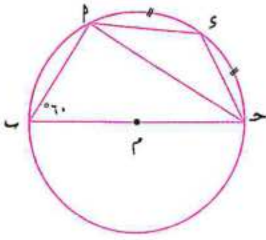
٥ في الشكل المقابل: (أسيوط ٢٠٢٣)

هـ ∈ $\overleftarrow{أب}$ ، هـ ∉ $\overline{أب}$ ، ق($\overset{\frown}{أب}$) = ١١٠° ،

ق(∠ حـ ب هـ) = ٨٥° أوجد: ق(∠ ب ء حـ)



٦ في الشكل المقابل:



ٮ ب حـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة

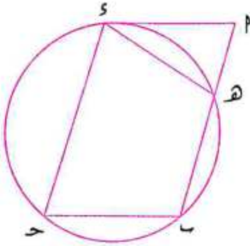
، $\overline{\text{حـ ب}}$ قطر في الدائرة م ، ق(∠ ٮ ب حـ) = ٦٠° ،

طول (ٮ ء) = طول (حـ ء) أوجد: ق (∠ ب حـ ء)

ثم أثبت أن: $\overrightarrow{\text{حـ ٮ}}$ ينصف (∠ ب حـ ء)

---

٧ في الشكل المقابل:



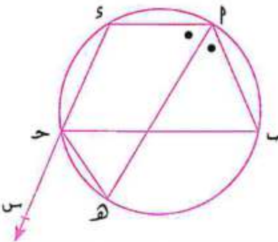
ٮ ب حـ ء متوازي أضلاع تقع رءوسه ب ، حـ ، ء على دائرة واحدة ،

$\overline{\text{ٮ ب}}$ يقطع الدائرة في هـ

أثبت أن: ءٮ = ءهـ

---

٨ في الشكل المقابل:



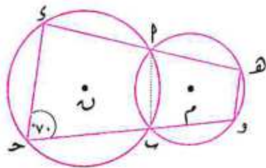
ٮ ب حـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة

، $\overrightarrow{\text{ٮ هـ}}$ ينصف ∠ ب ٮ ء ويقطع الدائرة في هـ ، س ∈ $\overleftarrow{\text{ء حـ}}$

أثبت أن: $\overrightarrow{\text{حـ هـ}}$ ينصف (∠ س حـ ب)

---

٩ في الشكل المقابل:



م ، ں دائرتان متقاطعتان في ٮ ، ب ، رُسم $\overleftrightarrow{\text{ٮ ء}}$ يقطع الدائرة م

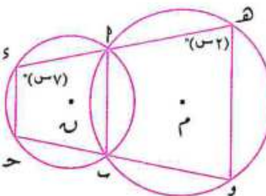
في هـ والدائرة ں في ء ، رسم $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ يقطع الدائرة م في و

والدائرة ں في حـ ، ق (∠ حـ) = ٧٠°

١ أوجد: ق (∠ و) ٢ أثبت أن: $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$

---

١٠ في الشكل المقابل: (الدقهلية ٢٠٢٣)



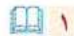
الدائرتان م ، ں متقاطعتان في ٮ ، ب

ٮ ∈ $\overline{\text{هـ ء}}$ ، ب ∈ $\overline{\text{و حـ}}$ ، ق(∠ ء) = (٧س)° ،

ق(∠ هـ) = (٢س)° أوجد قيمة: س

ثانيًا عكس نظرية (٣) والنتيجة

١١ في كل من الأشكال الآتيـة، أثبت أن الشكل $أ ب ح ء$ رباعي دائري:







(أسوان ٢٠٢٤)



(بنى سويف ٢٠٢٣)



(المنيا ٢٠١٨)



---

١٢ في الشكل المقابل:



أثبت أن:

الشكل $أ ب ح ء$ رباعي دائري

---

١٣ في الشكل المقابل:

$\overleftarrow{ءح}$ ، $\overline{ءأ}$ يمسان الدائرة م عند ح، أ على الترتيب

، $\overline{أب}$ قطر فيها، $\overleftarrow{ءح} \cap \overleftarrow{أب} = \{هـ\}$، $ق(\angle ء) = ٤٥°$ **أثبت أن:**

١ الشكل $أ م ح ء$ رباعي دائري

٢ Δ ح م هـ متساوي الساقين

---

١٤ في الشكل المقابل:

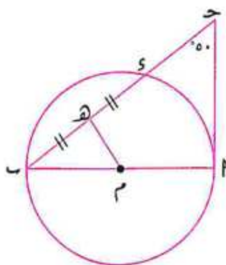


$\overline{أء}$ قطر في دائرة مركزها م ، $\overline{حء}$ ، $\overline{حب}$

قطعتان مماستان للدائرة عند النقطتين أ ، ب على الترتيب

أثبت أن: $ق(\angle ء م ب) = ق(\angle أ ح ب)$

١٥ في الشكل المقابل: (كفر الشيخ ٢٠٢٣)



$\overline{أب}$ قطر في الدائرة م ،

$\overline{حـأ}$ قطعة مماسة للدائرة عند أ

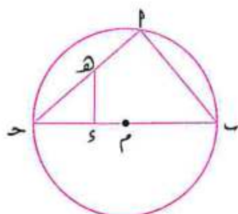
، هـ منتصف $\overline{ءب}$ ، ق($\angle$ حـ) = ٥٠°

أثبت أن الشكل أ م هـ حـ رباعي دائري

وأوجد ق($\angle$ أ م هـ)

---

١٦ في الشكل المقابل: (الغربية ٢٠٢٤)



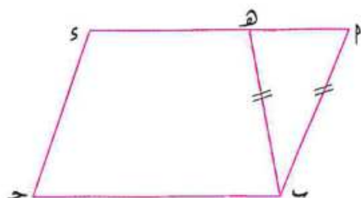
$\overline{بحـ}$ قطر في الدائرة م ، $\overline{هـء} \perp \overline{بحـ}$ أثبت أن:

١ الشكل أ ب ء هـ رباعي دائري

٢ ق($\angle$ حـ هـ ء) = $\frac{1}{2}$ ق($\overset{\frown}{أحـ}$)

---

١٧ في الشكل المقابل: (قنا ٢٠٢٣)



أ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه أ ب = ب هـ ،

أثبت أن: الشكل ب هـ ء حـ رباعي دائري

---

١٨ في الشكل المقابل:

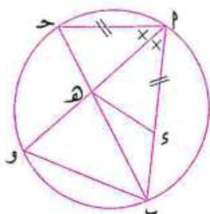


$\overline{أء} \parallel \overline{بحـ}$ ، الشكل أ س ص ء رباعي دائري

أثبت أن: الشكل س ب حـ ص رباعي دائري

---

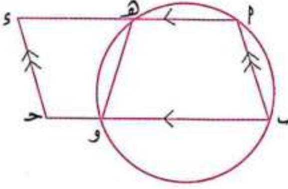
١٩ في الشكل المقابل: (الجيزة ٢٠٢٣)



أ ء = أ حـ، $\overrightarrow{أهـ}$ ينصف ($\angle$ ب أ حـ)

أثبت أن: الشكل ء ب و هـ رباعي دائري

٢٠ في الشكل المقابل: (الأقصر ٢٠١٩)

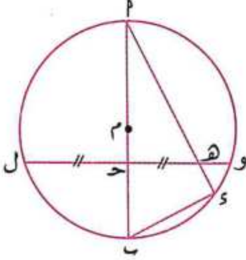


أ ب حـ ء متوازي أضلاع

أثبت أن: الشكل هـ ء حـ و رباعي دائري

---

٢١ في الشكل المقابل: (الشرقية ٢٠٢٣)

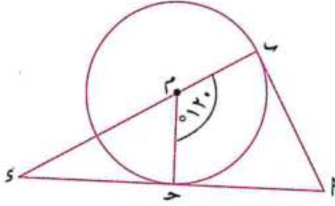


دائرة مركزها م ، $\overline{أب}$ قطر فيها، حـ منتصف $\overline{ول}$

برهن أن: الشكل هـ ء ب حـ رباعي دائري

---

٢٢ في الشكل المقابل:



$\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ تمسان الدائرة م عند ب ، حـ على الترتيب

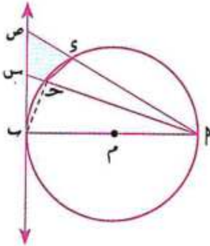
، ق(∠ ب م حـ) = ١٢٠° أثبت أن:

١ الشكل أ ب م حـ رباعي دائري

٢ م حـ = $\frac{١}{٢}$ م ء

---

٢٣ في الشكل المقابل:



$\overline{أب}$ قطر في الدائرة م ، $\overline{أحـ}$ ، $\overline{أء}$ وتران فيها

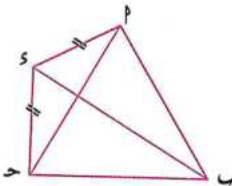
وفي جهة واحدة من $\overline{أب}$ ، رسم من ب مماس للدائرة

قطع $\overleftarrow{أحـ}$ في س ، $\overleftarrow{أء}$ في ص

أثبت أن: الشكل س ص ء حـ رباعي دائري، (إرشاد: صل $\overline{ب حـ}$)

---

٢٤ في الشكل المقابل:

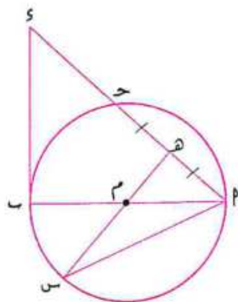


أ ب حـ مثلث له ثلاثة محاور تماثل

والشكل أ ب حـ ء رباعي دائري، أ ء = حـ ء

أثبت أن: $\overline{ب ء}$ هو قطر الدائرة المارة برءوس △ أ ب ء

٢٥ في الشكل المقابل:



أ ب قطر فى الدائرة م، هـ منتصف أ حـ، ب ء مماس للدائرة عند ب،

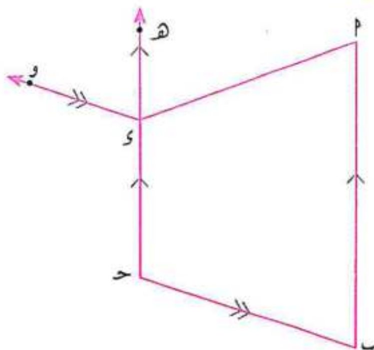
هـ م يقطع الدائرة فى س برهن أن:

١ الشكل هـ م ب ء رباعى دائرى

٢ ق (∠ ب أ س) = $\frac{1}{2}$ ق (∠ ء)

تفكير إبداعي TIMSS

٢٦ **فى الشكل المقابل:**

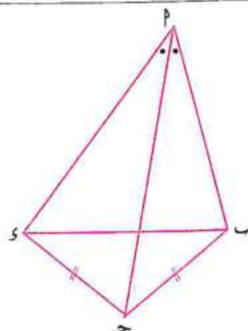


إذا كان أ ب // ء هـ ، ب حـ // ء و

ق(∠ أ ء هـ) + ق(∠ حـ ء و) = ١٨٠°

فأثبت أن: الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى

٢٧ **فى الشكل المقابل:**



أ ء > أ ب، ب حـ = حـ ء

، أ حـ ينصف ∠ أ

أثبت أن: الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى

٢٨ أ ب حـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة ، و ∈ أ ب ، رسم و هـ // ب حـ حيث

و هـ ∩ حـ ء = {هـ} ، ء و ∩ حـ ب = {س} **أثبت أن:**

١ الشكل أ و هـ ء رباعى دائرى ٢ ق(∠ ب س و) = ق(∠ هـ أ ء)

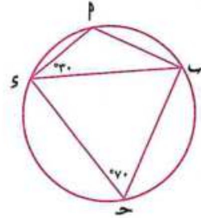
٢٩ س ص ع مثلث متساوى الساقين فيه س ص = س ع ، أ ∈ س ص ، ب ∈ س ع

حيث س أ = س ب **أثبت أن:** الشكل أ ب ع ص رباعى دائرى.

تدريبات الكتاب المدرسى

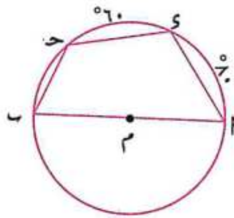
١ مستعينًا بمعطيات الشَّكل ، أوجد بالبرهان كلًّا مما يأتى:

(أ)



ق(∠ أ ب ء)

(ب)



ق(∠ أ)

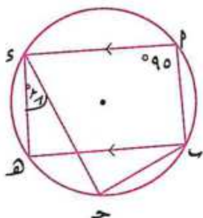
(كفر الشيخ ٢٠٢٣)

(جـ)

قياسات زوايا الشكل

أ ب حـ ء

(د)

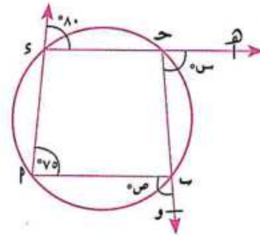


قياسات زوايا الشكل

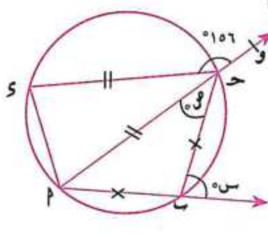
أ ب حـ ء

٢ فى كل من الأشكال الآتية، أوجد قيمة الرمز المستخدم فى القياس:

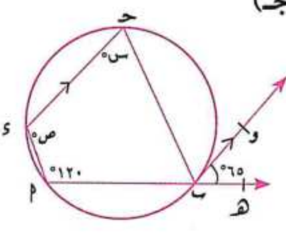
(أ)



(ب)

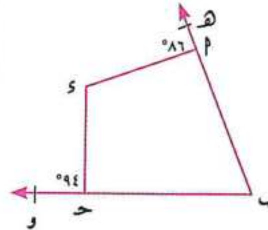


(جـ)

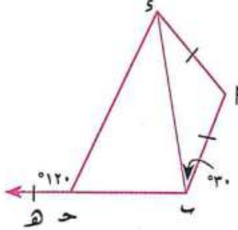


٣ فى كل من الأشكال الآتية أثبت أن الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى:

(أ)

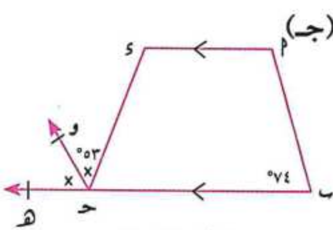


(ب)



(الإسكندرية ٢٠٢٣)

(جـ)

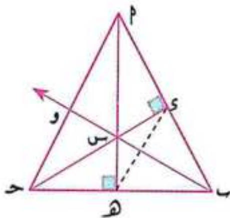


(الأقصر ٢٠٢٣)

٤ فى الشكل المقابل:

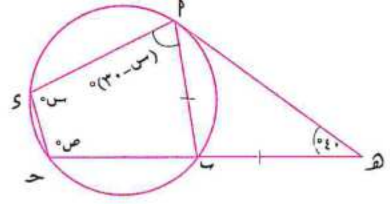
أثبت أن: القطع المستقيمة العمودية على أضلاع المثلث من الرءوس المقابلة تتقاطع فى نقطة واحدة.

ما عدد الأشكال الرباعية الدائرية فى الشكل المقابل؟ وما هى؟

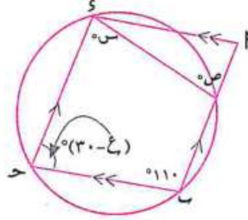


٥ في كلٍّ من الأشكال الآتية أوجد قيمة الرمز المستخدم في القياس:

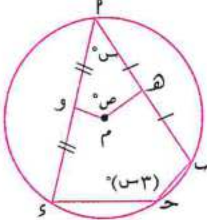
(أ)



(ب)

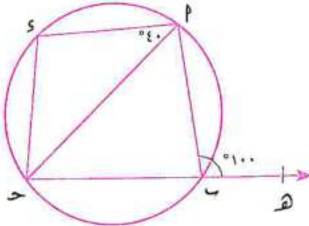


(جـ)



---

٦ في الشكل المقابل: (سوهاج ٢٠٢٤)

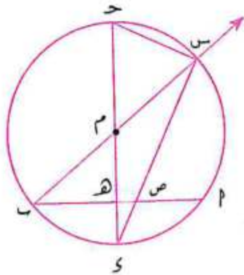


ق(∠ أ ب هـ) = ١٠٠°، ق(∠ جـ أ د) = ٤٠°

أثبت أن: ق(⌒جـ د) = ق(⌒أ د)

---

٧ في الشكل المقابل: (الوادي الجديد ٢٠٢٣)



أب وتر في الدائرة م، جـ د قطر عمودي على أب ويقطعه في هـ،

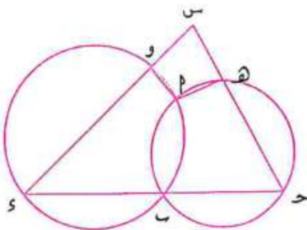
ب م يقطع الدائرة في س، س د ∩ أ ب = {ص} أثبت أن:

أولًا: الشكل س ص هـ جـ رباعي دائري

ثانيًا: ق(∠ د ص ب) = ق(∠ د ب س)

---

٨ في الشكل المقابل:



دائرتان متقاطعتان في أ، ب، جـ د يمرُّ بالنقطة ب

ويقطع الدائرتين في جـ، د، جـ هـ ∩ د و = {س}

أثبت أن: الشكل أ و س هـ رباعي دائري

---

٩ أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة، فيه أ ب > أ جـ، د ∈ أ ب بحيث أ جـ = أ د،

أ هـ ينصف ∠ أ ويقطع ب جـ في هـ ويقطع الدائرة في و

أثبت أن: الشكل ب د هـ و رباعي دائري

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان: الشكل ٢ ب حـ ء رباعيًا دائريًا، فإن: ق(∠ ٢) + ق(∠ حـ) + ٥٠° = ...

(أ) ١٣٠° (ب) ٨٠° (جـ) ٢٣٠° (د) ١٨٠°

٢ فى الشكل المقابل: (سوهاج ٢٠٢٢)

ق(∠ ب ٢ ء) = ٥٠°، فإن ق(∠ ب حـ ء) = ...

(أ) ٥٠° (ب) ١٣٠°

(جـ) ٢٦٠° (د) ٦٥°

٣ فى الشكل المقابل: (سوهاج ٢٠١٩)

إذا كان ق(⌒ب حـ) = ٨٠° فإن: ق(⌒ء هـ) = ...

(أ) ١٦٠° (ب) ١٠٠°

(جـ) ٨٠° (د) ٤٠°

٤ فى الشكل المقابل: دائرة مركزها م ، (بورسعيد ٢٠٢٢)

فإذا كان ق(∠ م ب حـ) = ٣٢° ، فإن ق(⌒ب حـ) = ...°

(أ) ١١٦ (ب) ٣٢

(جـ) ٥٨ (د) ٦٤

---

٢ ١ فى الشكل المقابل: (الدقهلية ٢٠٢٢)

٢ ب حـ ء شكل رباعى، ٢س⃖، ب ص⃖، حـ ع⃖، ء ل⃖ منصفات

∠ ٢ ، ∠ ب، ∠ حـ، ∠ ء على الترتيب

أثبت أن: الشكل س ص ع ل رباعى دائرى

٢ فى الشكل المقابل: (المنوفية ٢٠٢٢)

٢ ب حـ ء شكل رباعى فيه ٢ ب = ٢ ء

ق(∠ ٢ ب ء) = ٣٠°، ق(∠ حـ) = ٦٠°

أثبت أن: الشكل ٢ ب حـ ء رباعى دائرى

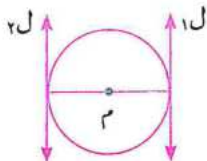


ذاكر | الدرس ٦

العلاقة بين مماسات الدائرة

فيديو الشرح

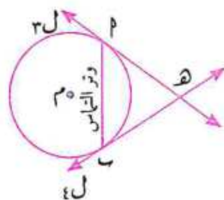
فكر وناقش في الشكل المقابل:



- **إذا كان :** $\overline{أب}$ قطرًا في الدائرة م ، ل١ ، ل٢ مماسين عند أ ، ب على الترتيب

فإن : ل١ // ل٢

∴ المماسان المرسومان من نهايتي قطر في الدائرة يكونان **متوازيين**



- **إذا كان :** $\overline{أب}$ وترًا في الدائرة م ، ل٣ ، ل٤ مماسان عند أ ، ب على الترتيب

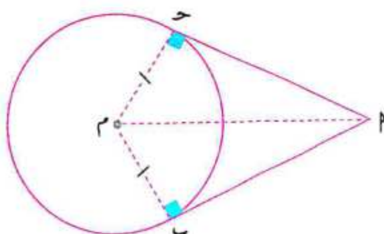
فإن : ل٣ ، ل٤ يتقاطعان في النقطة هـ

∴ المماسان المرسومان من نهايتي وتر لا يمر بالمركز يكونان **متقاطعين**

أولًا نظرية (٤) ونتائجها:

نظرية (٤)

القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة متساويتان في الطول.



المعطيات : أ نقطة خارج الدائرة م ، $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ قطعتان مماستان للدائرة عند ب ، حـ

المطلوب : **إثبات أن:** أب = أحـ

العمل : نرسم $\overline{مب}$ ، $\overline{محـ}$ ، $\overline{مأ}$

البرهان : ∵ $\overline{أب}$ قطعة مماسة للدائرة م ، $\overline{مب}$ نصف قطر ∴ ق(∠أ ب م) = ٩٠°

∵ $\overline{أحـ}$ قطعة مماسة للدائرة م ، $\overline{محـ}$ نصف قطر ∴ ق(∠أ حـ م) = ٩٠°

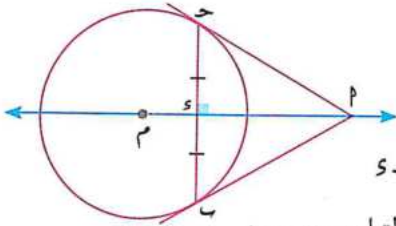
∴ المثلثان أ ب م ، أ حـ م

فيهما
- ق(∠ب) = ق(∠حـ) = ٩٠° ——— (إثباتًا)
- م ب = م حـ ——— (طولا نصفي قطرين)
- $\overline{أم}$ ——— (ضلع مشترك)

∴ △ أ ب م ≡ △ أ حـ م وينتج أن أ ب = أ حـ (وهو المطلوب)

نتيجـة ١

المستقيم المارُّ بمركز الدائرة ونقطة تقاطع مماسين لها يكون محورًا لوتر التماس لهذين المماسين.



فمثلًا: فى الشكل المقابل:

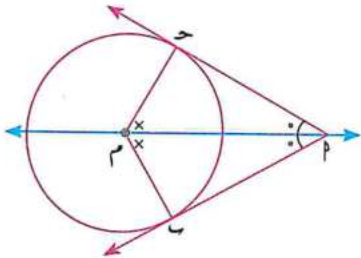
إذا كان: $\overline{\text{ب ب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ قطعتين مماستين للدائرة م عند ب ، حـ

فــإن : ب م محور $\overline{\text{ب حـ}}$ أى أن : $\overleftrightarrow{\text{ب م}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$ ، ب ء = حـ ء

ملاحظـة: $\overline{\text{حـ ب}}$ يسمى وتر التماس فى الدائرة لأنه واصل بين نقطتى التماس حـ ، ب

نتيجـة ٢

المسـتقيم المارُّ بمركز الدائرة ونقطة تقاطع مماسـين لها ينصـف الزاوية بين هذين المماسـين، كمـا ينصـف الزاويـة بين نصفـى القطريـن الماريـن بنقطتـى التماس.



فمثلًا: فى الشكل المقابل:

إذا كان: $\overleftarrow{\text{ب ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ مماسين للدائرة م عند ب ، حـ

فــإن : ١ $\overleftrightarrow{\text{ب م}}$ ينصف ∠ ب ب حـ

∴ ق(∠ ب ب م) = ق(∠ حـ ب م)

٢ $\overleftrightarrow{\text{ب م}}$ ينصف ∠ ب م حـ

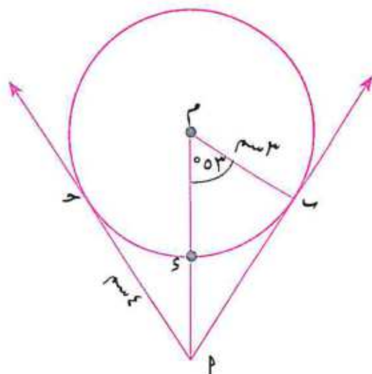
∴ ق(∠ ب م ب) = ق(∠ ب م حـ)

نقاط هامة

فى الشكل المقابل: إذا كانت: $\overline{\text{ب ب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ قطعتين مماستين للدائرة م عند ب ، حـ فــإن:

- م ب = م حـ = نق
- ب ب = ب حـ قطعتان مماستان من نفس النقطة
- ب ء = حـ ء ، $\overline{\text{ب م}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$ (أى أن: $\overleftrightarrow{\text{ب م}}$ محور تماثل $\overline{\text{ب حـ}}$)
- ق (∠ ب ب م) = ق (∠ ب حـ م) = ٩٠°
- الشكل ب ب م حـ رباعى دائرى
- ق (∠ ب ب م) = ق (∠ ب حـ م) = ق (∠ حـ ب م) = ق (∠ حـ ب م)
- ق (∠ ب م ب) = ق (∠ ب حـ ب) = ق (∠ ب م حـ) = ق (∠ ب ب حـ)

مثـال ١



فى الشكل المقابل: م دائرة طول نصف قطرها ٣سم

$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ مماسان للدائرة عند ب ، حـ ،

و (∠ ب م أ) = ٥٣° ، أ حـ = ٤سم أوجـد:

١ و (∠ ب أ حـ) ٢ طول $\overline{أء}$

الحـل

١ ∵ $\overleftrightarrow{أب}$ مماس ، $\overline{مب}$ نصف قطر

∴ و (∠ م ب أ) = ٩٠°

فى △ أ ب م

∵ و (∠ م أ ب) = ٩٠° − ٥٣° = ٣٧°

، ∵ $\overrightarrow{أم}$ ينصف ∠ ب أ حـ

∴ و (∠ ب أ حـ) = ٢ × ٣٧° = ٧٤°

٢ ∵ $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ مماسان للدائرة عند ب ، حـ

∴ أ ب = أ حـ = ٤سم

، ∵ و (∠ م ب أ) = ٩٠°

فى △ أ ب م

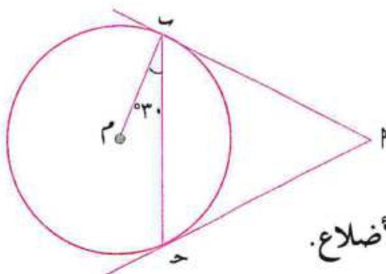
∴ أ م = $\sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢}$ = ٥سم ،

∵ م ء = م ب = نق = ٣سم

∴ أ ء = ٥ − ٣ = ٢سم

سؤال ١

١ فى الشكل المقابل:

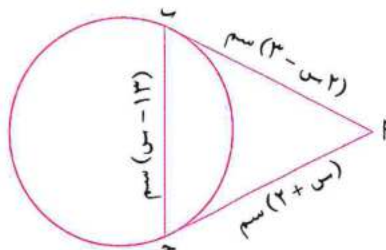


$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ مماسان للدائرة عند ب ، حـ ،

و (∠ م ب حـ) = ٣٠°

أوجد: و (∠ أ) ، ثم أثبت أن المثلث أ ب حـ متساوى الأضلاع.

٢ فى الشكل المقابل: (الدقهلية ٢٠٢١)



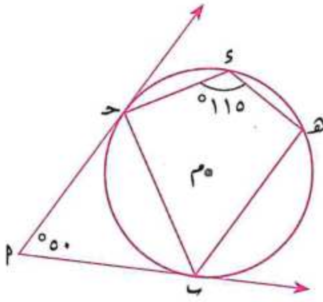
$\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ قطعتان مماستان للدائرة ،

أ ب = (٢س − ٣) سم ، أ حـ = (س + ٢) سم ،

ب حـ = (١٣ − س) سم أوجـد:

(أ) قيمة س (ب) محيط △ أ ب حـ

مثال ٢



في الشكل المقابل:

$\overleftrightarrow{ٮ}$ ، $\overleftrightarrow{ٮحـ}$ مماسان للدائرة م عند ٮ ، حـ

ق(∠ٮ) = ٥٠° ، ق(∠ء) = ١١٥° أثبت أن:

١ $\overleftrightarrow{ٮحـ}$ ينصف (∠هـ ٮ ٮ) ٢ $\overleftrightarrow{ٮهـ}$ // $\overleftrightarrow{ٮحـ}$

الحل

المعطيات : $\overleftrightarrow{ٮ ٮ}$ ، $\overleftrightarrow{ٮ حـ}$ مماسان للدائرة ، ق(∠ٮ) = ٥٠° ، ق(∠ء) = ١١٥°

المطلوب : ١ $\overleftrightarrow{ٮحـ}$ ينصف (∠هـ ٮ ٮ) ٢ $\overleftrightarrow{ٮهـ}$ // $\overleftrightarrow{ٮحـ}$

البرهان : ∵ $\overline{ٮ ٮ}$ ، $\overline{ٮ حـ}$ قطعتان مماستان للدائرة عند ٮ، حـ

∴ ٮ ٮ = ٮ حـ ⟸ (نظرية)

∴ ق(∠ٮ ٮ حـ) = ق(∠ٮ حـ ٮ) = $\frac{١٨٠° - ٥٠°}{٢}$ = ٦٥°

∵ الشكل هـ ٮ حـ ء رباعي دائري

∴ ق(∠هـ ٮ حـ) = ١٨٠° - ١١٥° = ٦٥°

∴ ق(∠ٮ ٮ حـ) = ق(∠هـ ٮ حـ) = ٦٥°

∴ $\overleftrightarrow{ٮحـ}$ ينصف (∠هـ ٮ ٮ) (المطلوب ١)

∵ ق(∠هـ ٮ حـ) = ق(∠ٮ حـ ٮ) = ٦٥° ⟸ (وهما في وضع تبادل)

∴ $\overleftrightarrow{ٮهـ}$ // $\overleftrightarrow{ٮحـ}$ (المطلوب ٢)

سؤال ٢

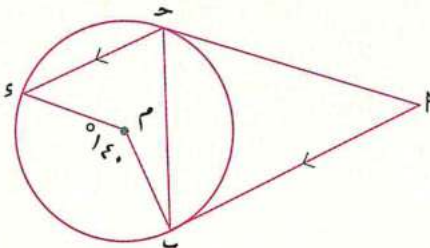
في الشكل المقابل: (دمياط ٢٠٢٣)

$\overline{ٮ ٮ}$ ، $\overline{ٮ حـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م عند ٮ ، حـ

، $\overline{ٮ ٮ}$ // $\overline{حـ ء}$

١ أوجد: ق(∠ٮ)

٢ أثبت أن: $\overleftrightarrow{حـٮ}$ ينصف (∠ٮ حـ ء)



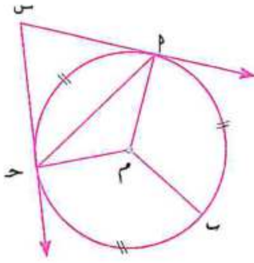
مثال ٣

في الشكل المقابل:

$و(\overset{\frown}{أب}) = و(\overset{\frown}{أجـ}) = و(\overset{\frown}{بجـ})$

، $\overleftarrow{سأ}$ ، $\overleftarrow{سجـ}$ مماسان للدائرة م عند أ ، جـ

أثبت أن: △ س أ جـ متساوى الأضلاع



الحل

المعطيات : $و(\overset{\frown}{أب}) = و(\overset{\frown}{أجـ}) = و(\overset{\frown}{بجـ})$

، $\overleftarrow{سأ}$ ، $\overleftarrow{سجـ}$ مماسان للدائرة عند أ، جـ

المطلوب : إثبات أن: △ س أ جـ متساوى الأضلاع

البرهان : ∵ $و(\overset{\frown}{أب}) = و(\overset{\frown}{بجـ}) = و(\overset{\frown}{أجـ})$ ، قياس الدائرة = ٣٦٠°

∴ $و(\overset{\frown}{أب}) = و(\overset{\frown}{بجـ}) = و(\overset{\frown}{أجـ}) = \frac{٣٦٠°}{٣} = ١٢٠°$

∴ و(∠ أ م ب) = و(∠ أ م جـ) = و(∠ ب م جـ) = ١٢٠°

∵ $\overleftarrow{سأ}$ ، $\overleftarrow{سجـ}$ مماسان للدائرة م ، $\overline{مأ}$ ، $\overline{مجـ}$ نصفا قطرين

∴ $\overleftarrow{سأ} \perp \overline{أم}$ ، $\overleftarrow{سجـ} \perp \overline{جـم}$

∴ و(∠ س أ م) = و(∠ س جـ م) = ٩٠°

∴ الشكل أ س جـ م رباعى دائرى

∴ و(∠ س) = ١٨٠° − ١٢٠° = ٦٠° ———— (زاويتان متقابلتان متكاملتان)

∵ $\overline{سأ}$ ، $\overline{سجـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م ∴ س أ = س جـ

∵ و(∠ س) = ٦٠° ∴ △ س أ جـ متساوى الأضلاع (وهو المطلوب)

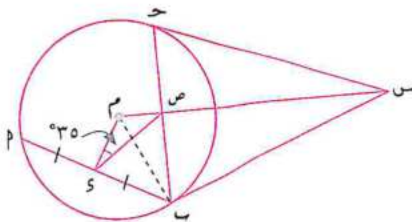
سؤال ٣

في الشكل المقابل: (أسيوط ٢٠٢٤)

$\overline{سب}$ ، $\overline{سجـ}$ قطعتان مماستان للدائرة عند ب ، جـ

، ء منتصف $\overline{بأ}$ ، و(∠ ص ء م) = ٣٥°

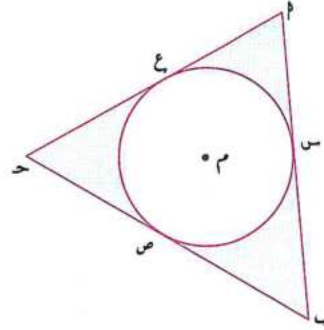
، $\overline{سم} \cap \overline{بجـ} = \{ص\}$ أثبت أن:



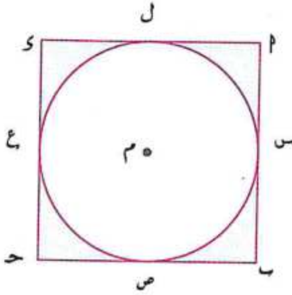
❶ الشكل ب ص م ء رباعى دائرى ❷ و(∠ م ء ص) = $\frac{١}{٢}$ و(∠ ب س جـ)

ثانيًا الدائرة الداخلة لمضلع:

الدائرة الداخلة لمضلع هى الدائرة التى تمس جميع أضلاع المضلع من الداخل.



م الدائرة الداخلة للمثلث ﻫ ﺏ ﺣ

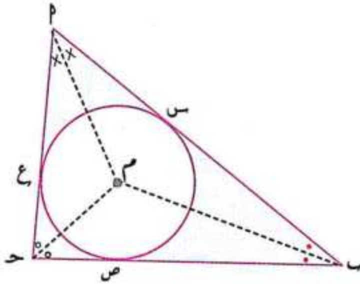


م الدائرة الداخلة للمضلع ﻫ ﺏ ﺣ ء

نقاط هامة

مركز الدائرة الداخلة لأى مثلث هو نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة.

فمثلًا: فى الشكل المقابل:



إذا كانت : م هى مركز الدائرة الداخلة للمثلث ﻫ ﺏ ﺣ

فـإن : $\overline{ﻫس}$ ، $\overline{ﻫع}$ قطعتان مماستان للدائرة م

فـيكون : $\overleftarrow{ﻫم}$ ينصف $\angle$ ﻫ

وبالمثـل : $\overline{ﺏس}$ ، $\overline{ﺏص}$ قطعتان مماستان للدائرة

فـيكون : $\overleftarrow{ﺏم}$ ينصف $\angle$ ﺏ

وبالمثـل : $\overleftarrow{ﺣم}$ ينصف $\angle$ ﺣ

$\therefore$ $\overleftarrow{ﻫم}$ ، $\overleftarrow{ﺏم}$ ، $\overleftarrow{ﺣم}$ ثلاثـة منصفات للزوايا الداخلة للمثلث ﻫ ﺏ ﺣ تتقاطع جميعًا فى مركز الدائرة

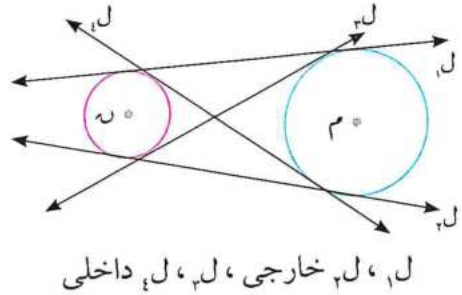
$\therefore$ م هى نقطة تقاطع منصفات زوايا المثلث ﻫ ﺏ ﺣ الداخلة.

- يُقال للمماس المشترك لدائرتين بأنه **مماس مشترك داخلى** إذا كانت الدائرتان تقعان فى جهتين مختلفتين منه.
- يُقال للمماس المشترك لدائرتين بأنه **مماس مشترك خارجى** إذا كانت الدائرتان تقعان فى جهة واحدة منه.

والجدول التالى يوضح المماسات المشتركة وعددها لدائرتين فى أوضاعهما المختلفة:

الدائرتان متباعدتان

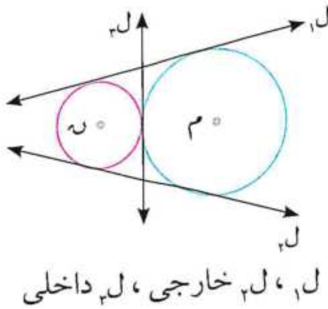
عدد المماسات المشتركة = ٤ **(مماسات مشتركة)**



ل١ ، ل٢ خارجى ، ل٣ ، ل٤ داخلى

الدائرتان متماستان من الخارج

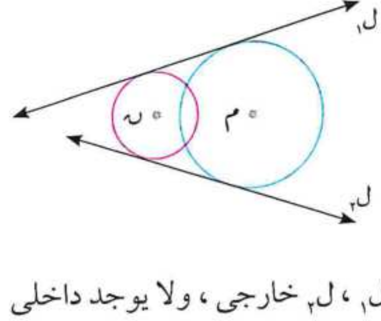
عدد المماسات المشتركة = ٣ **(مماسات مشتركة)**



ل١ ، ل٢ خارجى ، ل٣ داخلى

الدائرتان متقاطعتان

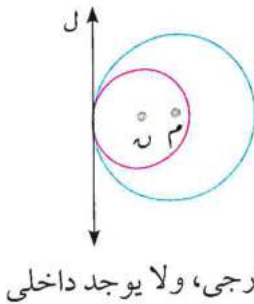
عدد المماسات المشتركة = ٢ **(مماسان مشتركان)**



ل١ ، ل٢ خارجى ، ولا يوجد داخلى

الدائرتان متماستان من الداخل

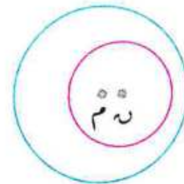
عدد المماسات المشتركة = ١ **(مماس واحد مشترك)**



ل خارجى، ولا يوجد داخلى

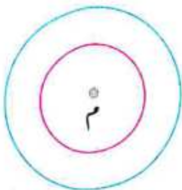
الدائرتان متداخلتان

عدد المماسات المشتركة = صفر **(لا توجد مماسات مشتركة)**

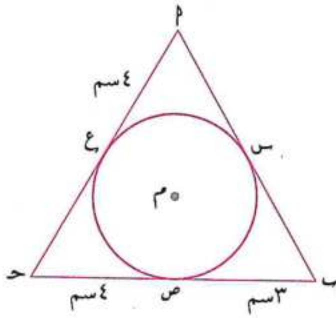


الدائرتان متداخلتان ومتحدتا المركز

عدد المماسات المشتركة = صفر **(لا توجد مماسات مشتركة)**



مثال ٤



في الشكل المقابل:

$\overleftrightarrow{اب}$ ، $\overleftrightarrow{بحـ}$ ، $\overleftrightarrow{احـ}$ مماسات للدائرة عند س، ص، ع على الترتيب ،

اع = ٤سم ، ب ص = ٣سم ، ص حـ = ٤سم

أوجد محيط △ا ب حـ

الحـل

المعطيـــات : $\overleftrightarrow{اب}$ ، $\overleftrightarrow{بحـ}$ ، $\overleftrightarrow{احـ}$ مماسات للدائرة عند س ، ص ، ع على الترتيب

اع = ٤سم ، ب ص = ٣ سم ، ص حـ = ٤سم

المطلـــوب : إيجاد محيـط △ا ب حـ

البرهـــــان : ∵ $\overline{اس}$ ، $\overline{اع}$ قطعتان مماستان للدائرة من نقطة ا

∴ اس = اع = ٤سم

∵ $\overline{بس}$ ، $\overline{بص}$ قطعتان مماستان للدائرة من نقطة ب

∴ ب س = ب ص = ٣سم

∵ $\overline{حـع}$ ، $\overline{حـص}$ قطعتان مماستان للدائرة من نقطة حـ

∴ حـ ع = حـ ص = ٤سم

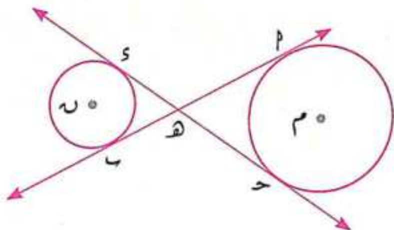
∴ ا ب = ٧سم ، ب حـ = ٧سم ، ا حـ = ٨ سم

∴ محيط △ا ب حـ = ٧ + ٧ + ٨ = ٢٢سم

سؤال ٤

في الشكل المقابل: (الغربية ٢٠٢٢)

أثبت أن: ا ب = حـ ء





تدريبات الأضــواء

أولاً نظرية (٤) ونتائجها

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ المماسان المرسومان من نهايتى قطر فى دائرة يكونان .... (بورسعيد ٢٠٢٣)

(ا) متوازيين (ب) متعامدين (جـ) متطابقين (د) متقاطعين

٢ المماسان المرسومان من نهايتى وتر فى دائرة (لا يمر بمركزها) يكونان .... (قنا ٢٠١٧)

(ا) متوازيين (ب) متعامدين (جـ) متطابقين (د) متقاطعين

٣ القطعتان المماستان المرسومتان لدائرة من نقطة خارج الدائرة .... (قنا ٢٠١٧)

(ا) متساويتان فى الطول (ب) غير متساويتين

(جـ) متعامدتان (د) متوازيتان

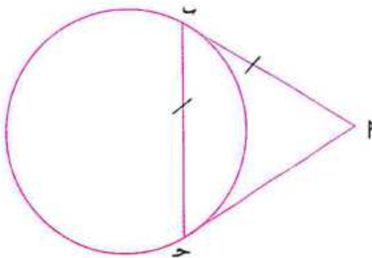
٤ $\overline{ا ب}$ قطر فى الدائرة م ، $\overleftrightarrow{ا حـ}$ ، $\overleftrightarrow{ب ء}$ مماسان للدائرة فإن $\overleftrightarrow{ا حـ}$ ...... $\overleftrightarrow{ب ء}$ (الإسكندرية ٢٠١٣)

(ا) يقطع (ب) يوازى (جـ) عمودى على (د) ينطبق على

٥ $\overline{ا ب}$ ، $\overline{ا حـ}$ قطعتان مماستان مرسومتان من نقطة خارج دائرة، فإن ا ب ...... ا حـ (الغربية ٢٠١٧)

(ا) $<$ (ب) $>$ (جـ) // (د) $=$

٦ فى الشكل المقابل:



$\overline{ا ب}$ ، $\overline{ا حـ}$ قطعتان مماستان للدائرة عند ب، حـ

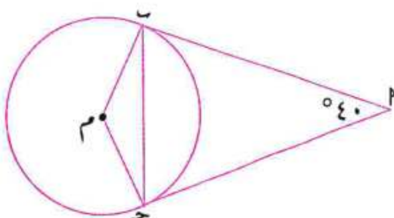
فإذا كان: ا ب = ب حـ

فإن: ق($\angle$ ا) = ...

(ا) $30°$ (ب) $45°$

(جـ) $60°$ (د) $75°$

٧ فى الشكل المقابل: (كفر الشيخ ٢٠٢٤)

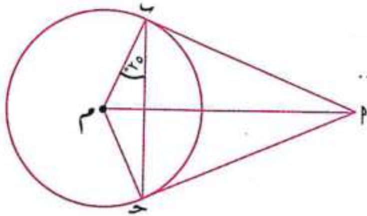


$\overline{ا ب}$ ، $\overline{ا حـ}$ قطعتان مماستان للدائرة عند ب، حـ

فإن: ق($\angle$ حـ ب م) = ...

(ا) $20°$ (ب) $40°$

(جـ) $80°$ (د) $140°$

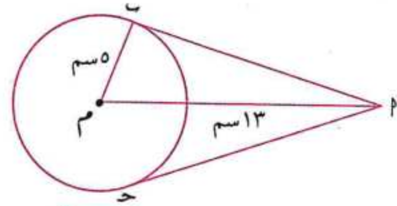


٨ فى الشكل المقابل: $\overline{ٵب}$ ، $\overline{ٵحـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م

إذا كان ق(∠ حـ ب م) = ٢٥° ، فإن ق(∠ ب ٵ حـ) = ...

(أ) ١٢,٥° (ب) ٢٥°

(جـ) ٥٠° (د) ٧٥°



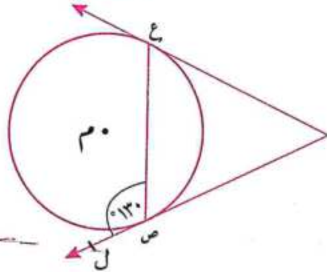
٩ فى الشكل المقابل: (سوهاج ٢٠١٤)

$\overline{ٵب}$ ، $\overline{ٵحـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م

إذا كان م ب = ٥سم، ٵ م = ١٣سم، فإن ٵ حـ = ... سم

(أ) ٥ (ب) ١٢

(جـ) ١٣ (د) ٨

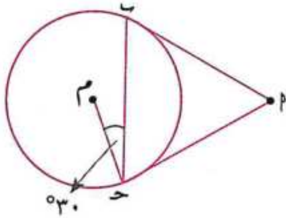


١٠ فى الشكل المقابل:

إذا كان ق(∠ ع ص ل) = ١٣٠° ، فإن ق(∠ س) = ...°

(أ) ٥٠ (ب) ٦٥

(جـ) ٨٠ (د) ١٠٠

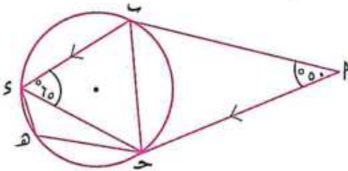


٢ فى الشكل المقابل:

$\overline{ٵب}$ ، $\overline{ٵحـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، حـ على الترتيب

، ق(∠ ب حـ م) = ٣٠°

أثبت أن المثلث ٵ ب حـ متساوى الأضلاع

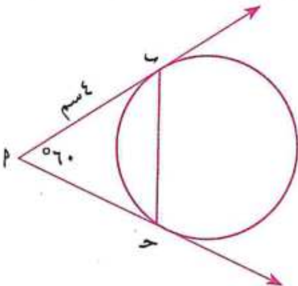


٣ فى الشكل المقابل:

$\overline{ٵب}$ ، $\overline{ٵحـ}$ قطعتان مماستان للدائرة عند ب، حـ ،

$\overline{ب ء}$ // $\overline{ٵحـ}$، ق(∠ ٵ) = ٥٠° ، ق(∠ ب ء حـ) = ٦٥°

١ أوجد: ق(∠ هـ) ٢ أثبت أن: ب حـ = حـ ء



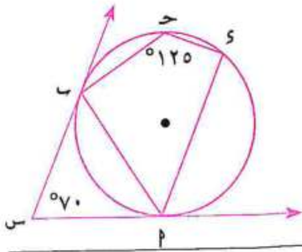
٤ فى الشكل المقابل:

$\overleftrightarrow{ٵب}$ ، $\overleftrightarrow{ٵحـ}$ مماسان للدائرة

إذا كان ق(∠ ب ٵ حـ) = ٦٠° ، ٵ ب = ٤ سم

فأوجد طول $\overline{ب حـ}$

٥ في الشكل المقابل: (الإسماعيلية ٢٠٢٤)

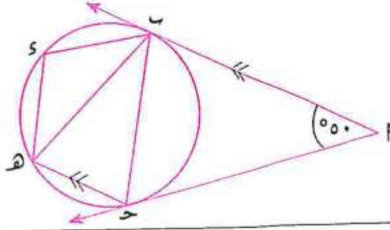


$\overleftarrow{\text{س أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{س ب}}$ مماسان للدائرة عند أ ، ب ،

و(∠ أ س ب) = ٧٠° ، و(∠ ء حـ ب) = ١٢٥° أثبت أن:

١ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ينصف (∠ ء أ س) ٢ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ // $\overleftarrow{\text{س ب}}$

٦ في الشكل المقابل:

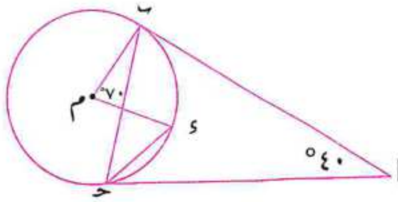


$\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ يمسان الدائرة عند ب ، حـ

$\overleftarrow{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{حـ هـ}}$ ، و(∠ أ) = ٥٠°

أوجد و(∠ ب ء هـ)

٧ في الشكل المقابل:

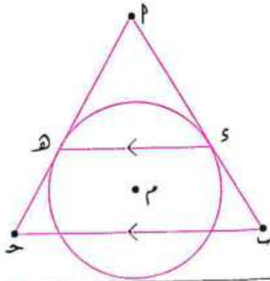


$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، حـ

و(∠ ء م ب) = ٧٠°

و(∠ أ) = ٤٠° برهن أن: $\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ ينصف ∠ أ حـ ب

٨ في الشكل المقابل: (الإسكندرية ٢٠٠٤)



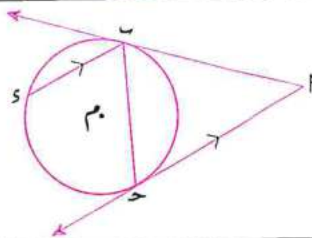
أ ب حـ مثلث حيث:

$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ يمسان الدائرة م في ء ، هـ على الترتيب،

$\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

برهن أن الشكل: ء ب حـ هـ رباعي دائري

٩ في الشكل المقابل:

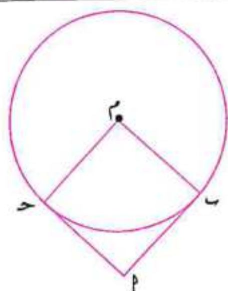


$\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ مماسان للدائرة م في ب، حـ على الترتيب،

$\overline{\text{ب ء}}$ // $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$

برهن أن: $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ينصف (∠ أ ب ء)

١٠ في الشكل المقابل: (المنوفية ٢٠١٩)



$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، حـ

، و(∠ ب م حـ) = ٩٠°،

أثبت أن: الشكل أ ب م حـ مربع

ثانيًا الدائرة الداخلة لمضلع

١١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الداخل يساوى .... (بورسعيد ٢٠٢٣)

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) صفر

٢ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الخارج يساوى .... (بورسعيد ٢٠١٨)

(أ) صفرًا (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٣ مركز الدائرة الداخلة لأى مثلث هو نقطة تقاطع .... (الإسكندرية ٢٠٢٢)

(أ) متوسطات المثلث (ب) ارتفاعات المثلث

(جـ) محاور أضلاعه (د) منصفات زواياه الداخلة

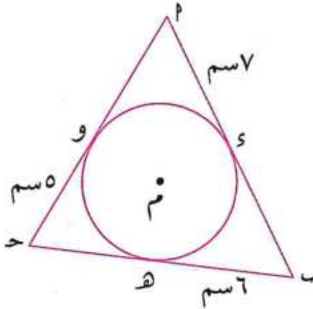
٤ عدد المماسات المشتركة للدائرتين متحدتى المركز يساوى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٥ عدد محاور التماثل لدائرتين متطابقتين ومتماستين من الخارج = ...

(أ) صفرًا (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٦ فى الشكل المقابل:



الدائرة م داخل المثلث ا ب حـ تمس كل أضلاع المثلث

إذا كان: و حـ = ٥سم، ب هـ = ٦سم، ا ء = ٧سم

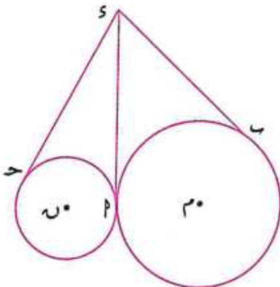
فإن: محيط المثلث ا ب حـ = ... سم

(أ) ٢١ (ب) ٤٢

(جـ) ٣٦ (د) ٤٨

---

١٢ فى الشكل المقابل: (قنا ٢٠١٩)



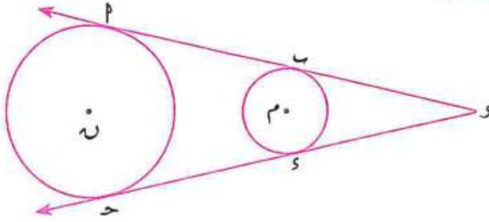
م ، ن دائرتان متماستان من الخارج فى نقطة ا

، $\overline{\text{ءا}}$ قطعة مماسة مشتركة للدائرتين م ، ن

، $\overline{\text{ءب}}$ قطعة مماسة للدائرة م فى ب،

$\overline{\text{ءحـ}}$ قطعة مماسة للدائرة ن فى حـ برهن أن: ءب = ءحـ

١٣ في الشكل المقابل: (المنوفية ٢٠٢٣)

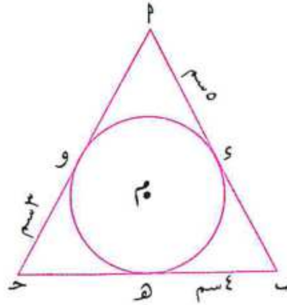


◄ $\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{حـ ء}$ كل منهما مماس مشترك خارجي للدائرتين م ، ن حيث $\overleftarrow{أب} \cap \overleftarrow{حـ ء} = \{و\}$

أثبت أن: أ ب = حـ ء

---

١٤ في الشكل المقابل: (سوهاج ٢٠٢٤)



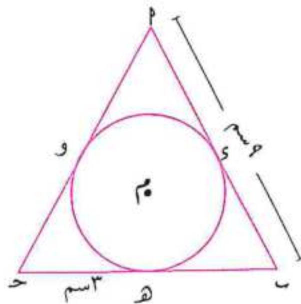
◄ المثلث أ ب حـ مرسوم خارج الدائرة م تمس أضلاعه $\overline{أب}$، $\overline{ب حـ}$، $\overline{أ حـ}$ في ء ، هـ ، و على الترتيب

أ ء = ٥ سم، ب هـ = ٤ سم، حـ و = ٣ سم

أوجد محيط المثلث أ ب حـ

---

١٥ في الشكل المقابل: (الوادي الجديد ٢٠٢٣)



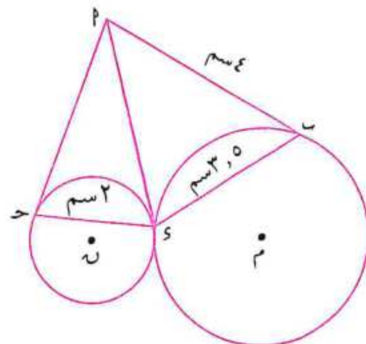
◄ المثلث أ ب حـ مرسوم خارج الدائرة م تمس أضلاعه $\overline{أب}$، $\overline{ب حـ}$، $\overline{أ حـ}$ في ء ، هـ ، و على الترتيب

أ ب = ٩ سم، حـ هـ = ٣ سم

أوجد: محيط المثلث أ ب حـ

---

١٦ في الشكل المقابل: (القاهرة ٢٠٢٣)



◄ م ، ن دائرتان متماستان من الخارج عند ء،

$\overline{أب}$ تمس الدائرة م عند ب، $\overline{أ حـ}$ تمس الدائرة ن عند حـ

أ ب = ٤ سم، ب ء = ٣,٥ سم ، ء حـ = ٢ سم

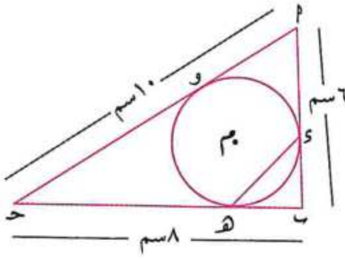
أوجد: محيط الشكل أ ب ء حـ

١٧ في الشكل المقابل: (بنى سويف ٢٠١٩)

م دائرة داخلة للمثلث ؟ ب حـ حيث ؟ ب = ٦ سم،

ب حـ = ٨ سم، ؟ حـ = ١٠ سم

أوجد بدلالة π مساحة الدائرة م



١٨ في الشكل المقابل: (الشرقية ٢٠٢٤)

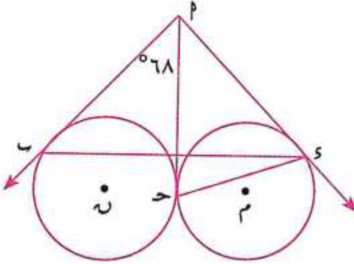
م ، ن دائرتان متماستان من الخارج عند حـ

، $\overline{\text{؟ حـ}}$ قطعة مماسة مشتركة للدائرتين ، $\overleftarrow{\text{؟ ء}}$ مماس للدائرة م عند ء

، $\overleftarrow{\text{؟ ب}}$ مماس للدائرة ن عند ب ، ق(∠ ب ؟ حـ) = ٦٨°

١ أثبت أن: ؟ ب = ؟ ء

٢ أوجد ق(∠ ب ء حـ)



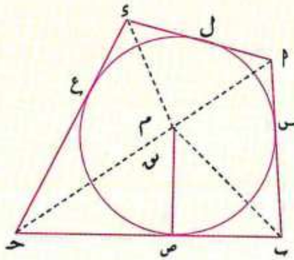
تفكير إبداعي TIMSS

١٩ في الشكل المقابل:

م دائرة داخلة للشكل الرباعي ؟ ب حـ ء،

طول نصف قطرها ٥ سم، ؟ ب = ٩ سم ، حـ ء = ١٢ سم

أوجد: محيط الشكل ؟ ب حـ ء ثم احسب مساحته



٢٠ في الشكل المقابل:

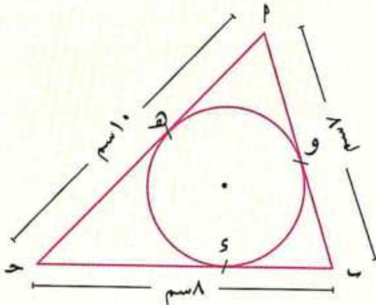
؟ ب حـ مثلث خارج الدائرة حيث

أضلاعه تمس الدائرة في و ، ء ، هـ

؟ ب = ٧ سم ، ب حـ = ٨ سم ، ؟ حـ = ١٠ سم

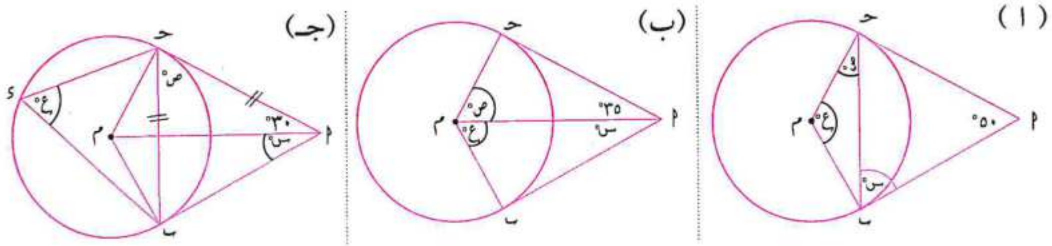
١ أثبت أن: ب حـ + ؟ و = ؟ حـ + ب و

٢ أوجد: طول $\overline{\text{؟ و}}$ ، $\overline{\text{ء حـ}}$



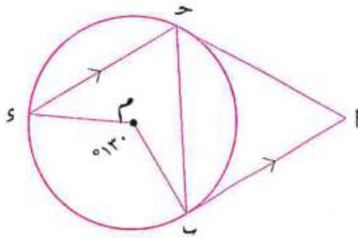
تدريبات الكتاب المدرسى

١ فى كل من الأشكال الآتية، $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ قطعتان مماستان للدائرة م
أوجد قيمة الرموز المستخدمة فى القياس:



---

٢ فى الشكل المقابل:



$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، حـ

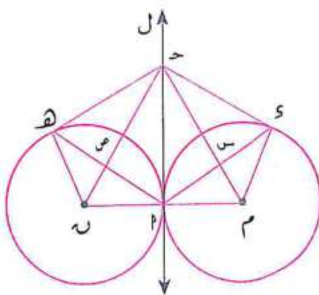
$\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{حـ ء}}$ ، ق(∠ ب م ء) = ١٣٠°

(أ) أثبت أن: $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ ينصف (∠ أ حـ ء)

(ب) أوجد: ق (∠ أ)

---

٣ فى الشكل المقابل:



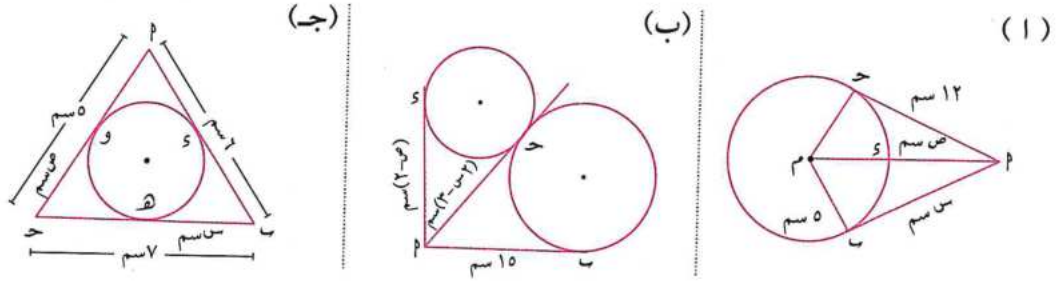
م ، ن دائرتان متماستان من الخارج فى أ ، المستقيم ل مماس مشترك لهما عند أ ، حـ ∈ ل ، رسم من حـ قطعتان مماستان للدائرتين م ، ن تمسانهما فى ء ، هـ على الترتيب ،

$\overline{\text{حـ م}}$ ∩ $\overline{\text{ء أ}}$ = {س} ، $\overline{\text{حـ ن}}$ ∩ $\overline{\text{أ هـ}}$ = {ص}

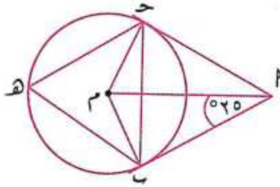
(أ) ما عدد الأشكال الرباعية الدائرية فى الشكل المقابل؟ وما هى؟

(ب) أثبت أن: حـ ء = حـ أ = حـ هـ ، فسر ذلك هندسيًا.

٤ مستعينًا بمعطيات الشكل، أوجد قيمة الرمز المستخدم فى القياس:



٥ فى الشكل المقابل:



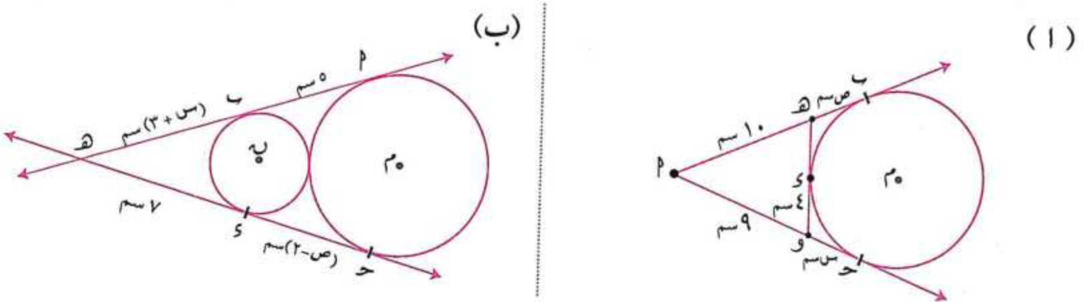
$\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م عند ب ، حـ

و(∠ ب أ م) = ٢٥°، هـ ∈ (ب حـ) الأكبر. **أوجد:**

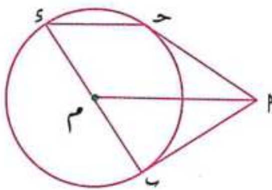
أولًا: و(∠ أ حـ ب)

ثانيًا: و(∠ ب هـ حـ)

٦ فى كلٍّ من الشكلين الآتيين: أوجد قيمة كل من س، ص بالسنتيمترات: (قنا ٢٠٢٣)



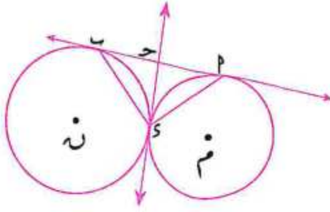
٧ فى الشكل المقابل:



$\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م، $\overline{ب ى}$ قطر فى الدائرة

أثبت أن: $\overline{أم}$ // $\overline{حـ ى}$

٨ في الشكل المقابل:



م ، ن دائرتان متماستان من الخارج في ء ، ↔أب مماس مشترك لهما عند أ ، ب، ↔ءحـ مماس مشترك للدائرتين عند ء،

حيث ↔ءحـ ∩ ↔أب = {حـ} أثبت أن:

أولًا: حـ منتصف ‾أب‾ ثانيًا: ‾أء‾ ⊥ ‾بء‾

---

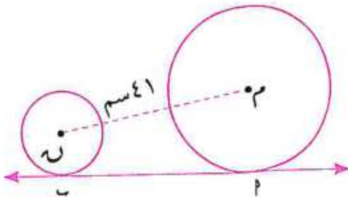
٩ ‾أب‾ قطر في الدائرة م ، أب = ١٠سم ، حـ ∈ الدائرة م ، رسم مماس للدائرة عند حـ فقطع المماسين المرسومين لها عند أ ، ب في س ، ص على الترتيب حيث س ص = ١٣ سم

١ أثبت أن: ‾س م‾ ⊥ ‾ص م‾

٢ أوجد مساحة الشكل أ س ص ب

---

١٠ في الشكل المقابل:



↔أب مماس مشترك للدائرتين م ، ن من الخارج عند أ ، ب على الترتيب، طولا نصفي قطريهما ١٧سم، ٨سم على الترتيب، وكان م ن = ٤١سم

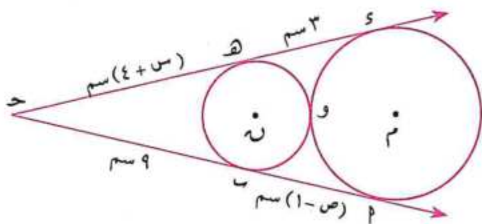
أوجد طول ‾أب‾

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى فيه: ق(∠ أ) = ١١٠°، فإن: ق(∠ حـ) = ... ° (الشرقية ٢٠٢٣)

(أ) ٧٠ (ب) ٣٥ (جـ) ٨٠ (د) ١١٠

٢ فى الشكل المقابل: (المنيا ٢٠١٨)



قيمة: $\sqrt{س + ص}$ = ... سم

(أ) ١ (ب) ٣

(جـ) ٥ (د) ٩

٣ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الخارج .... (الإسكندرية ٢٠٢٢)

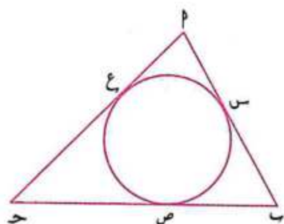
(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٤ عدد المماسات التى يمكن رسمها من نقطة تقع على دائرة يساوى .... (البحيرة ٢٠١٧)

(أ) صفرًا (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عددًا لا نهائيًا

---

٢ ١ فى الشكل المقابل: (الجيزة ٢٠١٧)

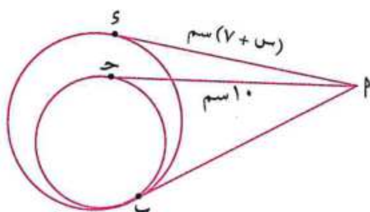


دائرة مرسومة داخل المثلث أ ب حـ تمس أضلاعه فى س ، ص ، ع

إذا كان أ س = ٣ سم ، س ب = ٤ سم ، أ حـ = ٨ سم

فأوجد طول $\overline{ب حـ}$ ومحيط △ أ ب حـ

٢ فى الشكل المقابل: (القليوبية ٢٠٢٢)



دائرتان متماستان فى نقطة ب ، أ حـ = ١٠ سم،

أ ء = (س + ٧) سم أوجد:

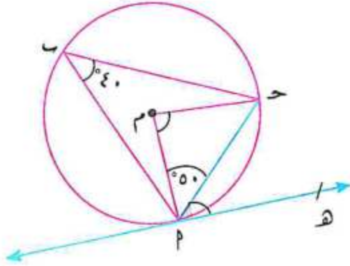
(أ) طول $\overline{أ ب}$ (ب) قيمة س



ذاكر الدرس 7 الزاوية المماسية



فكر وناقش في الشكل المقابل:



إذا كان: $\overleftrightarrow{أهـ}$ مماسًا للدائرة ، $\overline{أحـ}$ وترًا في الدائرة م

فإن : ١ ق$(\overset{\frown}{حـ أ}) = ٨٠°$

٢ ق$(\angle$ أ م حـ$)$ المركزية $= ٨٠°$

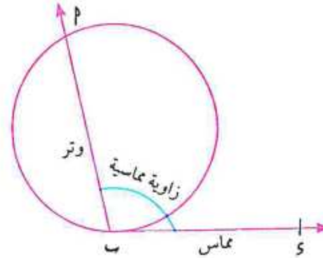
٣ ق$(\angle$ حـ أ هـ$) = ٤٠°$ لأن $\overline{مأ} \perp \overleftrightarrow{أهـ}$

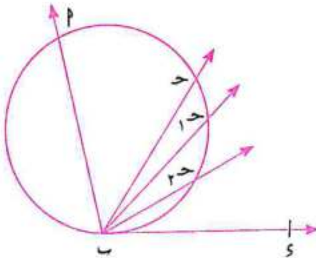
فما العلاقة بين ق $(\angle$ ب$)$ المحيطية ، ق $(\angle$ أ م حـ$)$ المركزية ، ق $(\angle$ حـ أ هـ$)$ ، ق $(\overset{\frown}{حـ أ})$؟

الزاوية المماسية :

تعريف

الزاوية المماسية: هي الزاوية المكونة من اتحاد شعاعين، أحدهما مماس للدائرة والآخر يحمل وترًا في الدائرة يمر بنقطة التماس.





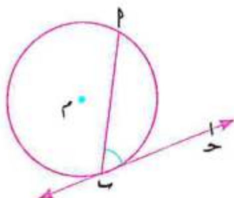
تسمى $\angle$ أ ب ء بالزاوية المماسية

قياس الزاوية المماسية:

قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها.

فمثلًا: في الشكل المقابل: إذا كان: $\overline{أب}$ وترًا في الدائرة م ، $\overleftrightarrow{بحـ}$ مماسًا

فإن : ق $(\angle$ أ ب حـ$) = \frac{1}{2}$ ق$(\overset{\frown}{أ ب})$

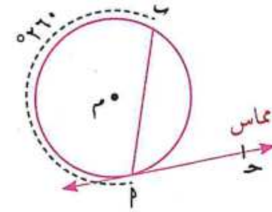


لاحظ أن الزاوية المماسية حالة خاصة من الزاوية المحيطية.

مثـال ١

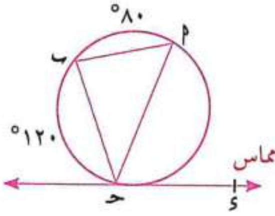
باستخـدام البيانات الموضحة على كل شكل أوجد المطلوب:

شكل ①



إيجاد: ق (∠ ب ا حـ)

شكل ②



إيجاد: ق (∠ ا حـ ء)

الحـل

شكل ①:

∵ قياس الدائرة = °٣٦٠

∴ ق (⌒ا ب) = °٣٦٠ − °٢٦٠ = °١٠٠

∵ ا حـ ↔ مماس ، ا ب وتر

∴ ∠ ب ا حـ مماسية

∴ ق (∠ ب ا حـ) = $\frac{1}{2}$ ق (⌒ا ب)

= $\frac{1}{2}$ × °١٠٠ = °٥٠

شكل ②:

∵ قياس الدائرة = °٣٦٠

∴ ق (⌒ا حـ) = °٣٦٠ − (°٨٠ + °١٢٠) = °١٦٠

∵ حـ ء ↔ مماس ، ا حـ وتر

∴ ∠ ا حـ ء مماسية

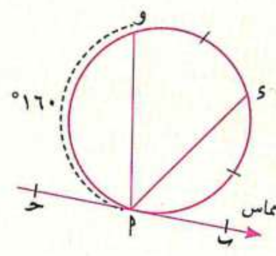
∴ ق (∠ ا حـ ء) = $\frac{1}{2}$ ق (⌒ا حـ)

= $\frac{1}{2}$ × °١٦٠ = °٨٠

س؟ سؤال ١

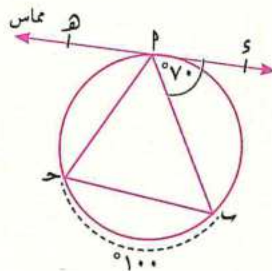
باستخدام البيانات الموضحة على كل شكل أوجـد المطلوب:

شكل (١)



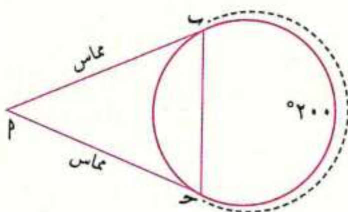
إيجاد: ق (∠ ء ا ب)

شكل (٢)



إيجاد: ق (∠ هـ ا حـ)

شكل (٣)

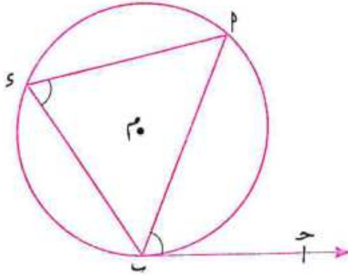


إيجاد: (أ) ق (∠ ا ب حـ)

(ب) ق (∠ ا)

أولًا نظرية (٥) والنتيجة عليها:

قياس الزاوية المماسية يساوى قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى القوس.



المعطيات : ∠ أ ب حـ زاوية مماسية ، ∠ ء زاوية محيطية مشتركتان فى (أ ب⌒)

المطلوب : **إثبات أن:** ق(∠ أ ب حـ) = ق(∠ ء)

البرهان : ∵ ∠ أ ب حـ زاوية مماسية

∴ ق(∠ أ ب حـ) = $\frac{1}{2}$ ق(أ ب⌒) ⟸ ١

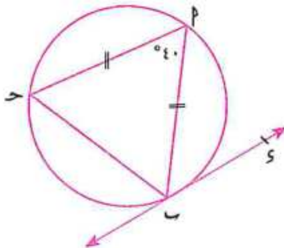
∵ ∠ ء زاوية محيطية

∴ ق(∠ ء) = $\frac{1}{2}$ ق(أ ب⌒) ⟸ ٢

من ١ ، ٢ ينتج أن: ق(∠ أ ب حـ) = ق(∠ ء) (وهو المطلوب)

مثال ٢

فى الشكل المقابل:



أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة حيث أ ب = أ حـ ،

ق(∠ أ) = ٤٠° ، ب ء↔ مماس **أوجد:** ق(∠ أ ب ء)

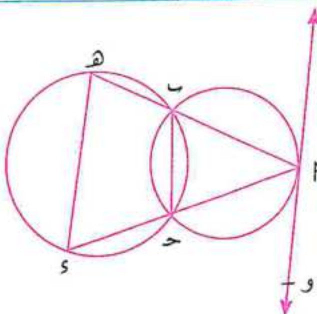
الحل

∵ أ ب = أ حـ ∴ ق(∠ أ ب حـ) = ق(∠ أ حـ ب) = $\frac{١٨٠° - ٤٠°}{٢}$ = ٧٠°

∵ ∠ أ ب ء مماسية ، ∠ أ حـ ب محيطية [مشتركتان فى (أ ب⌒)]

∴ ق(∠ أ ب ء) = ق(∠ أ حـ ب) = ٧٠°

سؤال ٢



فى الشكل المقابل:

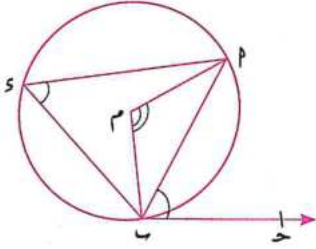
دائرتان متقاطعتان فى ب ، حـ ، أ و↔ مماس

رُسم أ ب← ، أ حـ← يقطعان الدائرة الأخرى فى ء ، هـ

أثبت أن: أ و↔ // هـ ء↔

نتيجــة

قياس الزاوية المماسية يساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس.



فمثلاً: فى الشكل المقابل:

$\overleftarrow{ب حـ}$ مماس للدائرة م ، $\overline{ء ب}$ وتر التماس

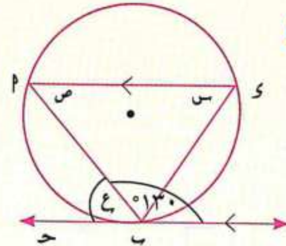
∴ ق(∠ ء ب حـ) = ق(∠ ء) ⟸ (نظرية)

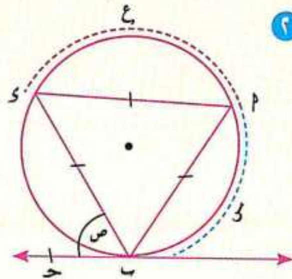
∵ ق(∠ ء) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ ء م ب) ⟸ (نظرية)

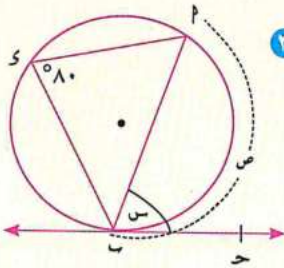
∴ ق(∠ ء ب حـ) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ ء م ب)

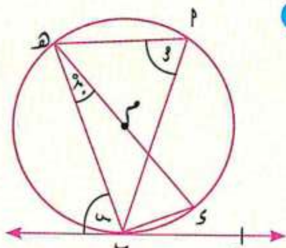
س؟ سؤال ٣

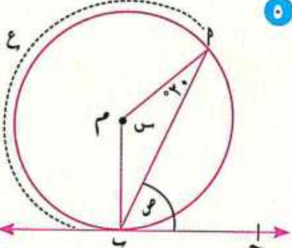
فى كل من الأشكال الآتية $\overleftrightarrow{ب حـ}$ مماس للدائرة ، أوجد قيمة س ، ص ، ع بالدرجات:

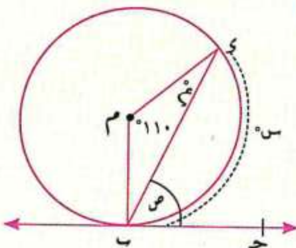








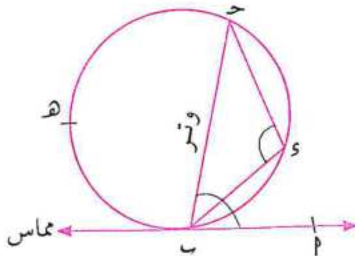






نقاط هامة

الزاوية المماسية تكمل الزاوية المحيطية المرسومة على وتر الزاوية المماسية وفى جهة واحدة منه.



فمثلًا: فى الشكل المقابل:

∠ حـ ب أ زاوية مماسية وترها $\overline{\text{حـ ب}}$ ،

∠ حـ ء ب زاوية محيطية مرسومة على الوتر $\overline{\text{حـ ب}}$

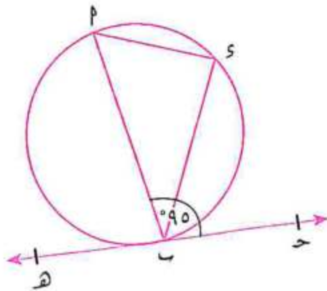
∵ ق(∠ حـ ب أ) = $\frac{1}{2}$ ق ($\overset{\frown}{\text{حـ ء ب}}$) ⟸ ١

، ق(∠ حـ ء ب) = $\frac{1}{2}$ ق ($\overset{\frown}{\text{حـ هـ ب}}$) ⟸ ٢

بجمع ١ ، ٢ ينتج أن: ق (∠ حـ ب أ) + ق (∠ حـ ء ب) = $\frac{1}{2}$ [ق ($\overset{\frown}{\text{حـ ء ب}}$) + ق ($\overset{\frown}{\text{حـ هـ ب}}$)]

= $\frac{1}{2}$ × ٣٦٠° = ١٨٠°

مثال ٣



فى الشكل المقابل:

إذا كان: $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ مماسًا ، ق(∠ أ ب حـ) = ٩٥°

فأوجد ق (∠ أ ء ب)

الحل

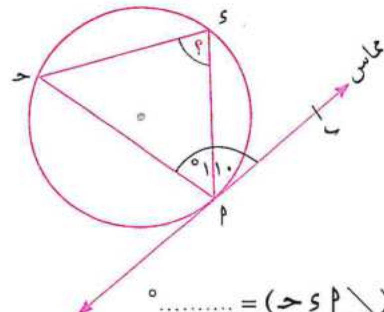
∵ ∠ أ ء ب المحيطية تكمل ∠ أ ب حـ المماسية

∴ ق (∠ أ ء ب) = ١٨٠° − ٩٥° = ٨٥°

سؤال ٤

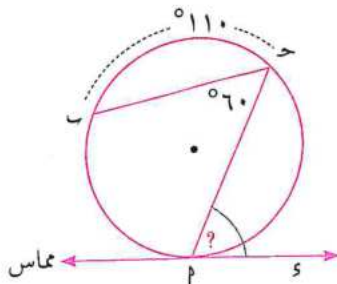
بالاستعانة بالشكلين الآتيين، أكمل:

❶



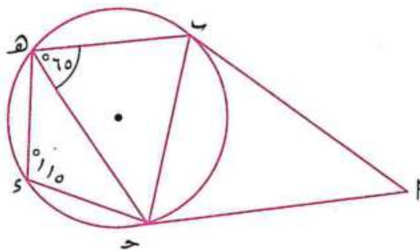
ق (∠ أ ء حـ) = ...°

❷



ق (∠ حـ أ ء) = ...°

مثال ٤



في الشكل المقابل:

$\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ قطعتان مماستان للدائرة ،

ق(∠ء) = ١١٥° ، ق(∠بهـحـ) = ٦٥°

١ أوجد ق(∠أ)

٢ أثبت أن $\overleftrightarrow{بحـ}$ ينصف ∠أبهـ

الحل

المعطيات : $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ قطعتان مماستان ،

ق(∠ء) = ١١٥° ، ق(∠بهـحـ) = ٦٥°

المطلوب : ١ إيجاد ق(∠أ)

٢ إثبات أن $\overleftrightarrow{بحـ}$ ينصف ∠أبهـ

البرهان : ∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ قطعتان مماستان

∴ أب = أحـ

∴ ق(∠أبحـ) = ق(∠أحـب) = ق(∠بهـحـ) = ٦٥°

(زاوية مماسية وزاوية محيطية مشتركتان في $\overset{\frown}{بحـ}$)

∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٦٥° + ٦٥°) = ٥٠° (وهو المطلوب ١)

∵ بحـءهـ شكل رباعي دائري

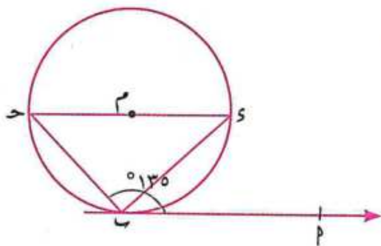
∴ ق(∠حـبهـ) = ١٨٠° − ١١٥° = ٦٥°

∴ ق(∠أبحـ) = ق(∠حـبهـ) = ٦٥°

∴ $\overleftrightarrow{بحـ}$ ينصف (∠أبهـ) (وهو المطلوب ٢)

سؤال ٥

(الإسماعيلية ٢٠٢٤)



في الشكل المقابل:

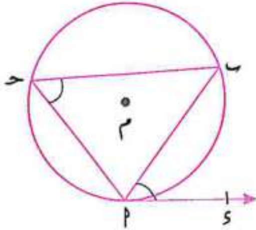
$\overline{ءحـ}$ قطر في الدائرة م ، $\overleftrightarrow{بأ}$ مماس للدائرة م عند ب ،

ق(∠أبحـ) = ١٣٥°

أثبت أن: $\overline{حـء}$ // $\overleftrightarrow{بأ}$

ثانيًا عكس نظرية (٥) :

إذا رُسم شعاعٌ من أحد طرفى وتر فى دائرة بحيث كان قياسُ الزاوية المحصورة بين هذا الشعاع والوتر يساوى قياس الزاوية المحيطية المرسومة على نفس الوتر من الجهة الأخرى، فإن هذا الشعاع يكون مماسًّا للدائرة.



فمثلًا: إذا رسم $\overrightarrow{\text{أ د}}$ من أحد طرفى الوتر $\overline{\text{أ ب}}$ فى الدائرة م

وكان: ق(∠ د أ ب) = ق(∠ جـ)

فـإن: $\overrightarrow{\text{أ د}}$ مماس للدائرة م

مثـال ٥

فى الشكل المقابل:

أ ب = أ جـ ، $\overrightarrow{\text{أ د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

بيِّن هل $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، جـ أم لا؟ مع ذكر السبب.

الحـل

∵ $\overrightarrow{\text{أ د}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ ق(∠ د أ جـ) = ق(∠ جـ) ⟸ (بالتبادل) ⟸ ١

، ∵ أ ب = أ جـ ∴ ق(∠ جـ) = ق(∠ ب) ⟸ ٢

من ١ ، ٢

∴ ق(∠ د أ جـ) = ق(∠ ب)

∴ $\overrightarrow{\text{أ د}}$ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، ب ، جـ

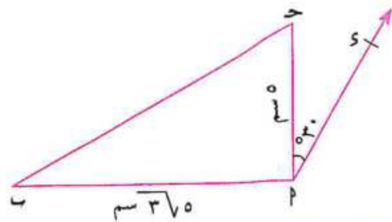
سؤال ٦

فى الشكل المقابل:

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية فى أ ، أ جـ = ٥ سم ،

أ ب = ٥ $\sqrt{٣}$ سم ، ق(∠ د أ جـ) = ٣٠°

أثبـت أن: $\overleftrightarrow{\text{أ د}}$ مماس للدائرة المارة برءوس المثلث أ ب جـ



أسئلة الكتاب المدرسى | أسئلة موقع الــوزارة

تدريبات الأضــواء

أولاً نظرية (٥) والنتيجة عليها

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ الزاوية المماسية هى زاوية محصورة بين .... فى الدائرة. (الوادى الجديد ٢٠٢٣)

(أ) وترين (ب) مماسين (جـ) وتر ومماس (د) وتر وقطر

٢ إذا كان قياس زاوية مماسية ٧٠° فإن قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى نفس القوس = ... (القليوبية ٢٠١٦)

(أ) ٣٥° (ب) ٧٠° (جـ) ١٤٠° (د) ٢١٠°

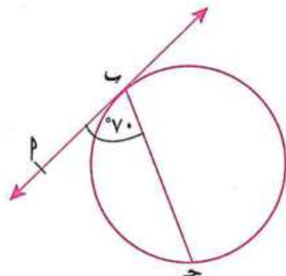
٣ قياس الزاوية المماسية التى قوسها نصف دائرة يساوى ....

(أ) ٤٥° (ب) ٩٠° (جـ) ١٨٠° (د) ٣٦٠°

٤ النسبة بين قياس الزاوية المماسية وقياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى نفس القوس تساوى .... (دمياط ٢٠١٥)

(أ) ١:٣ (ب) ٢:١ (جـ) ١:٢ (د) ٣:١

٥ فى الشكل المقابل:



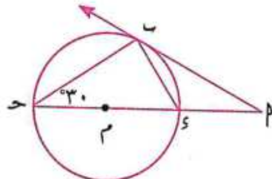
إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ مماسًا للدائرة، ق(∠ جـ ب أ) = ٧٠°

فإن: ق($\overset{\frown}{ب جـ}$) الأكبر = ...

(أ) ٧٠° (ب) ١٤٠°

(جـ) ٢٢٠° (د) ٢٩٠°

٦ فى الشكل المقابل: (الغربية ٢٠١٧)

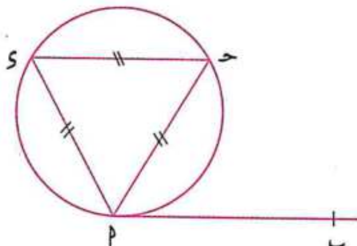


إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ مماسًا للدائرة م، فإن: ق(∠ أ ب جـ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠°

(جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

٧ فى الشكل المقابل:



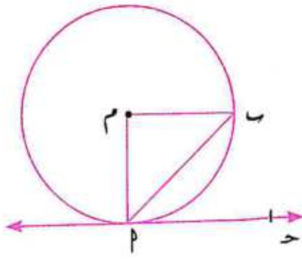
إذا كان $\overleftrightarrow{أب}$ مماسًا للدائرة المارة برءوس المثلث أ جـ ء

فإن: ق(∠ ب أ جـ) = ...

(أ) ٦٠° (ب) ١٢٠°

(جـ) ١٤٠° (د) ١٨٠°

٨ في الشكل المقابل:



$\overleftrightarrow{أحـ}$ مماس للدائرة م ، إذا كان ق(∠ ب م أ) = ٩٠°

فإن: ق(∠ ب أ حـ) = ...

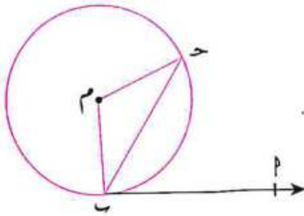
(أ) ٤٥°   (ب) ٩٠°

(جـ) ١٢٠°   (د) ١٨٠°

٩ قياس الزاوية المماسية التي تحصر قوسًا طوله $\frac{٢}{٣}$ π نق سم = ...

(أ) ٣٠°   (ب) ٦٠°   (جـ) ٩٠°   (د) ١٢٠°

١٠ في الشكل المقابل:



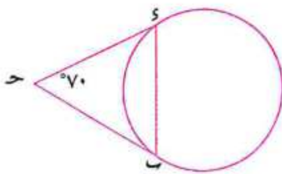
$\overrightarrow{ب أ}$ مماس للدائرة م عند ب

إذا كان ق(∠ حـ م ب) = ١١٠°، فإن: ق(∠ أ ب حـ) = ...

(أ) ٥٥°   (ب) ٧٠°

(جـ) ٩٥°   (د) ١١٠°

١١ في الشكل المقابل: (الدقهلية ٢٠١٧)



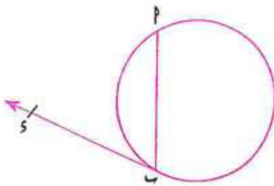
إذا كان $\overline{حـ ب}$ ، $\overline{حـ ء}$ قطعتين مماستين للدائرة في ب ، ء على الترتيب

، ق(∠ حـ) = ٧٠° فإن: ق($\overset{\frown}{ء ب}$) = ...°

(أ) ٥٥   (ب) ٩٠

(جـ) ١٠٠   (د) ١١٠

١٢ في الشكل المقابل: (المنوفية ٢٠١٥)



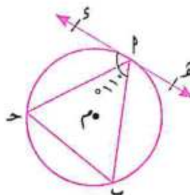
إذا كان $\overrightarrow{ب ء}$ مماس للدائرة ، ق($\overset{\frown}{أ ب}$) = $\frac{١}{٣}$ قياس الدائرة

فإن: ق(∠ أ ب ء) = ...°

(أ) ٦٠   (ب) ٩٠

(جـ) ١٢٠   (د) ٣٠

١٣ في الشكل المقابل: إذا كان $\overleftrightarrow{هـ ء}$ مماسًّا للدائرة م عند أ ،



ق(∠ ء أ ب) = ١١٠° فإن: ق(∠ أ حـ ب) = ...

(أ) ٧٠°   (ب) ٦٠°

(جـ) ٥٥°   (د) ٣٥°

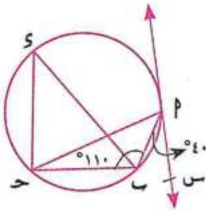
١٤ في الشكل المقابل:

إذا كان $\overleftrightarrow{أس}$ مماسًّا للدائرة ، ق $(\angle س أ ب) = ٤٠°$

، ق $(\angle أ ب جـ) = ١١٠°$ فإن: ق $(\angle جـ ء ب) = ...°$

(أ) ٤٠ (ب) ٥٥

(جـ) ٣٠ (د) ٢٠



٢ أكمل ما يأتي:

١ الزاوية المماسية هي ....

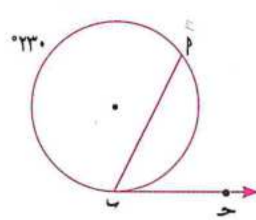
٢ قياس الزاوية المماسية يساوي قياس .... المشتركة معها في نفس القوس.

٣ قياس الزاوية المماسية يساوي نصف قياس .... المشتركة معها في نفس القوس.

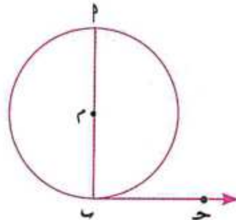
٤ قياس الزاوية المماسية التي تحصر قوس يُمثل ربع دائرة يساوي ....°

٣ في كل من الأشكال الآتية: احسب ق$(\angle أ ب جـ)$:

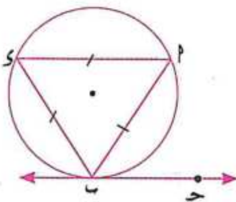
١



٢

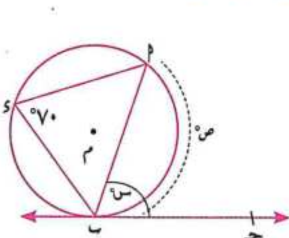


٣

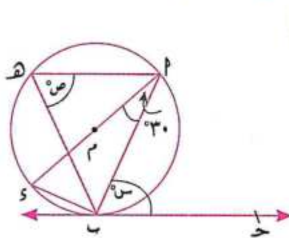


٤ في كل من الأشكال الآتية: $\overleftrightarrow{ب جـ}$ مماس للدائرة، أوجد قيمة الرموز المستخدمة في القياس:

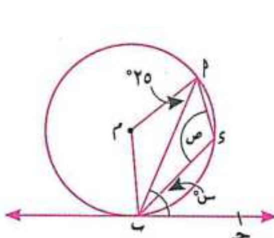
١



٢



٣



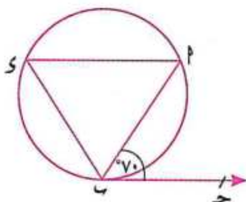
٥ في الشكل المقابل:

(كفر الشيخ ٢٠٢٣)

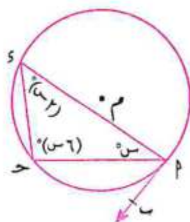
Δ أ ب ء مرسوم داخل دائرة،

$\overleftarrow{ب جـ}$ مماس عند ب حيث ق$(\angle أ ب جـ) = ٧٠°$ أوجد:

١ ق$(\angle ء)$ ٢ ق$(\overset{\frown}{أ ب})$ الأصغر



٦ في الشكل المقابل: (الوادى الجديد ٢٠١٧)

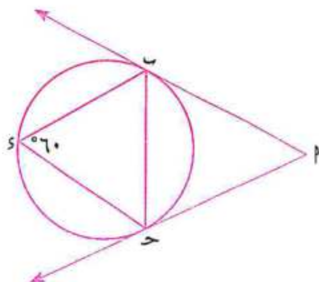


$\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م

أوجد ق(∠ ب أ ح)

---

٧ في الشكل المقابل:



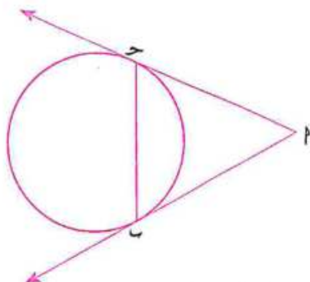
$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أ ح}$ مماسان للدائرة عند ب ، ح ،

ق(∠ ب ء ح) = ٦٠°

أثبت أن: Δ أ ب ح متساوى الأضلاع.

---

٨ في الشكل المقابل: (بورسعيد ٢٠٢٣)



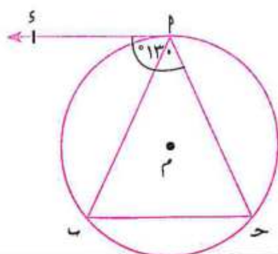
$\overline{أب}$ ، $\overline{أ ح}$ قطعتان مماستان للدائرة

ق $(\overset{\frown}{ب ح})$ الأصغر = ١٢٠° ، أ ب = ٥ سم

أوجد: محيط Δ أ ب ح

---

٩ في الشكل المقابل: (جنوب سيناء ٢٠١٧)



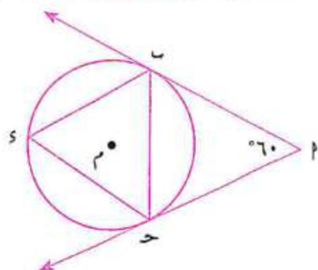
$\overleftrightarrow{أ ء}$ مماس للدائرة م يمسها في أ ،

ق(∠ ء أ ح) = ١٣٠°

أوجد بالبرهان: ق(∠ ب)

---

١٠ في الشكل المقابل:

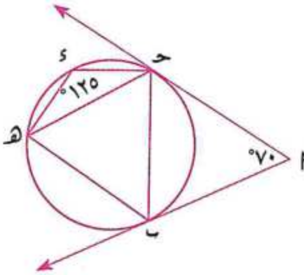


$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أ ح}$ مماسان للدائرة م

، ق(∠ أ) = ٦٠° ، أ ب = ٤ سم أوجد:

١ طول $\overline{ب ح}$ ٢ ق(∠ ء)

١١ فى الشكل المقابل: (الوادى الجديد ٢٠٢٣)



$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ مماسان للدائرة عند ب ، حـ على الترتيب

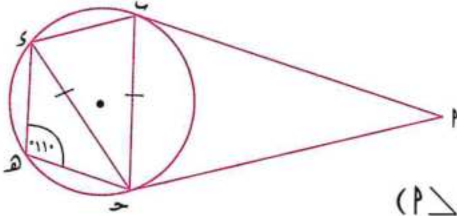
، ق(∠ أ) = ٧٠° ، ق(∠ حـ ء هـ) = ١٢٥° **أثبت أن:**

١ حـ ب = حـ هـ

٢ $\overleftrightarrow{أحـ}$ // $\overleftrightarrow{ب هـ}$

---

١٢ فى الشكل المقابل:



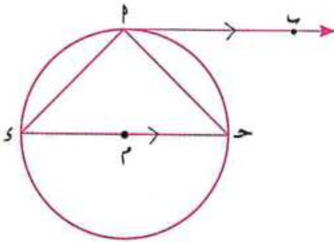
$\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ قطعتان مماستان، ق(∠ ء هـ حـ) = ١١٠°

، ب حـ = حـ ء **أثبت أن:**

١ ق(∠ أ ب حـ) = ق(∠ ء ب حـ)　　٢ **أوجد** ق(∠ أ)

---

١٣ فى الشكل المقابل:



$\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند أ ويوازى القطر $\overline{ء حـ}$

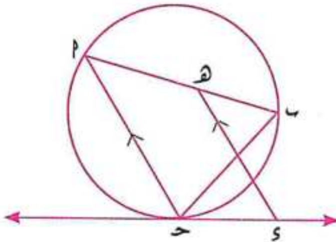
إذا كان محيط الدائرة م يساوى ٤٤ سم **فأوجد:**

١ ق(∠ ب أ حـ)　　٢ ق($\overset{\frown}{أ حـ}$)

٣ طول ($\overset{\frown}{أ حـ}$)

---

١٤ فى الشكل المقابل:



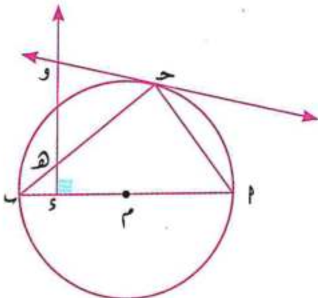
$\overleftrightarrow{حـ ء}$ مماس للدائرة عند حـ ،

$\overline{ء هـ}$ // $\overline{حـ أ}$

أثبت أن الشكل ب هـ حـ ء رباعى دائرى.

---

١٥ فى الشكل المقابل: (الجيزة ٢٠١٧)



$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ، $\overleftrightarrow{حـ و}$ مماس للدائرة عند حـ ،

$\overleftrightarrow{ء هـ}$ ⊥ $\overline{أب}$ **أثبت أن:**

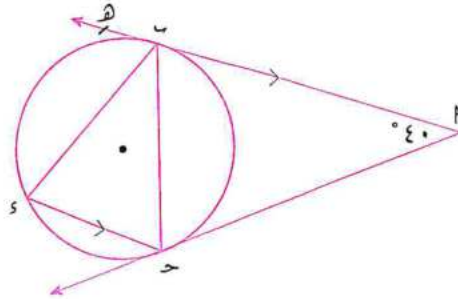
١ الشكل أ ء هـ حـ رباعى دائرى

٢ المثلث و هـ حـ متساوى الساقين

١٦ في الشكل المقابل:

$\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أحـ}$ مماسان للدائرة في ب ، حـ على الترتيب

$\overline{ءحـ}$ // $\overleftarrow{أب}$ ، ق($\angle$ أ) = ٤٠°



١ أوجد ق ($\angle$ أ ب حـ)

٢ أثبت أن ب حـ = ب ء

٣ أوجد ق ($\angle$ هـ ب ء)

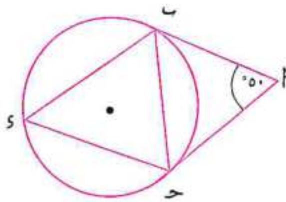
٤ أوجد ق ($\overset{\frown}{ب ء}$)

---

١٧ في الشكل المقابل:

$\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ قطعتان مماستان للدائرة عند ب ، حـ على الترتيب

ق ($\angle$ أ) = ٥٠° أوجد بالبرهان ق ($\angle$ ء)



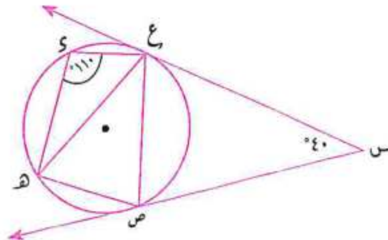
---

١٨ في الشكل المقابل: (الغربية ٢٠١٧)

$\overleftarrow{س ص}$ ، $\overleftarrow{س ع}$ مماسان مرسومان للدائرة

من نقطة س ، ق($\angle$ ء) = ١١٠°

أثبت أن: ق($\overset{\frown}{ع هـ}$) = ق ($\overset{\frown}{ع ص}$)

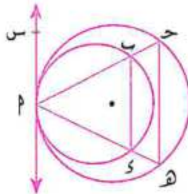


---

١٩ في الشكل المقابل:

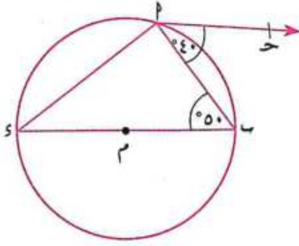
دائرتان متماستان من الداخل ، $\overleftrightarrow{أ س}$ مماس مشترك.

أثبت أن: $\overline{ب ء}$ // $\overline{حـ هـ}$



ثانيًا عكس نظرية (٥)

٢٠ في الشكل المقابل:



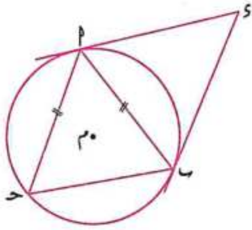
و ($\measuredangle$ حـ ؟ ب) = ٤٠° ، و ($\measuredangle$ ب) = ٥٠°

فإذا كان $\overline{\text{ب ء}}$ قطرًا في الدائرة م

فأثبت أن: $\overleftarrow{\text{؟ حـ}}$ يمس الدائرة م عند ؟

---

٢١ في الشكل المقابل: (قنا ٢٠١٣)

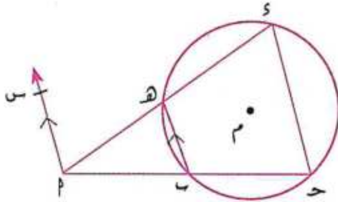


$\overline{\text{؟ ء}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ مماسان للدائرة م

أثبت أن: $\overline{\text{؟ حـ}}$ مماس للدائرة المارة برءوس المثلث ؟ ب ء

---

٢٢ في الشكل المقابل: (كفر الشيخ ٢٠١٣)

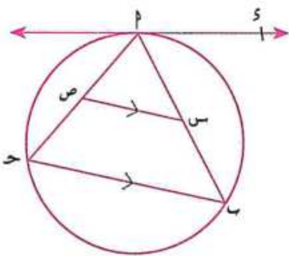


$\overleftarrow{\text{ء هـ}} \cap \overleftarrow{\text{حـ ب}} = \{ ؟ \}$ ، $\overleftarrow{\text{؟ س}}$ // $\overline{\text{ب هـ}}$ ،

أثبت أن: $\overleftarrow{\text{؟ س}}$ مماس للدائرة المارة بالنقط ؟ ، حـ ، ء

---

٢٣ في الشكل المقابل: (البحر الأحمر ٢٠٢٣)



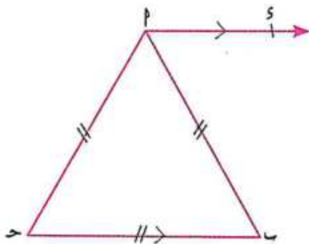
Δ ؟ ب حـ مرسوم داخل الدائرة،

$\overleftrightarrow{\text{؟ ء}}$ مماس للدائرة عند ؟ ، ص $\in$ $\overline{\text{؟ حـ}}$ حيث $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{\text{؟ ء}}$ مماس للدائرة المارة بالنقط ؟ ، س ، ص

---

٢٤ في الشكل المقابل:



؟ ب حـ مثلث متساوي الأضلاع ،

$\overleftarrow{\text{؟ ء}}$ // $\overline{\text{حـ ب}}$

أثبت أن: $\overleftarrow{\text{؟ ء}}$ مماس للدائرة المارة برءوس المثلث ؟ ب حـ

٢٥ في الشكل المقابل: (دمياط ٢٠١٣)

م دائرة فيها $\overline{حـ ء}$ قطعة مماسية عند حـ ،

و ق (∠ أ ء هـ) = ٩٠° حيث $\overline{أ ب}$ قطر في الدائرة أثبت أن:

١ الشكل حـ ء هـ أ رباعي دائري.

٢ $\overleftrightarrow{ء هـ}$ مماس للدائرة المارة برءوس المثلث أ ب هـ

---

٢٦ في الشكل المقابل: (مطروح ٢٠٢٣)

أ ب حـ مثلث مرسوم داخل الدائرة،

$\overleftrightarrow{ب س}$ مماس للدائرة عند ب ، $\overleftrightarrow{أ ء}$ // $\overleftrightarrow{ب س}$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{أ ب}$ مماس للدائرة المارة برءوس Δ أ حـ ء

---

٢٧ في الشكل المقابل:

$\overrightarrow{أ هـ}$ // $\overline{ء ب}$ ، ق(∠ ب أ هـ) = ٥٥°،

ق(∠ حـ) = ١١٠°، أ ب = أ ء أثبت أن:

١ الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري.

٢ $\overrightarrow{أ هـ}$ مماس للدائرة المارة برءوس المثلث أ ب ء

---

٢٨ في الشكل المقابل: (الإسماعيلية ٢٠١٧)

م دائرة ، أ م = أ حـ = ب حـ

أثبت أن: $\overleftrightarrow{أ ب}$ مماس للدائرة عند أ

---

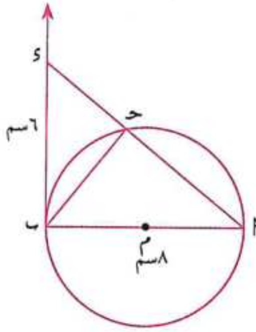
٢٩ في الشكل المقابل:

أ ب حـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة فيه:

أ ب = أ ء ، ق (∠ حـ) = ١٤٠° ، ق (∠ أ ء هـ) = ٧٠°

أثبت أن: $\overrightarrow{ء هـ}$ مماس للدائرة عند ء

٣٠ **في الشكل المقابل:**



$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م حيث أ ب = ٨ سم

، $\overline{أحـ}$ وتر فيها ، رُسم $\overleftarrow{بء}$ مماسًا للدائرة يقطع $\overleftarrow{أحـ}$ فى ء

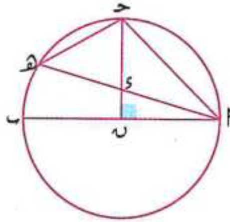
وكان ب ء = ٦ سم

١ **أثبت أن:** $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة المارة برءوس Δ حـ ب ء

٢ **أوجد** طول $\overline{بحـ}$

---

٣١ **في الشكل المقابل:**



$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة ن ،

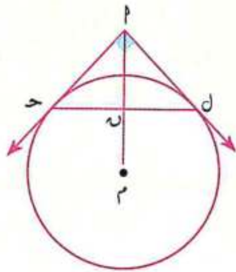
$\overline{نحـ}$ نصف قطر عمودى على $\overline{أب}$

، ء ∈ $\overline{نحـ}$ ، رُسم $\overleftarrow{أء}$ فقطع الدائرة فى هـ

أثبت أن: $\overleftarrow{أحـ}$ مماس للدائرة الخارجة للمثلث حـ ء هـ

تفكير إبداعي TIMSS

٣٢ **في الشكل المقابل:** (الشرقية ٢٠١٦)



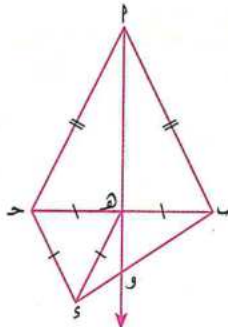
$\overline{أل}$ ، $\overline{أحـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م عند ل ، حـ على الترتيب

، $\overline{أل}$ ⊥ $\overline{أحـ}$ ، أ حـ = ٧ سم

أثبت أن: $\overleftarrow{أل}$ مماس للدائرة المارة برءوس Δ أ ن حـ

---

٣٣ **في الشكل المقابل:** (الشرقية ٢٠١٧)



أ ب حـ ، ء حـ هـ مثلثان متساويا الأضلاع

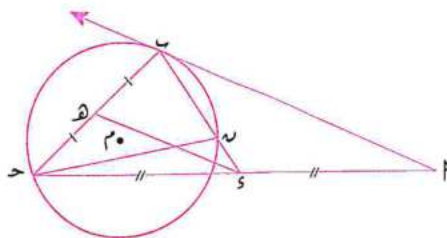
، هـ منتصف $\overline{بحـ}$ ، $\overleftarrow{أهـ}$ ∩ $\overline{بء}$ = { و }

١ **أثبت أن:** $\overline{أحـ}$ مماس للدائرة المارة برءوس Δ حـ هـ ء

٢ **أثبت أن:** الشكل حـ ء و هـ رباعى دائرى

٣ **عين** مركز الدائرة المارة برءوس الشكل حـ ء و هـ

٣٤ فى الشكل المقابل: (بورسعيد ٢٠١٥)



$\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م، $\overline{أحـ}$ قاطع لها

ء منتصف $\overline{أحـ}$ ، هـ منتصف $\overline{بحـ}$ ،

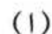
$\overline{بء}$ ∩ الدائرة م = { ن } أثبت أن:

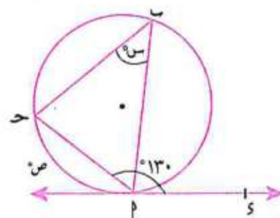
١ $\overline{أب}$ // $\overline{ءهـ}$

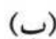
٢ النقط ن ، ء ، حـ ، هـ تمر بها دائرة واحدة.

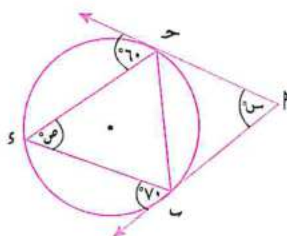
تدريبات الكتاب المدرسى

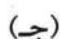
١ مستعينًا بمعطيات الشكل أوجد قيمة الرموز المستخدمة فى القياس:

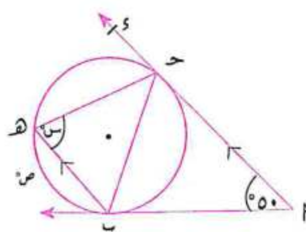




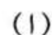


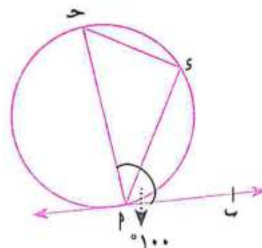




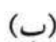


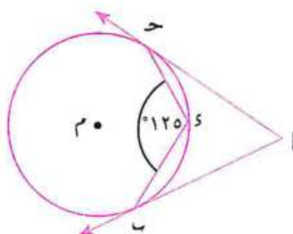
٢ مستعينًا بمعطيات الشَّكل أوجد:



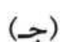


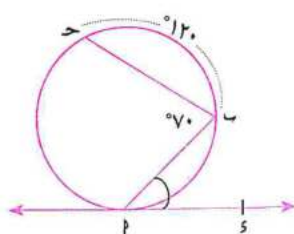
ق(∠ أ ء حـ) = ...°





ق(∠ ب أ حـ) = ...°

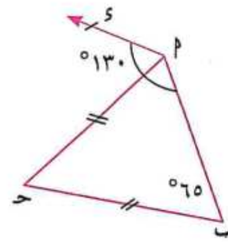




ق(∠ ب أ ء) = ...°

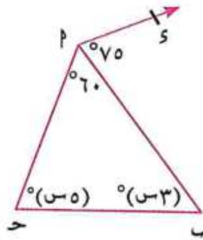
٣ في كل من الأشكال الآتية بيِّن أن $\overleftrightarrow{\text{ٯ ء}}$ مماس للدائرة التي تمر برءوس △ ٯ ب حـ :

(أ)

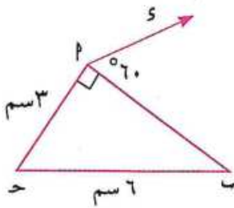


(القليوبية ٢٠٢٢)

(ب)



(جـ)



(القليوبية ٢٠٢٢)

---

٤ ٯ ب حـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة ، هـ نقطة خارجها، $\overleftarrow{\text{هـ ٯ}}$ ، $\overleftarrow{\text{هـ ب}}$ مماسان للدائرة عند ٯ ، ب،

فإذا كان ق(∠ ٯ هـ ب) = ٧٠° ، ق(∠ ٯ ء حـ) = ١٢٥°

فأثبت أن:

أولًا: ٯ ب = ٯ حـ

ثانيًا: $\overleftrightarrow{\text{ٯ حـ}}$ مماس للدائرة المارة بالنقط ٯ ، ب ، هـ

---

٥ ٯ ب حـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة ، تقاطع قطراه في هـ

رُسم $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مماسًا للدائرة عند حـ حيث $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب ء}}$ أثبت أن:

أولًا: $\overleftarrow{\text{ٯ حـ}}$ ينصف ∠ ب ٯ ء

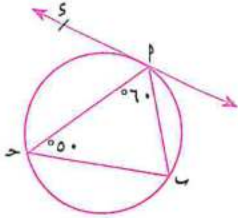
ثانيًا: $\overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ يمس الدائرة المارة برءوس △ ٯ ب هـ

---

٦ ٯ ب حـ ء متوازي أضلاع فيه: ٯ حـ = ب حـ

فأثبت أن: $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ مماس للدائرة الخارجة للمثلث ٯ ب حـ

١ اختر الإجابة الصحيحة:

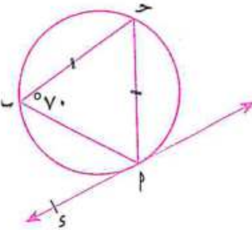


١ فى الشكل المقابل: (الشرقية ٢٠٢٢)

إذا كان $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ مماسًا فإن ق (∠ ء أ حـ) = ...

(أ) ٥٠° (ب) ٦٠°

(جـ) ٧٠° (د) ١١٠°

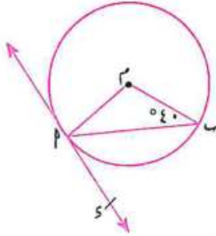


٢ فى الشكل المقابل: (دمياط ٢٠٢٢)

$\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ مماس، حـ أ = حـ ب فإن ق ($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = ...

(أ) ٣٥° (ب) ٤٠°

(جـ) ٧٠° (د) ٨٠°

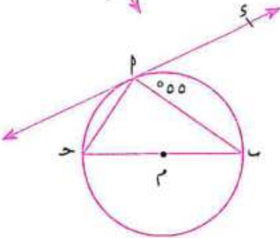


٣ فى الشكل المقابل: (الدقهلية ٢٠٢٢)

$\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ مماس فإن ق (∠ ب أ ء) = ...

(أ) ٤٠° (ب) ٥٠°

(جـ) ٨٠° (د) ١٠٠°



٤ فى الشكل المقابل: (بورسعيد ٢٠٢٢)

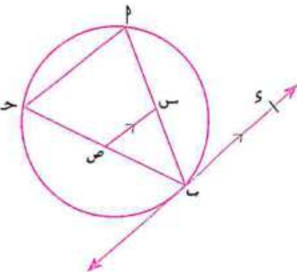
$\overline{\text{ب حـ}}$ قطر فى الدائرة م، $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ مماس فإن ق (∠ ب) = ...

(أ) ٩٠° (ب) ٦٠°

(جـ) ٥٥° (د) ٣٥°

---

٢ فى الشكل المقابل: (أسوان ٢٠٢٣)



أ ب حـ △ مرسوم داخل دائرة

$\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$ مماس للدائرة عند ب ، س ∈ $\overline{\text{أ ب}}$ ، ص ∈ $\overline{\text{ب حـ}}$

حيث $\overleftrightarrow{\text{ص س}}$ // $\overleftrightarrow{\text{ب ء}}$

أثبت أن: الشكل أ س ص حـ رباعى دائرى.

١ اختر الإجابة الصحيحة:

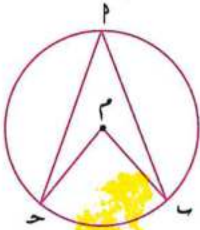
١ قوس من دائرة طوله $\frac{١}{٣}\pi$ نق سم، فإنه يقابل زاوية مركزية قياسها يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ٢٤٠°

٢ دائرة محيطها ٣٦ سم فإن قياس قوس منها طوله ٦ سم يساوى ....

(أ) ٦٠° (ب) ٣٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

٣ فى الشكل المقابل:

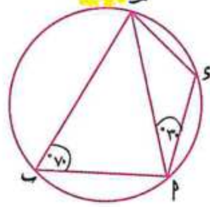


م دائرة ، إذا كان: ق (∠ ب م حـ) − ق (∠ أ) = ٥٠°

فإن: ق (∠ أ) = ...

(أ) ٤٠° (ب) ٥٠°
(جـ) ١٠٠° (د) ١٣٠°

٤ فى الشكل المقابل:

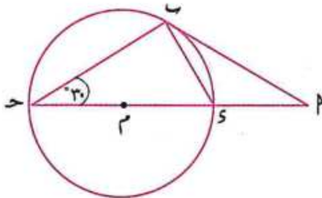


إذا كان: أ ب حـ ء شكلًا رباعيًا دائريًا

فإن: ق (∠ ء حـ أ) = ...

(أ) ٧٠° (ب) ٣٠°
(جـ) ١١٠° (د) ٤٠°

٥ فى الشكل المقابل:

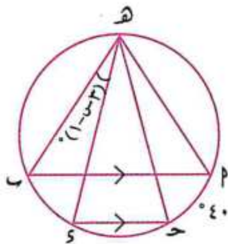


$\overline{أ ب}$ مماس للدائرة م ،

فإن: ق (∠ أ ب حـ) = ...

(أ) ١٢٠° (ب) ١١٠°
(جـ) ٩٠° (د) ٣٠°

٦ فى الشكل المقابل:

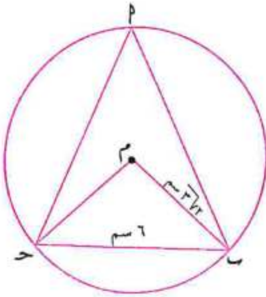


$\overline{أ ب}$ // $\overline{حـ ء}$ ، ق $(\overset{\frown}{أ حـ})$ = ٤٠°

، ق (∠ ء هـ ب) = (٣س − ١)° ، فإن: س = ...

(أ) $\frac{٤١}{٣}$ (ب) ٧
(جـ) ٢١ (د) ٤١

٢ أجب عما يأتى:



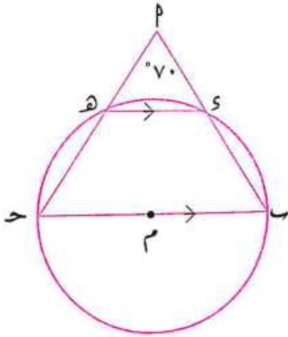
١ فى الشكل المقابل:

دائرة م فيها ب ح = ٦ سم

، ب م = ٢ √٣ سم

أوجد:

ق (∠ ب أ ح) [إرشاد: ارسم $\overline{م ى}$ ⊥ $\overline{ب ح}$]



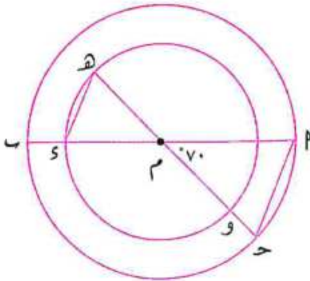
٢ فى الشكل المقابل:

$\overline{ب ح}$ قطر فى الدائرة م ،

ق(∠ أ) = ٧٠°

$\overline{ى هـ}$ // $\overline{ب ح}$

أوجد: ق (⌒ب ى)



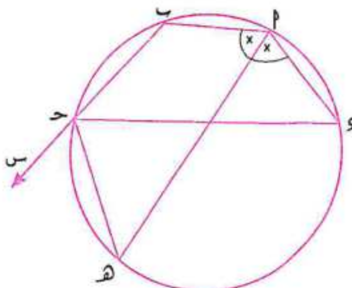
٣ فى الشكل المقابل:

دائرتان متحدتا المركز ، $\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة الكبرى

ق (∠ أ م ح) = ٧٠°

أوجد ق(∠ أ) ، ق(∠ ى)

ثم أثبت أن: $\overline{أ ح}$ // $\overline{هـ ى}$



٤ فى الشكل المقابل: (القاهرة ٢٠١٩)

أ ب ح ى شكل رباعى مرسوم داخل دائرة ،

$\overrightarrow{أ هـ}$ ينصف ∠ ب أ ى ويلاقى الدائرة فى نقطة هـ

أثبت أن: $\overrightarrow{ح هـ}$ ينصف ∠ س ح ى

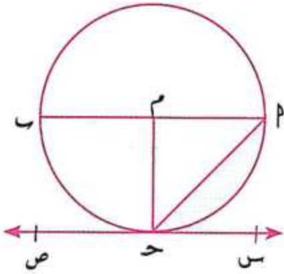
١ أكمل لتكون العبارة صحيحة:

١ فى الشكل الرباعى الدائرى كل زاويتين متقابلتين ....

٢ مركز الدائرة الداخلة لأى مثلث هو نقطة تقاطع ....

---

٢ فى الشكل المقابل:



م دائرة طول نصف قطرها ٧ سم،

$\overline{ٮب}$ قطر فيها $\overleftrightarrow{سص}$ مماس للدائرة عند حـ حيث $\overleftrightarrow{سص}$ // $\overleftrightarrow{ٮب}$

اختر الإجابة الصحيحة: (اعتبر $\pi \simeq \frac{٢٢}{٧}$)

١ ق ($\overset{\frown}{بحـ}$) = ...

(أ) ٤٥° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٨٠°

٢ طول ($\overset{\frown}{ٮحـ}$) ≃ ....

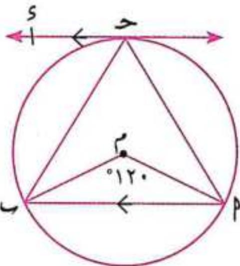
(أ) ١١سم (ب) ٢٢ سم (جـ) ٣٣ سم (د) ٤٤ سم

٣ مساحة المنطقة المظللة ≃ ....

(أ) ١٥٤سم^٢ (ب) ٧٧سم^٢ (ب) ٣٨,٥سم^٢ (د) ١٤سم^٢

---

٣ فى الشكل المقابل: (أسيوط ٢٠٢٤)



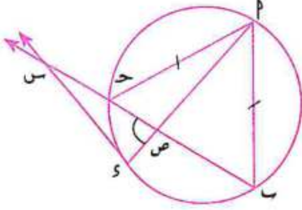
$\overleftrightarrow{حء}$ مماس للدائرة عند حـ، $\overleftrightarrow{حء}$ // $\overline{ٮب}$

ق (∠ ٮمب) = ١٢٠°

أثبت أن:

المثلث حـٮب مثلث متساوى الأضلاع

٤ في الشكل المقابل:



ٮ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة فيه:

ٮ ب = ٮ حـ ، ء ∋ $\overset{\frown}{\text{ب حـ}}$ ،

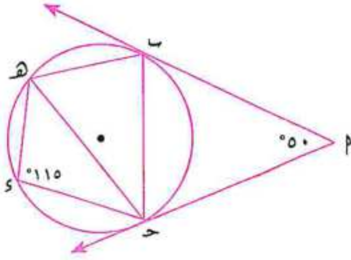
رُسم $\overleftarrow{\text{ء س}}$ مماسًا للدائرة عند ء

حيث $\overleftarrow{\text{ء س}} \cap \overleftrightarrow{\text{ب حـ}}$ = {س} ، $\overline{\text{ٮ ء}} \cap \overline{\text{ب حـ}}$ = {ص}

أثبت أن: س ص = س ء

---

٥ في الشكل المقابل:



$\overline{\text{ٮ ب}}$ ، $\overline{\text{ٮ حـ}}$ قطعتان مماستان للدائرة عند ب ، حـ

ق (∠ٮ) = °٥٠ ، ق (∠ حـ ء هـ) = °١١٥

أثبت أن :

أولًا: $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ينصف ∠ٮ ب هـ

ثانيًا: حـ ب = حـ هـ

الأضواء

الرياضيات



3 الصف الثالث الإعدادي
الفصل الدراسي الثاني

2026

المراجعة النهائية والامتحانات

المحتويات

أولًا: المراجعة النهائية وامتحانات الجبر والاحتمال

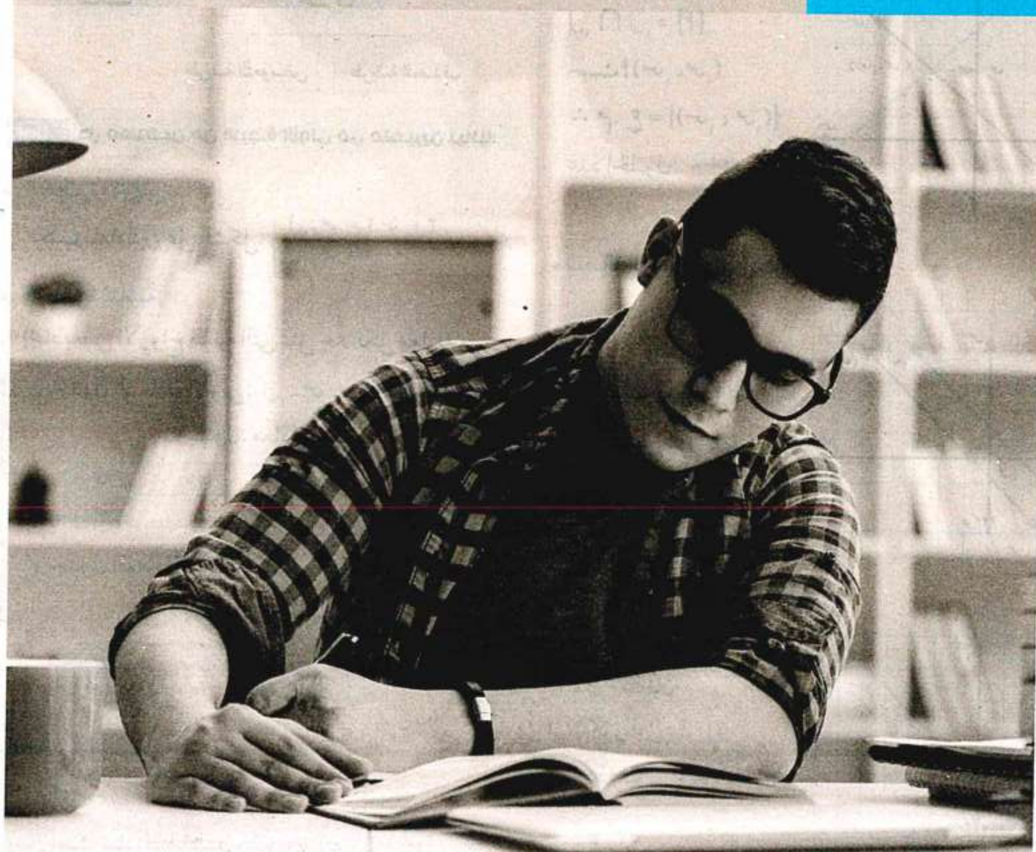


ثانيًا: المراجعة النهائية وامتحانات الهندسة المستوية



أولًا

المراجعة النهائية
وامتحانات الجبر والاحتمال



المحتويات

- ملخصات عامة على الوحدات الأولى و الثانية والثالثة.
- أسئلة هامة على الوحدات الأولى و الثانية و الثالثة من امتحانات المحافظات السابقة.
- مهارات تراكمية أساسية فى الجبر والاحتمال.
- نماذج اختبارات الجبر والاحتمال من الكتاب المدرسى.
- امتحانات المحافظات على الجبر والاحتمال سنة ٢٠٢٤ / ٢٠٢٥ م.

ملخص عام على الوحدة الأولى

حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين جبريًا وبيانيًا:

• لحل المعادلتين: ٢ س − ص = −٣ ، س + ص = ٦ آنيًا



أولًا حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين بيانيًا:

• الخطوة الأولى:

نكتب المعادلتين على الشكل: { $ل_١$: ص = ٢ س + ٣ ، $ل_٢$: ص = ٦ − س

• الخطوة الثانية:

إيجاد بعض الأزواج المرتبة التى تُمثل حلًا لكل معادلة:

١ جدول المعادلة الأولى: $ل_١$: ص = ٢ س + ٣

جدول: معادلة المستقيم $ل_١$

س	−١	صفر	١
ص	١	٣	٥

٢ جدول المعادلة الثانية: $ل_٢$: ص = ٦ − س

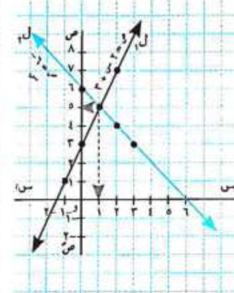
جدول: معادلة المستقيم $ل_٢$

س	صفر	١	٢
ص	٦	٥	٤

• الخطوة الثالثة:

الرسم فى المستوى الديكارتى:

حيث تمثل المعادلتان بيانيًا بالمستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$ على شكل واحد فى المستوى الديكارتى.



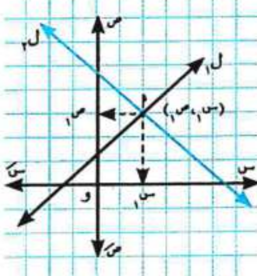
نجد أن $ل_١$ ، $ل_٢$ يتقاطعان فى النقطة (١ ، ٥) وهى تنتمى إلى $ل_١$ ، $ل_٢$ حيث يحقق إحداثياها المعادلتين فى آنٍ واحد «آنيًا».

∴ مجموعة الحل للمعادلتين معًا = {(١ ، ٥)}

لاحظ: (مجموعة الحل عبارة عن نقطة تقاطع المستقيم $ل_١$ مع المستقيم $ل_٢$)

حالات حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين بيانيًا:

• الحالة الأولى: $ل_١$ ، $ل_٢$ متقاطعان فى نقطة واحدة.



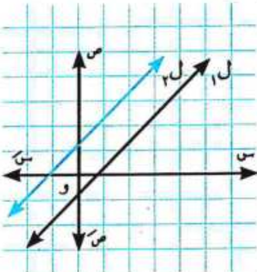
$ل_١ \cap ل_٢$ = {أ}

حيث أ (س$_١$ ، ص$_١$)

∴ م. ح = {(س$_١$ ، ص$_١$)}

عدد الحلول: حل وحيد.

• الحالة الثانية: $ل_١$ ، $ل_٢$ متوازيان.

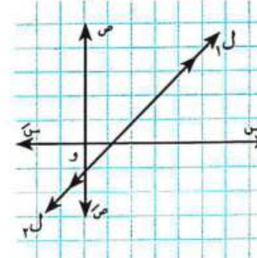


$ل_١$ // $ل_٢$ ، $ل_١ \cap ل_٢ = \varnothing$

∴ مجموعة الحل = $\varnothing$

عدد الحلول: يساوى صفرًا.

• الحالة الثالثة: $ل_١$ ، $ل_٢$ منطبقان.



$ل_١$ ، $ل_٢$ منطبقان

$ل_١ \cap ل_٢ = ل_١$ أو $ل_٢$

∴ عدد الحلول: عدد لا نهائى.

طرق إيجاد عدد الحلول بدون الرسم البيانى:

الطريقة الأولى: نوجد ميلى المستقيمين $ل_١$ ، $ل_٢$

إذا كان

ميل $ل_١$ ≠ ميل $ل_٢$
• المستقيمان متقاطعان فى نقطة واحدة
• عدد الحلول = ١

ميل $ل_١$ = ميل $ل_٢$
نقوم بإيجاد نقطتى تقاطع المستقيمين مع محور الصادات
(وذلك بوضع س = ٠ فى كل من المعادلتين)

إذا كانت النقطتان

منطبقتين: يكون المستقيمان منطبقين، ويكون عدد الحلول لا نهائيًا.

مختلفتين: يكون المستقيمان متوازيين وغير منطبقين ويكون عدد الحلول = صفر.

الطريقة الثانية: لدينا المعادلتان $\begin{cases} ل_1: أ_1 س + ب_1 ص = ج_1 \\ ل_2: أ_2 س + ب_2 ص = ج_2 \end{cases}$

يفضل وضع المعادلتين فى هذه الصورة للمقارنة بين المعاملات

١ إذا كان: $\frac{أ_1}{أ_2} \neq \frac{ب_1}{ب_2}$ فإن: المستقيمين **متقاطعان** فى نقطة واحدة، ويكون عدد الحلول: حلًا وحيدًا.

٢ إذا كان: $\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} \neq \frac{ج_1}{ج_2}$ فإن: المستقيمين **متوازيان** وغير منطبقين، ويكون عدد الحلول: صفرًا.

٣ إذا كان: $\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{ج_1}{ج_2}$ فإن: المستقيمين **منطبقان**، ويكون عدد الحلول: عددًا لانهائيًا.

ثانيا حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين جبريًا:

أولًا: بطريقة التعويض:

فمثلًا إذا كان لدينا المعادلتان: ٢ س − ص = −٣ ، س + ص = ٦ فنتبع الآتى:

نكتب أحد المتغيرين س أو ص بدلالة المتغير الآخر من المعادلة الأولى أو الثانية.	∵ ٢س − ص = −٣ ∴ ص = ٢س + ٣ (٣)
بالتعويض عن قيمة ص فى المعادلة الأخرى.	س + (٢س + ٣) = ٦ ٣س = ٣ س = ١
بالتعويض عن قيمة س فى المعادلة رقم (٣)	ص = ٢ (١) + ٣ ص = ٥

∴ مجموعة حل المعادلتين معًا = {(١ ، ٥)}

ثانيا: بطريقة الحذف:

أوجد فى ع × ع مجموعة الحل للمعادلتين: س + ص = ٦ ⟸ ١ ، ٢ س − ٣ ص = ٧ ⟸ ٢

نضع كلتا المعادلتين على الصورة: أ س + ب ص = ج	س + ص = ٦ (١) ٢س − ٣ص = ٧ (٢)
نجعل مُعامل أحد المتغيرين فى إحدى المعادلتين هو المعكوس الجمعى لنفس المعامل فى المعادلة الأخرى.	بضرب المعادلة (١) فى ٣ ٣س + ٣ص = ١٨ (٣)
بجمع المعادلتين (٢)، (٣) وإيجاد قيمة س	٢س − ٣ص = ٧ (٢) ٣س + ٣ص = ١٨ (٣) ٥س = ٢٥ س = ٥
بالتعويض فى إحدى المعادلتين لإيجاد قيمة ص	بالتعويض فى المعادلة رقم (١) ٥ + ص = ٦ ⟸ ص = ١

∴ م.ح = {(٥ ، ١)}

حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد بيانيًا وجبريًا:

• الصورة العامة للمعادلة التربيعية (معادلة الدرجة الثانية) فى متغير واحد هى:

أ $س^2$ + ب س + ج = ٠

حيث أ ∈ ع، ب ∈ ع، ج ∈ ع ، أ ≠ صفر

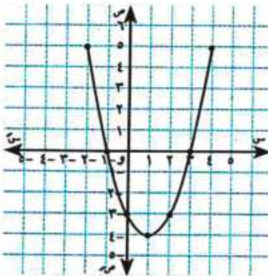
أولا حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد بيانيًا:

• لحل المعادلة التربيعية بيانيًا نرسم منحنى الدالة د، ثم نعين مجموعة الإحداثيات السينية لنقاط تقاطع منحنى الدالة التربيعية المناظرة لهذه المعادلة مع **محور السينات**، فتكون هى مجموعة حل المعادلة.

فمثلًا: لإيجاد مجموعة حل المعادلة: $س^2$ − ٢س − ٣ = ٠ مستعينًا بالفترة: [−٢ ، ٤]

س	−٢	−١	٠	١	٢	٣	٤
د (س)	٥	٠	−٣	−٤	−٣	٠	٥

م.ح = {٣ ، −١}



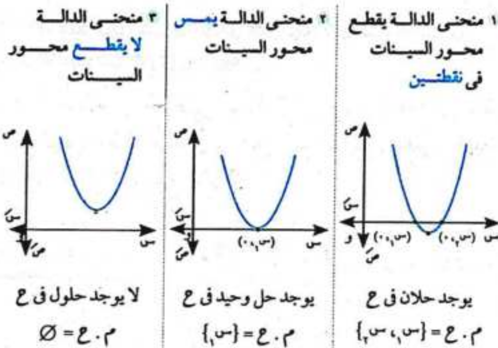
يمكن إيجاد نقطة رأس المنحنى بدون تمثيل منحنى الدالة بيانيًا كالآتى:

س = $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-(-٢)}{٢ \times ١}$ = ١ ،

ص = د (١) = −٤

نقطة رأس المنحنى: (١، −٤)

حالات رسم منحنى الدالة التربيعية:



ثانيا حل المعادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد جبريًا باستخدام القانون العام:

بفرض المعادلة: $أ س^{٢} + ب س + حـ = صفر$

حيث $أ$ معامل $س^{٢}$ ، $ب$ معامل $س$ ، $حـ$ الحد المطلق

حيث $أ \in ع$ ، $ب \in ع$ ، $حـ \in ع$ ، $أ \neq صفر$

يكون حل المعادلة باستخدام القانون العام:

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ حـ}}{٢ أ}$$

فمثلا: لإيجاد مجموعة حل المعادلة: $س^{٢} - ٤ س + ١ = ٠$

باستخدام القانون العام.

$س^{٢} - ٤ س + ١ = ٠$

$أ = ١$ ، $ب = -٤$ ، $حـ = ١$

$\because ب^{٢} - ٤ أ حـ = (-٤)^{٢} - ٤ (١)(١) = ١٢$

وبالتعويض فى القانون العام

$\therefore س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ حـ}}{٢ أ}$

$\therefore س = \frac{٤ \pm \sqrt{١٢}}{٢}$

$\therefore س = \frac{٤ \pm \sqrt{٤ \times ٣}}{٢}$

$\therefore س = \frac{٤ \pm ٢ \sqrt{٣}}{٢}$

$\therefore س = ٢ \pm \sqrt{٣}$

$\therefore س = ٢ + \sqrt{٣} \simeq ٣,٧$ أو $س = ٢ - \sqrt{٣} \simeq ٠,٣$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{٣,٧ ، ٠,٣\}$

حل معادلتين فى متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية.

حل المعادلتين معًا يعنى إيجاد الأزواج المرتبة التى تحقق المعادلتين معًا، ويعتمد حل المعادلتين على طريقة التعويض، لذلك سنتبع الآتى:

(١)	(٢)	(٣)
ابدأ بمعادلة الدرجة الأولى ومنها اكتب أحد المتغيرين بدلالة المتغير الآخر (س بدلالة ص أو ص بدلالة س)	نعوض عن س بدلالة ص أو نعوض عن ص بدلالة س فى معادلة الدرجة الثانية ثم نحلها لإيجاد قيمة أحد المتغيرين.	نعوض فى معادلة الدرجة الأولى لإيجاد قيمة المتغير الآخر.

فمثلا: لإيجاد مجموعة الحل للمعادلتين:

$س + ص = ٣ \Longleftarrow ١$ ، $س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٧ \Longleftarrow ٢$

من المعادلة ١ $\therefore س = ٣ - ص$ ٣

بالتعويض عن قيمة س فى المعادلة ٢

$\therefore (٣ - ص)^{٢} + ص (٣ - ص) + ص^{٢} - ٧ = ٠$

$٩ - ٦ ص + ص^{٢} + ٣ ص - ص^{٢} + ص^{٢} - ٧ = ٠$

$ص^{٢} - ٣ ص + ٢ = ٠$ تحليل مقدار ثلاثى بسيط

$\therefore (ص - ٢)(ص - ١) = صفر$

$\therefore ص = ٢$ أو $ص = ١$ بالتعويض فى المعادلة ٣

عندما $ص = ٢$ فإن: $س = ٣ - ٢ = ١$

عندما $ص = ١$

فإن: $س = ٣ - ١ = ٢$ $\therefore$ م.ح $= \{(١ ، ٢)، (٢ ، ١)\}$

أسئلة هامة على الوحدة الأولى من امتحانات المحافظات السابقة

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ المستقيمان ٢ س + ص = ٠ ، س − ٢ ص =٣ يتقاطعان فى .... (الإسكندرية ٢٠٢٢)

(ا) نقطة الأصل (ب) الربع الأول (جـ) الربع الثانى (د) الربع الرابع

٢ المستقيمان ٣ س + ٥ ص = صفر ، ٥ س − ٣ ص = صفر متقاطعان فى .... (كفر الشيخ ٢٠٢٤)

(ا) الربع الأول (ب) الربع الثانى (جـ) نقطة الأصل (د) الربع الثالث

٣ نقطة تقاطع المستقيمين س = ٤ ، ص −٣ = ٠ هى .... (الجيزة ٢٠٢٣)

(ا) (٤ ، ٣) (ب) (−٤ ، ٣) (جـ) (−٣ ، ٤) (د) (٣ ، ٤)

٤ نقطة تقاطع المستقيمين س + ٣ = صفر ، ص − ٥ = صفر تقع فى الربع .... (القليوبية ٢٠٢٤)

(ا) الأول (ب) الثانى (جـ) الثالث (د) الرابع

٥ إذا كانت نقطة تقاطع المستقيمين س − ١ = ٠ ، ص =٢ ك تقع فى الربع الرابع،

فإن ك يمكن أن تساوى .... (كفر الشيخ ٢٠١٦)

(ا) −٥ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٥

٦ عدد حلول المعادلتين: س + ص = ٢ ، ص − ٣ = س معًا فى ح × ح هو .... (سوهاج ٢٠٢٤)

(ا) صفر (ب) واحد (جـ) اثنان (د) عدد لا نهائى

٧ إذا كان للمعادلتين س + ٤ ص = ٧ ، ٣ س + ك ص = ٢١ عدد لا نهائى من الحلول،

فإن ك = ... (البحيرة ٢٠٢٤)

(ا) ٤ (ب) ٧ (جـ) ١٢ (د) ٢١

٨ عدد حلول المعادلتين س + ص = ٣ ، س + ص = ٢ معًا فى ح × ح هو .... (الجيزة ٢٠٢٤)

(ا) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٩ مجموعة حل المعادلتين: س + ص = ٢ ، ص − ٣ = صفر معًا هى .... (الجيزة ٢٠٢٣)

(ا) {(٣ ، ١)} (ب) {(−١ ، ٣)} (جـ) {(١ ، −٣)} (د) {(١ ، ٣)}

١٠ المستقيمان س + ٥ ص = ١ ، س + ٥ ص – ٨ = ٠ يكونان .... (أسيوط ٢٠٢٤)

(ا) متوازيين (ب) منطبقين

(جـ) متقاطعين وغير متعامدين (د) متعامدين

١١ إذا كان منحنى الدالة التربيعية د يمر بالنقاط (٤ ، ٠) ، (٠ ، –٨) ، (–٢ ، ٠)

فإن مجموعة الحل للمعادلة د (س) = ٠ هى .... (الشرقية ٢٠٢١)

(ا) {٤ ، ٠} (ب) {٨ ، ٠} (جـ) {-٢ ، ٤} (د) {٢ ، ٨}

١٢ منحنى الدالة د: د (س) = $س^٢$ – ٤ س + م يقطع محور السينات فى النقطتين (١ ، ٠) ، (٣ ، ٠) ،

فإن م = ... (الأقصر ٢٠٢٤)

(ا) ١ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٢

١٣ إذا كان المستقيمان س + ٣ ص = ٤ ، س + م ص = ٧ متوازيين فإن م = ... (القليوبية ٢٠١٨)

(ا) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٧ (د) ١١

١٤ معادلتا الدرجة الأولى فى متغيرين واللتان لهما عدد لا نهائى من الحلول فى ح × ح يمثلهما .

مستقيمان .... (الدقهلية ٢٠١٦)

(ا) متوازيان (ب) متقاطعان فى نقطة

(جـ) متعامدان (د) منطبقان

١٥ إذا كانت $س^٢$ – ٤ س ص + ٤ $ص^٢$ = صفر ، فإن س – ٢ ص + ٧ = ... (الشرقية ٢٠٢٢)

(ا) ٢ (ب) ٧ (جـ) ١٠ (د) ١٥

١٦ المستقيمان س + ٢ ص = ١ ، ٢ س + ٤ ص = ٢ يكونان .... (بورسعيد ٢٠٢٢)

(ا) متقاطعين (ب) متوازيين (جـ) متعامدين (د) منطبقين

١٧ إذا كان للمعادلتين س + ٤ ص = ٧ ، س + (ك – ١) ص = ٧ عدد لا نهائى من الحلول

فإن ك = ... (الفيوم ٢٠٢٢)

(ا) ٥ (ب) ٧ (جـ) ١٢ (د) ١٣

١٨ عدد حلول المعادلة: ٣ س + ٥ = ٠ فى ح × ح هو .... (قنا ٢٠٢٤)

(ا) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى

١٩ إذا كان ؟ ب = ٣ ، ؟ ب^{٢} = ١٢ فإن ب = ... (قنا ٢٠٢٤)

(أ) ٤ (ب) ٢ (جـ) − ٢ (د) ± ٢

٢٠ إذا كان س^{٢} + ١١ س + ٢٤ = (س + ؟) (س + ب) فإن ؟ + ب = ... (سوهاج ٢٠٢٣)

(أ) ٢٥ (ب) ٢٤ (جـ) ١٠ (د) ١١

٢١ إذا كانت مجموعة حل المعادلتين: س + ٢ ص = ٥ ، ٢ س + ك ص = ٣

فى ح × ح تساوى ∅ فإن : ك = ... (أسيوط ٢٠٢٣)

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) ٤ (د) −٤

٢٢ مجموعة حل المعادلتين: س = ٣ ، س ص = ١٥ فى ح × ح هى .... (بورسعيد ٢٠٢١)

(أ) {٥} (ب) {٣ ، ٥} (جـ) {(٥ ، ٣)} (د) {(٣ ، ٥)}

٢٣ إذا كانت مجموعة حل المعادلة: س^{٢} − ؟ س + ٤ = ٠ هى {−٢} فإن ؟ = ... (الغربية ٢٠١٧)

(أ) −٢ (ب) −٤ (جـ) ٢ (د) ٤

٢٤ إذا كانت: س = ص + ١ ، (س − ص)^{٢} + ص = ٣ فإن ص = ... (كفر الشيخ ٢٠١٧)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٢٥ مجموعة حل المعادلتين س = ص ، س ص = ١ هى .... (بورسعيد ٢٠٢٤)

(أ) {(١ ، ١)} (ب) {(−١ ، −١)} (جـ) {(١ ، −١)} (د) {(١،١) ، (−١،−١)}

٢٦ مجموعة حل المعادلتين: $\frac{١}{٢}$ س = ١ ، س + ص = ١ فى ح × ح هى .... (الشرقية ٢٠١٨)

(أ) {(٢ ، ١)} (ب) {(٢ ، −١)} (جـ) {٢ ، −١} (د) (٢ ، −١)

٢٧ مجموعة حل المعادلتين: س − ٢ ص = ١ ، ٣ س + ص = ١٠ فى ح × ح هى .... (المنيا ٢٠١٦)

(أ) {(٥ ، ٢)} (ب) {(٢ ، ٤)} (جـ) {(١ ، ٣)} (د) {(٣ ، ١)}

٢٨ عددان موجبان مجموعهما ٨ ، حاصل ضربهما ١٥ ، فإن العددين هما: .... (السويس ٢٠١٦)

(أ) ٢ ، ٦ (ب) ٣ ، ٥ (جـ) ٤ ، ٤ (د) ١ ، ١٥

٢٩ المنحنى ص = أ س^٢ + ب س + حـ يقطع محور الصادات فى النقطة .... (المنيا ٢٠٢٤)

(أ) (٠ ، ب) (ب) (ب، ٠) (جـ) (حـ ، ٠) (د) (٠ ، حـ)

٣٠ العدد المكون من رقمين والذى رقم آحاده س ، ورقم عشراته ص هو .... (الإسكندرية ٢٠٢٤)

(أ) ١٠ س ص (ب) س + ص (جـ) ص + ١٠ س (د) س + ١٠ ص

٣١ فى المعادلة أ س^٢ + ب س + حـ = صفر ، إذا كان ب^٢ − ٤ أ حـ < صفر ،

فإن عدد جذور المعادلة يساوى .... (الفيوم ٢٠١٩)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفرًا (د) عددًا لانهائيًّا

٣٢ عدد حلول المعادلة ٢ س − ص = ١ هو .... (بورسعيد ٢٠٢٤)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) صفر (د) عدد لا نهائى

٣٣ النقطة (٢، −١) تنتمى للمستقيم الذى معادلته: ....

(أ) س = ٣ (ب) ص = ٣ (جـ) س + ص = ٣ (د) س + ص = ١

٣٤ عددان موجبان مجموعهما ٣ ، ومجموع مربعيهما ٥ فإن العددين هما: .... (بورسعيد ٢٠٢٢)

(أ) ١ ، ٤ (ب) ٣ ، ٢ (جـ) ٠ ، ٨ (د) ١ ، ٢

---

٢ أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية فى ع × ع :

١ س + ٣ ص = ٧ ، ٥ س − ص = ٣ (الجيزة ٢٠٢٣)

٢ س + ص = ٢ ، ص = س + ٢ (القاهرة ٢٠٢١)

٣ ٢ س − ص = ٣ ، س + ٢ ص = ٤ (كفر الشيخ ٢٠٢٤)

٤ ٣ س − ص + ٤ = ٠ ، ص = ٢ س + ٣ (أسيوط ٢٠١٩)

٥ ٣ س + ص = ٣ ، ٢ س − ص = ٧ (الإسكندرية ٢٠٢٤)

٦ ٢ |س| − |ص| = ٢ ، ٣ |س| + |ص| = ٣ (الدقهلية ٢٠٢٤)

٣ أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية بيانيًا :

١ س + ص = ٤ ، ٢ س − ص = ٢ (الإسكندرية ٢٠١٧)

٢ ص = ٢س − ٣ ، س + ٢ص = ٤ (كفر الشيخ ٢٠٢٢)

٣ ٣س + ص = ٣ ، ٢س − ص = ٧ (بنى سويف ٢٠١٩)

٤ ٣س − ص + ٤ = ٠ ، ص = ٢س + ٣ (الفيوم ٢٠١٩)

٤ باستخدام القانون العام أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية:

١ س^{٢} − ٣س + ١ = صفر (مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد) (القاهرة ٢٠٢٤)

٢ ٢س^{٢} − ٥س + ١ = صفر (مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد) (كفر الشيخ ٢٠٢٤)

٣ ٣س^{٢} − ٥س + ١ = ٠ (مقربًا الجواب لأقرب رقمين عشريين) (أسوان ٢٠٢٤)

٤ س (س − ٥) = ٧ (مقربًا الناتج لأقرب رقم عشرى واحد) (الفيوم ٢٠٢١)

٥ س^{٢} − س − ٤ = صفر (حيث $\sqrt{١٧} \simeq ٤,١٢$) (الفيوم ٢٠٢٤)

٦ (س − ٤) (س − ٢) = ١ (علمًا بأن $\sqrt{٢} \simeq ١,٤١$) (المنوفية ٢٠١٧)

٧ ٢س^{٢} + ١ = ٤ س (مقربًا لأقرب رقمين عشريين) (كفر الشيخ ٢٠٢٢)

٨ $\frac{س}{٣} = \frac{١}{٥ - س}$ (مقربًا لأقرب رقمين عشريين) (أسيوط ٢٠٢٤)

٩ $١ - \frac{٢}{س} = \frac{٢}{س^{٢}}$ حيث س ≠ ٠ مقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية (الدقهلية ٢٠٢٤)

٥ أوجد مجموعة حل المعادلات الآتية فى ح × ح:

١ س − ص = صفر ، س^{٢} + س ص + ص^{٢} = ٢٧ (الفيوم ٢٠٢٤)

٢ س − ص = ١ ، س^{٢} − ص^{٢} = ٢٥ (البحيرة ٢٠٢٤)

٣ س − ١ = ٠ ، س^{٢} + ص^{٢} = ١٠ (بورسعيد ٢٠٢١)

٤ س − ص = صفر ، س^{٢} + ص = ٢ (القاهرة ٢٠٢٤)

٥ ص = ٣ − س ، س ص = ٢ (سوهاج ٢٠٢١)

٦ س − ٢ ص − ١ = ٠ ، س^{٢} − س ص = ٠ (المنيا ٢٠٢٤)

٧ ص + ٢ س = ٧ ، (ص + ٢ س − ٨)^{٢} + س^{٢} = ٥ (الدقهلية ٢٠٢١)

٦ إذا كانت (−٣ ، ١) حلًّا للمعادلتين: (الدقهلية ٢٠٢٤)

م س + ب ص = ٥ ، ٣ م س + ب ص − ١٧ = ٠ فأوجد قيمتى م ، ب

٧ إذا كانت مجموعة حل المعادلة: (بنى سويف ٢٠٢٤)

م س^{٢} + ب س + ٤ = ٠ هى {−١، ١} فأوجد قيمة كل من : م ، ب

٨ زاويتان حادتان فى مثلث قائم الزاوية ، الفرق بين قياسيهما ٥٠° ، أوجد قياس كل منهما (الدقهلية ٢٠٢١)

٩ عددان نسبيان مجموعهما ١٢ ، ثلاثة أمثال أصغرهما يزيد عن ضعف أكبرهما بمقدار واحد ، أوجد العددين. (البحيرة ٢٠١٧)

١٠ عدد مكون من رقمين مجموعهما ١١ فإذا عُكس (بُدل) وضع الرقمين فإن العدد الناتج يزيد عن العدد الأصلى بمقدار ٢٧ ، فما هو العدد الأصلى؟ (كفر الشيخ ٢٠١٦)

١١ مستطيل طوله يزيد عن عرضه بمقدار ٣ ، فإذا كان محيطه ٣٠ سم، فأوجد مساحته. (الفيوم ٢٠٢٢)

١٢ مستطيل طوله ضعف عرضه ومحيطه ١٨ سم. أوجد مساحته. (قنا ٢٠٢٤)

١٣ عددان حقيقيان موجبان مجموعهما ٧ ومجموع مربعيهما ٣٧، أوجد العددين. (قنا ٢٠٢١)

١٤ عددان حقيقيان موجبان الفرق بينهما ١ ومجموع مربعيهما ٢٥، أوجد العددين. (بنى سويف ٢٠٢٢)

١٥ مستطيل محيطه ١٨ سم ومساحته ١٨ سم^{٢}، أوجد كلًّا من بعديه. (الوادى الجديد ٢٠١٦)

١٦ تتحرك نقطة على المستقيم ٥ س − ٢ ص = ١ بحيث كان إحداثيها الصادى ضعف مربع إحداثيها السينى. أوجد إحداثيى هذه النقطة. (الدقهلية ٢٠٢٤)

١٧ أوجد بيانيًّا مجموعة حل المعادلتين ٢ س − ص = ٥ ، س + ص = ٤، (الوادى الجديد ٢٠٢٣)

ثم أوجد مساحة المثلث المحدد بالمستقيمين الممثلين للمعادلتين ومحور الصادات.

ملخص عام على الوحدة الثانية

الدوال الكسرية والعمليات عليها

أولا مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود:

• هى مجموعة قيم س التى تجعل د (س) = صفر ونرمز لها بالرمز ص (د).

فمثلًا: لإيجاد ص (د) للدالة د: د (س) = $\text{س}^{٢}$ − ٣ س + ٢

نضع $\text{س}^{٢}$ − ٣ س + ٢ = ٠ ⟸ (س−٢) (س − ١) = ٠

∴ ص (د) = {٢ ، ١}

حالات خاصة:

١ إذا كانت د (س) = أ حيث أ ≠ ٠ فإن ص (د) = ∅

٢ إذا كانت د (س) = ٠ فإن ص (د) = ح

٣ إذا كانت د (س) = $\text{س}^{٢}$ + أ ، أ >٠ فإن ص (د) = ∅

ثانيا الدالة الكسرية الجبرية:

• صورتها: $\text{ن (س)} = \frac{\text{د(س)}}{\text{ر(س)}}$ ← البسط ، ← المقام

١ مجال الدالة الكسرية = ح − مجموعة أصفار المقام

٢ مجموعة أصفار الدالة الكسرية الجبرية

= مجموعة أصفار البسط − مجموعة أصفار المقام

فمثلًا: إذا كانت $\text{ن (س)} = \frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٤}$

فإن: $\text{ن (س)} = \frac{\text{س (س + ٢)}}{\text{(س−٢) (س+٢)}}$

مجموعة أصفار البسط = {٠ ، −٢}،

مجموعة أصفار المقام {٢ ، −٢}

∴ ص (ن) = {٠ ، −٢} − {٢ ، −٢} = {٠}

٣ المجال المشترك لكسرين جبريين = ح − مجموعة أصفار مقامى الكسرين.

فمثلًا: المجال المشترك للكسرين الجبريين.

$\text{ن}_{١}\text{ (س)} = \frac{٢}{\text{س} - ٢}$ ، $\text{ن}_{٢}\text{ (س)} = \frac{\text{٣−س}}{\text{س+١}}$

فإن: مجال $\text{ن}_{١}$ = ح −{٢} ، مجال $\text{ن}_{٢}$ = ح −{−١}

∴ المجال المشترك للكسرين الجبريين = ح −{٢ ، −١}

٤ خطوات اختزال الكسر الجبرى:

الخطــوة (١)	الخطــوة (٢)	الخطــوة (٣)
نحـلل كلًّا من البسـط والمقــام	نعين مجـال الكسـر الجبرى قبل حذف العوامل المشتركة	نحذف العوامل المشتركة من البسط والمقام

فمثلًا: اختزل (اختصر) الكسر : $\text{ن (س)} = \frac{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٩}$

(١) $\text{ن (س)} = \frac{\text{س (س+٣)}}{\text{(س+٣) (س−٣)}}$

(٢) مجال ن = ح −{−٣،٣}

(٣) $\text{ن (س)} = \frac{\text{س}}{\text{س−٣}}$

٥ تساوى كسرين جبريين:

الكسران الجبريان $\text{ن}_{١}$ ، $\text{ن}_{٢}$ متساويان إذا تحقق فيهما الشرطان الآتيان معًا:

(١) مجال $\text{ن}_{١}$ = مجال $\text{ن}_{٢}$

(٢) $\text{ن}_{١}$ (س) = $\text{ن}_{٢}$(س) بعد الاختزال (الاختصار) لكل س ∈ المجال المشترك.

ثالثا العمليات على الكسور الجبرية:

١ خطوات جمع وطرح الكسور الجبرية:

(١) ترتيب حدود البسط والمقام وتحليل كل منها تحليلًا تامًّا.

(٢) إيجاد المجال المشترك قبل الاختزال.

(٣) اختزال كل كسر على حدة ثم توحيد المقام.

(٤) إجراء عملية الجمع أو الطرح ووضع الناتج فى أبسط صورة.

٢ خطوات ضرب الكسور الجبرية:

(١) ترتيب حدود البسط والمقام وتحليل كل منها تحليلًا تامًّا.

(٢) إيجاد المجال المشترك قبل الاختزال.

(٣) حذف العوامل المشتركة من البسوط والمقامات.

(٤) إجراء عملية الضرب ووضع الناتج فى أبسط صورة.

٣ المعكوس الضربى للكسر الجبرى:

إذا كان ن كسرًا جبريًّا حيث $\text{ن (س)} = \frac{\text{ق (س)}}{\text{ك(س)}} \neq ٠$

فإن: ن يكون له معكوس ضربى هو $\text{ن}^{-١}$ حيث $\text{ن}^{-١}\text{ (س)} = \frac{\text{ك (س)}}{\text{ق(س)}}$

ويكون مجال $\text{ن}^{-١}$ هو ح − مجموعة أصفار بسط ومقام الكسر.

٤ خطوات قسمة الكسور الجبرية:

إذا كان $\text{ن}_{١}$ ، $\text{ن}_{٢}$ كسرين جبريين حيث:

$\text{ن}_{١}\text{ (س)} = \frac{\text{د(س)}}{\text{ر(س)}}$ ، $\text{ن}_{٢}\text{ (س)} \frac{\text{ق (س)}}{\text{ك(س)}}$

فإن: $\text{ن}_{١}$ (س) ÷ $\text{ن}_{٢}$ (س) = $\text{ن}_{١}$ (س) × $\text{ن}_{٢}^{-١}$ (س)

$= \frac{\text{د(س)}}{\text{ر(س)}} \times \frac{\text{ك (س)}}{\text{ق(س)}}$

حيث مجال: ($\text{ن}_{١}$ ÷ $\text{ن}_{٢}$) = المجال المشترك لكل من $\text{ن}_{١}$ ، $\text{ن}_{٢}^{-١}$

= ح − (ص (ر) ∪ ص (ق) ∪ ص (ك))

أسئلة هامة على الوحدة الثانية من امتحانات المحافظات السابقة

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ مجموعة أصفار الدالة د : د(س) = -٣ س هى .... (الجيزة ٢٠١٧)

(أ) {٠} (ب) {٣} (جـ) {-٣} (د) ع - {-٣}

٢ مجموعة أصفار الدالة د: د(س) = $س^{٢}$ + ١ هى .... (القليوبية ٢٠٢٤)

(أ) {١} (ب) {-١} (جـ) {١ ، -١} (د) ∅

٣ مجموعة أصفار الدالة د : د(س) = س (س - ١) هى .... (جنوب سيناء ٢٠١٦)

(أ) {١} (ب) {٠ ، -١} (جـ) {٠ ، ١} (د) {٠}

٤ مجموعة أصفار الدالة د : د(س) = س ($س^{٢}$ - ٢س + ١) هى .... (الإسماعيلية ٢٠١٧)

(أ) {٠ ، ١} (ب) {٠ ، -١} (جـ) {-١ ، ١} (د) {٠ ، ١ ، -١}

٥ مجموعة أصفار الدالة د: د(س) = ٤ هى .... (أسوان ٢٠١٧)

(أ) {-٤} (ب) {صفر} (جـ) ∅ (د) {٢}

٦ مجموعة أصفار الدالة د : د(س) = $س^{٢}$ - ١٦ هى .... (الإسكندرية ٢٠٢٢)

(أ) {-٤} (ب) {٤} (جـ) {٤ ، -٤} (د) ∅

٧ مجموعة أصفار الدالة د : د(س) = $س^{٢}$ - ٥س + ٦ هى .... (المنوفية ٢٠٢٢)

(أ) {٢ ، ٣} (ب) {٥ ، ٦} (جـ) ع - {٥ ، ٦} (د) ع - {٢ ، ٣}

٨ مجموعة أصفار الدالة د : د(س) = $(س - ١)^{٢}$ (س + ٢) هى .... (الإسكندرية ٢٠٢٤)

(أ) {١ ، -٢} (ب) {-١ ، ٢} (جـ) {-١ ، -٢} (د) {١ ، ٢}

٩ مجموعة أصفار الدالة د: د(س) = $س^{٣}$ - ٩س هى .... (البحيرة ٢٠٢٢)

(أ) {٠ ، ٣} (ب) {٠ ، -٣ ، ٣} (جـ) {-٣ ، ٣} (د) ∅

١٠ مجموعة أصفار الدالة د : د(س) = صفر هى .... (الفيوم ٢٠٢٤)

(أ) ع - {٠} (ب) ∅ (جـ) صفر (د) ع

١١ مجموعة أصفار الدالة د : د(س) = $س^{٢}$ - ٢س + ١ هى .... (بنى سويف ٢٠٢٢)

(أ) {١ ، -١} (ب) {١} (جـ) {٢ ، -١} (د) {٠ ، ١}

١٢ مجموعة أصفار الدالة د: د(س) = $\frac{س - ٣}{س + ٢}$ هو .... (الإسماعيلية ٢٠٢٤)

(أ) {٣} (ب) {-٣} (جـ) {٢} (د) {-٢}

١٣ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $س^٢$ – ٤ هى .... (القليوبية ٢٠٢١)

(أ) {٢} (ب) {٢ ، -٢} (جـ) ح (د) ∅

١٤ إذا كانت {-٢ ، ٢} هى مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = $س^٢$ + أ فإن أ = ... (الشرقية ٢٠٢١)

(أ) ٢ (ب) -٢ (جـ) ٤ (د) -٤

١٥ مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = $\frac{س - ٣}{س^٢ - ٤}$ هى .... (مطروح ٢٠١٨)

(أ) ح - {٢ ، -٢} (ب) ح - {٣} (جـ) {٣} (د) {٣ ، ٢ ، -٢}

١٦ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $\frac{س^٢ - س - ٢}{س^٢ - ٤}$ هى .... (المنوفية ٢٠١٨)

(أ) {٢ ، -٢} (ب) {-٢} (جـ) {-١} (د) {٢ ، -١}

١٧ إذا كانت الدالة د : د (س) = $س^٢$ + س + أ وكانت مجموعة أصفار الدالة هى {١ ، -٢}

فإن أ = ... (أسوان ٢٠١٩)

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) -١ (د) -٢

١٨ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = $\frac{س^٢ - س - ٢}{س^٢ + ٤}$ هى .... (الدقهلية ٢٠٢٤)

(أ) {٢ ، -٢} (ب) {-٢ ، -١} (جـ) {٢ ، -١} (د) {١ ، -١}

١٩ مجال الدالة د : ح ⟵ ح ، د (س) = $س^٢$ – ٤ هو .... (قنا ٢٠١٨)

(أ) ح - {٢} (ب) ح - {٢ ، -٢} (جـ) ح (د) ح - {-٢}

٢٠ مجال الدالة د: د (س) = $\frac{س + ٢}{س - ١}$ هو .... (الجيزة ٢٠٢٤)

(أ) ح (ب) ح - {١} (جـ) ح - {-٢} (د) ح - {١ ، -٢}

٢١ يكون للدالة د حيث د (س) = $\frac{س - ١}{س - ٥}$ معكوس جمعى فى المجال .... (بور سعيد ٢٠٢٤)

(أ) ح - {٥} (ب) ح - {١} (جـ) ح - {-٥} (د) ح - {٥ ، ١}

٢٢ مجال الدالة ں: ں (س) = $\frac{س - ١}{س}$ هو .... (القليوبية ٢٠٢٢)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ح - {٠} (د) ح - {١}

٢٣ إذا كانت الدالة ں: ں (س) = $\frac{س - ٤}{س + ٥}$ فإن مجال ں = ... (القليوبية ٢٠٢١)

(أ) ح - {-٥} (ب) ح - {٤} (جـ) ح (د) ح - {-٥ ، ٤}

٢٤ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{س - ٣}{٤}$ يساوى .... (بورسعيد ٢٠٢٢)

(أ) ع (ب) ع - {-٤} (جـ) ع - {-٤ ، ٣} (د) ∅

٢٥ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{س + ٢}{٥ س}$ هو .... (القليوبية ٢٠١٧)

(أ) ع - {٥} (ب) ع - {-٥} (جـ) ع (د) ع - {٠}

٢٦ إذا كانت الدالة ن (س) = $\frac{س^٢ - ٩}{س^٢ - ٧س + ٦}$ فإن ن (س) غير معرفة إذا كانت س ∋ .... (الدقهلية ٢٠٢٣)

(أ) {٧ ، -٦} (ب) {٢ ، ٣} (جـ) {١ ، ٦} (د) {-١ ، -٦}

٢٧ مجال الدالة الكسرية د : د (س) = $\frac{٤ س}{س - ٥}$ هو .... (الفيوم ٢٠٢٢)

(أ) ع (ب) ع - {٥} (جـ) ع - {٤ ، ٥} (د) {٠}

٢٨ مجال المعكوس الضربى للدالة ن : ن (س) = $\frac{س + ٢}{س - ٣}$ هو .... (البحيرة ٢٠٢٤)

(أ) ع - {٣} (ب) ع - {-٣} (جـ) ع (د) ع - {-٢ ، ٣}

٢٩ إذا كان مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{س + ٣}{س + ك}$ هو ع - {٥} فإن قيمة ك = ... (الأزهر ٢٠٢٤)

(أ) -٣ (ب) -٥ (جـ) ٣ (د) ٥

٣٠ مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{س - ٧}{٣ (س + ١)}$ هو .... (البحيرة ٢٠١٦)

(أ) ع (ب) ع - {-١} (جـ) ع - {١} (د) ع - {-١ ، ٣}

٣١ مجال الدالة ن : ن (س) = $\frac{س}{س^٢ - ١}$ هو .... (البحيرة ٢٠١٩)

(أ) {-١} (ب) ع - {١} (جـ) {١ ، -١} (د) ع - {١ ، -١}

٣٢ مجال الكسر الجبرى $\frac{س - ٥}{٣}$ يساوى مجال الكسر الجبرى .... (القليوبية ٢٠١٦)

(أ) $\frac{س}{س^٢ + ١}$ (ب) $\frac{س}{س - ٣}$ (جـ) $\frac{س}{س - ٥}$ (د) $\frac{س - ٥}{س - ٣}$

٣٣ المجال المشترك للكسرين $\frac{٧}{س - ٥}$ ، $\frac{٨}{س - ٣}$ هو .... (بورسعيد ٢٠٢٢)

(أ) ع (ب) ع - {٥ ، ٣} (جـ) ع - {٥} (د) ع - {٣}

٣٤ المجال المشترك للكسرين $\frac{٢}{س - ٣}$ ، $\frac{٧}{٢س - ٦}$ هو .... (الغربية ٢٠١٦)

(أ) ع (ب) ع - {٠ ، ٣} (جـ) ع - {٣} (د) ع - {٣ ، -٣}

٣٥ إذا كانت ر (س) = $\frac{س - ٣}{س - ٥}$ فإن مجال $ر^{-١}$ هو .... (المنيا ٢٠٢٤)

(أ) ع (ب) ع - {٥} (جـ) ع - {٣} (د) ع - {٣ ، ٥}

٣٦ إذا كان $ر_١$ (س) = $\frac{١}{س - ٣}$ ، $ر_٢$ (س) = $\frac{س}{س - ٣}$ وكان ر (س) = $ر_١$ (س) + $ر_٢$ (س)

فإن مجال $ر^{-١}$ =............ (الشرقية ٢٠٢٤)

(أ) ع - {٠} (ب) ع - {٣} (جـ) ع (د) ع - {-١ ، ٣}

٣٧ إذا كان ر (س) = $\frac{س - ٣}{س + ٢}$ فإن $ر^{-١}$ (٣) .... (الغربية ٢٠٢٤)

(أ) = صفر (ب) = ٣ (جـ) = -٢ (د) غير معرف

٣٨ إذا كانت الدالة ر : ر (س) = $\frac{س - ٢}{س^٢ - س - ٦}$ فإن مجال $ر^{-١}$ هو .... (البحيرة ٢٠١٧)

(أ) ع - {٢} (ب) ع - {-٢ ، ٣} (جـ) ع - {-٢ ، ٢} (د) ع - {-٢ ، ٢ ، ٣}

٣٩ إذا كانت الدالة ر : ر (س) = $\frac{س - ١}{س^٢ + ١}$ فإن: مجال $ر^{-١}$ هو .... (شمال سيناء ٢٠٢١)

(أ) {-١} (ب) ع - {١ ، -١} (جـ) ع - {-١} (د) ع - {١}

٤٠ إذا كانت د(أ) = $\frac{٤أ^٢ - ٢أ}{٢أ}$ ، حيث أ ≠ ٠ ، فإن: د(أ) فى أبسط صورة هى .... (بنى سويف ٢٠٢٤)

(أ) ٢أ (ب) ٢أ - ١ (جـ) ٤أ^٢ - ١ (د) صفر

٤١ إذا كانت س = ٣ أحد أصفار الدالة د : د (س) = $\frac{س^٢ - ٢س - ك}{س^٢ - ٢٥}$ فإن ك = ... (أسيوط ٢٠٢٤)

(أ) ٣ (ب) ٦ (جـ) -٣ (د) -٦

٤٢ إذا كان ص (د) = {٢} ، د (س) = $س^٣$ - م فإن م = ... (الأقصر ٢٠٢١)

(أ) $\sqrt{٢}$ (ب) ٤ (جـ) ٢ (د) ٨

٤٣ المعكوس الجمعى للكسر الجبرى: $\frac{٢}{س + ١}$ هو .... (السويس ٢٠٢١)

(أ) $\frac{٢}{س - ١}$ (ب) $\frac{-٢}{س + ١}$ (جـ) $\frac{س + ١}{-٢}$ (د) $\frac{س - ١}{٢}$

٤٤ أبسط صورة للمقدار: $\frac{٢}{س - ٢} - \frac{س}{س - ٢}$ هى .... (بورسعيد ٢٠٢٢)

(أ) $\frac{٢}{س - ٢}$ (ب) $\frac{س}{س - ٢}$ (جـ) -١ (د) ١

٤٥ إذا كانت (س ≠ صفر) فإن: $\frac{٥س}{س^٢ + ١} \div \frac{س}{س^٢ + ١}$ = ... (بورسعيد ٢٠٢٢)

(أ) -٥ (ب) -١ (جـ) ١ (د) ٥

٤٦ إذا كانت الدالة ن : ن (س) = $\frac{س - ٣}{س + ٢}$ ، $ن^{-١}$ (ك) = $\frac{٧}{٢}$ فإن ك = ... (الدقهلية ٢٠٢٢)

(أ) -٤ (ب) ٥ (جـ) -٥ (د) $\frac{-٨}{٩}$

٤٧ إذا كانت (س ≠ صفر) فإن: $\frac{٣س}{س^٢ - ٥} \div \frac{س}{٥ - س^٢}$ = ... (القليوبية ٢٠٢٢)

(أ) ٣ (ب) -١ (جـ) ١ (د) -٣

٤٨ أبسط صورة للدالة $\frac{٢س}{س + ١} + \frac{س}{س + ١}$ هى .... (المنيا ٢٠١٩)

(أ) $\frac{٣س}{س + ١}$ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) $\frac{٢}{س + ١}$

٤٩ إذا كانت الدالة ن : ن (س) = $\frac{١}{س} - \frac{٣}{س}$ فإن: $ن^{-١}$ (س) = ...(حيث س ≠ ٠) (الوادى الجديد ٢٠١٦)

(أ) $س - \frac{س}{٣}$ (ب) $\frac{٢}{س}$ (جـ) $\frac{-س}{٢}$ (د) $\frac{س}{٢}$

---

٢ أثبت أن $ن_١ = ن_٢$ إذا كان:

١ $ن_١(س) = \frac{س^٣ - ١}{س^٣ + س^٢ + س}$ ، $ن_٢(س) = \frac{(س - ١)(س^٢ + ١)}{س^٣ + س}$ (الجيزة ٢٠٢٣)

٢ $ن_١(س) = \frac{٢س}{٢س + ٨}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ + ٤س}{س^٢ + ٨س + ١٦}$ (الإسكندرية ٢٠٢٢)

٣ $ن_١(س) = \frac{س^٢}{س^٣ - س^٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٣ + س^٢ + س}{س^٤ - س}$ (البحيرة ٢٠٢٤)

٤ $ن_١(س) = \frac{٢س^٣ + ٦س}{(س - ١)(س^٢ + ٣)}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٢س}{س - ١}$ (الإسكندرية ٢٠٢٤)

٥ $ن_١(س) = \frac{١}{س - ٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ + ٢س + ٤}{س^٣ - ٨}$ (القاهرة ٢٠٢١)

٣ بيّن فيما يأتى هل كانت $ن_1 = ن_2$ أو لا، مع ذكر السبب: (الدقهلية ٢٠٢٢)

$$ن_1(س) = \frac{س^2 - ٤}{س^2 + س - ٦} \quad ، \quad ن_2(س) = \frac{س^2 - س - ٦}{س^2 - ٩}$$

---

٤ أوجد المجال المشترك للكسرين الجبريين: $\frac{س - ٤}{س^2 - ٥س + ٦}$ ، $\frac{٢س}{س^3 - ٩س}$ (الأقصر ٢٠١٩)

---

٥ إذا كان $ن_1(س) = \frac{س^2 - ٤}{س^2 + س - ٦}$ ، $ن_2(س) = \frac{س^2 - س - ٦}{س^2 - ٩}$ (كفر الشيخ ٢٠٢٤)

فأثبت أن: $ن_1(س) = ن_2(س)$ لجميع قيم س التى تنتمى إلى المجال المشترك، وأوجد هذا المجال.

---

٦ أوجد ن (س) فى أبسط صورة موضحًا مجالها:

١ $ن(س) = \frac{٥}{س - ٣} + \frac{٤}{٣ - س}$ (الجيزة ٢٠٢٣)

٢ $ن(س) = \frac{٢}{س + ٣} + \frac{٣س}{س^2 + ٣س}$ (القاهرة ٢٠٢٣)

٣ $ن(س) = \frac{س^2 + س}{س^2 - ١} + \frac{٥ - س}{س^2 - ٦س + ٥}$ (القليوبية ٢٠٢٣)

٤ $ن(س) = \frac{س^2 + ٢س + ٤}{س^3 - ٨} + \frac{س^2 - ٩}{س^2 + س - ٦}$ (الجيزة ٢٠٢٢)

٥ $ن(س) = \frac{س^2 - ٨س + ١٢}{س^2 - ٤س + ٤} + \frac{س^2 - ٤س - ٥}{س^2 - ٧س + ١٠}$ (البحيرة ٢٠٢٤)

٦ $ن(س) = \frac{س^2 + س + ١}{س^3 - ١} - \frac{س^2 + س}{س^2 - ١}$ (القليوبية ٢٠٢٢)

٧ $ن(س) = \frac{س^2 - ٥س + ٦}{س^2 - ٦س + ٩} - \frac{٤ - س}{س - ٣}$ (الفيوم ٢٠٢٢)

٨ $ن(س) = \frac{س^2 + س}{س^2 - س - ٢} - \frac{٢س + ٤}{س^2 - ٤}$ (الإسماعيلية ٢٠٢٤)

٩ $ن(س) = \frac{٣س - ١٥}{س + ٣} \times \frac{٤س + ١٢}{٥س - ٢٥}$ (القليوبية ٢٠٢٢)

١٠ $ن(س) = \frac{س^3 - ١}{س - ١} \times \frac{س + ٣}{س^2 + س + ١}$ (المنوفية ٢٠٢٢)

١١ $ن(س) = \frac{٦}{س^٢ - ٩} \times \frac{١}{س + ٣}$ (المنوفية ٢٠٢٢)

١٢ $ن(س) = \frac{س^٣ - ١}{س^٢ - س} \times \frac{س + ٣}{س^٢ + س + ١}$ (الغربية ٢٠٢٢)

١٣ $ن(س) = \frac{س}{س - ٢} \div \frac{٢س + ٤}{س^٢ - ٤}$ (أسوان ٢٠٢١)

١٤ $ن(س) = \frac{س^٢ + ٢س}{س^٣ - ٨} \div \frac{س + ٢}{س^٢ + ٢س + ٤}$ (بنى سويف ٢٠٢٤)

١٥ $ن(س) = \frac{س^٣ - ١}{س^٢ - ٢س + ١} \div \frac{س^٢ + س + ١}{٢س - ٢}$ (البحيرة ٢٠٢٢)

١٦ $ن(س) = \frac{س - ٥}{س^٢ - ٢س - ١٥} \div \frac{٨}{٢س + ٦}$ (الإسماعيلية ٢٠٢٢)

---

٧ **أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن حيث:** $ن(س) = \frac{٣س}{س^٢ - س - ٢} + \frac{س - ١}{١ - س^٢}$ (مطروح ٢٠١٩)

---

٨ **أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبينًا مجالها حيث:** (القاهرة ٢٠٢٢)

$ن(س) = \frac{س - ١}{س^٢ - ٤س + ٣} + \frac{س + ٣}{س^٢ - ٩}$ **ثم أوجد قيمة:** ن(١) إن أمكن.

---

٩ **أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن:** $ن(س) = \frac{س^٢ + ٢س + ٤}{س^٣ - ٨} - \frac{٩ - س^٢}{س^٢ + س - ٦}$ (قنا ٢٠٢٣)

---

١٠ **أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبينًا مجالها حيث:** (المنوفية ٢٠١٧)

$ن(س) = \frac{س^٢ + س + ١}{س^٤ - س} + \frac{س + ٣}{٣ - ٢س - س^٢}$ إذا كان ن(أ) = −٢ **فأوجد قيمة** أ

---

١١ **أوجد ن(س) فى أبسط صورة، مبينًا مجال ن:** (الجيزة ٢٠٢١)

$ن(س) = \frac{س^٢ + ٤س + ٣}{س^٣ - ٢٧} \div \frac{س + ٣}{س^٢ + ٣س + ٩}$ **ثم أوجد قيمة:** ن(٢)، ن(−٣) إن أمكن.

---

١٢ **ضع ن(س) فى أبسط صورة مبينًا مجالها:** (سوهاج ٢٠٢٣)

حيث $ن(س) = \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س^٢ - ٤س + ٤} \div (س^٢ - ٣س)$ **ثم أوجد قيمة:** ن(٣)

---

١٣ إذا كان: $\frac{ك - ٥ - س^٢}{س^٢ - ٣س}$ معكوسًا جمعيًا للكسر $\frac{س}{س - ٣}$ **فأوجد قيمة:** ك (الدقهلية ٢٠٢٢)

١٤ إذا كان مجال الدالة ن : ن (س) = $\frac{ب}{س}$ + $\frac{٩}{س + أ}$ هو ح - {٠ ، ٤} ، ن (٥) = ٢

فأوجد قيمة أ ، ب (الغربية ٢٠٢٤)

---

١٥ إذا كانت مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = أ س^{٢} + س + ب هى {صفر ، ١}

فأوجد: قيمتى الثابتين أ ، ب (الإسكندرية ٢٠١٧)

---

١٦ إذا كان مجال الدالة ن : ن (س) = $\frac{س - ٥}{٢س - ب}$ هو ح - {٣} ، فأوجد قيمة ب (الفيوم ٢٠٢١)

---

١٧ إذا كانت الدالة ن : ن (س) = $\frac{س^{٢} + حـ س + ١٢}{س^{٢} + ٣س + أ}$ ، مجال ن = ح - {٣ ، ب} ، ن (٤) = ٦

فأوجد قيمة كل من: أ ، ب ، حـ (الدقهلية ٢٠٢٣)

---

١٨ فى كل مما يأتى أوجد ن$^{-١}$ (س) فى أبسط صورة وعين مجالها:

١ ن (س) = $\frac{س^{٢} - ٢س}{س^{٢} - ٥س + ٦}$ (بورسعيد ٢٠٢١)

٢ ن (س) = $\frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} - ٣س + ٢}$ (القليوبية ٢٠٢١)

٣ ن (س) = $\frac{س^{٢} - ٤}{س^{٣} - ٨}$ (الإسكندرية ٢٠٢١)

٤ ن (س) = $\frac{س^{٢} + ٩س + ٢٠}{س^{٢} - ١٦}$ (الأقصر ٢٠٢٢)

٥ ن (س) = $\frac{س^{٢} - ٣س}{(س - ٣)(س^{٢} + ١)}$ (البحيرة ٢٠٢٢)

---

١٩ إذا كان ن (س) = $\frac{س^{٢} - ٢س}{(س - ٢)(س^{٢} + ٢)}$ فأوجد (بنى سويف ٢٠٢٣)

١ ن$^{-١}$ (س) فى أبسط صورة، وعيِّن مجالها.

٢ وإذا كان ن$^{-١}$ (س) = ٣ فما قيمة س؟

---

٢٠ إذا كانت ن (س) = $\frac{س^{٢} - ٢س}{س^{٢} - ٣س + ٢}$ فأوجد كلًّا من: (المنوفية ٢٠٢١)

١ ن$^{-١}$ (س) فى أبسط صورة، موضحًا مجال ن$^{-١}$

٢ ن$^{-١}$ (٢) إن أمكن.

---

٢١ إذا كانت ن (س) = $\frac{س^{٢} - ٢س}{س^{٢} - ٤}$ ، فأوجد كلًّا من: (الغربية ٢٠٢١)

١ ن$^{-١}$ (س) فى أبسط صورة موضحًا مجال ن$^{-١}$

٢ وإذا كان ن$^{-١}$ (س) = ٣ فما قيمة س؟

ملخص عام على الوحدة الثالثة

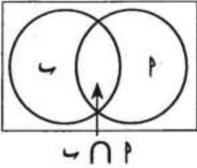
أولًا العمليات على الأحداث:

١ احتمال وقوع الحدث: يقال إن حدثًا قد وقع إذا كان ناتج التجربة العشوائية عنصرًا من عناصر هذا الحدث.

• احتمال وقوع الحدث ٲ يرمز له بالرمز ل (ٲ) هو:

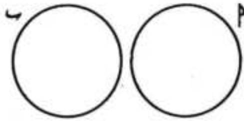
$$ل(ٲ) = \frac{\text{عدد عناصر الحدث ٲ}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة ف}} = \frac{ن(ٲ)}{ن(ف)} ،\ ٠ \le ل(ٲ) \le ١$$

٢ تقاطع حدثين:



• الحدث (ٲ ∩ ب) يعنى حدث وقوع الحدثين ٲ ، ب معًا، ويكون:

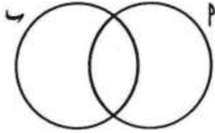
$$ل(ٲ \cap ب) = \frac{ن(ٲ \cap ب)}{ن(ف)}$$



• إذا كان: ٲ ∩ ب = ∅ أى أن وقوع أحدهما يمنع وقوع الآخر.

فيقال: إن: ٲ ، ب حدثان متنافيان، ويكون: ل (ٲ ∩ ب) = ل (∅) = صفر

٣ اتحاد حدثين:



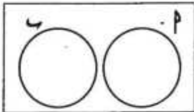
• الحدث (ٲ ∪ ب) يعنى حدث وقوع أحد الحدثين على الأقل.

بمعنى آخر: حدث وقوع ٲ أو ب أو كليهما معًا، ويكون:

$$ل(ٲ \cup ب) = \frac{ن(ٲ \cup ب)}{ن(ف)}$$

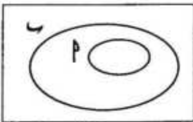
• لأى حدثين ٲ ، ب يكون: ل (ٲ ∪ ب) = ل (ٲ) + ل (ب) − ل (ٲ ∩ ب)

ل (ٲ ∩ ب) = ل (ٲ) + ل (ب) − ل (ٲ ∪ ب)



• إذا كان ٲ ، ب حدثين متنافيين فى فضاء العينة (ف)

لتجربة عشوائية، فإن: ل (ٲ ∪ ب) = ل (ٲ) + ل (ب)

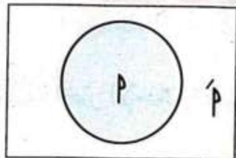


• إذا كان ٲ ، ب حدثين فى فضاء العينة (ف)

لتجربة عشوائية، وكان ٲ ⊂ ب فإن: ٲ ∩ ب = ٲ ، ٲ ∪ ب = ب وبالتالى يكون:

ل (ٲ ∩ ب) = ل (ٲ) ، ل (ٲ ∪ ب) = ل (ب)

ثانيا الحدث المكمل والفرق بين حدثين:



١ الحدث المكمل: (أَ)

• الحدث المكمل للحدث أ يرمز له بالرمز أَ، ويعنى: حدث عدم وقوع الحدث أ

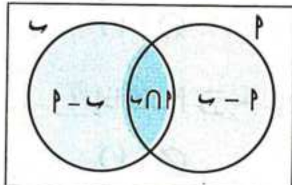
حيث إن: أ $\cup$ أَ = ف ، أ $\cap$ أَ = $\varnothing$

$\therefore$ ل (أ $\cup$ أَ) = ل (ف) = ١ ، ل (أ $\cap$ أَ) = ل ($\varnothing$) = ٠

$\because$ ل (أ $\cup$ أَ) = ل (أ) + ل (أَ)

$\therefore$ ل (أ) + ل (أَ) = ١

$\therefore$ ل (أَ) = ١ − ل (أ) ، ل (أ) = ١ − ل (أَ)



٢ الفرق بين حدثين:

• الفرق بين حدثين أ − ب يعنى: **حدث وقوع أ وعدم وقوع ب**

• وبمعنى آخر وقوع الحدث أ فقط، ويرمز له بالرمز أ − ب، ويكون:

$$ل(أ − ب) = \frac{ن (أ − ب)}{ن (ف)}$$

• الفرق بين حدثين: ب − أ يعنى: **حدث وقوع ب وعدم وقوع أ**

• وبمعنى آخر وقوع الحدث ب فقط،

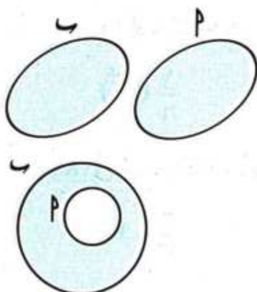
ويرمز له بالرمز ب − أ، ويكون: $ل(ب − أ) = \frac{ن (ب − أ)}{ن (ف)}$

يلاحظ أن: ١ $\because$ ل (أ − ب) + ل(أ $\cap$ ب) = ل (أ)

$\therefore$ ل (أ − ب) = ل (أ) − ل(أ $\cap$ ب)

٢ $\because$ ل (ب − أ) + ل (أ $\cap$ ب) = ل (ب)

$\therefore$ ل (ب − أ) = ل (ب) − ل(أ $\cap$ ب)



• **إذا كان:** أ ، ب حدثين متنافيين،

فإن: ل (أ − ب) = ل (أ) ، ل (ب − أ) = ل (ب)

• **إذا كان:** أ $\subset$ ب

فإن: ل (أ − ب) = ل ($\varnothing$) = صفر

أسئلة هامة على الوحدة الثالثة من امتحانات المحافظات السابقة

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ احتمال الحدث المستحيل = ... (كفر الشيخ ٢٠٢٤)

(أ) ∅ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

٢ احتمال الحدث المؤكد = ... (بورسعيد ٢٠٢٤)

(أ) ١ (ب) ٠,٥ (جـ) ٠,١ (د) صفر

٣ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية. (القليوبية ٢٠٢٤)

فإن ل (أ ∩ ب) =............

(أ) ∅ (ب) صفر (جـ) ل (أ) (د) ل (ب)

٤ إذا كان أ ⊂ ب فإن: ل(أ ∩ ب) = ... (الأزهر ٢٠٢٤)

(أ) ∅ (ب) ل (ب) (جـ) ل (أ) (د) صفر

٥ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ما، (قنا ٢٠٢٣)

فإن: ل(أ ∩ ب)' = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٠,٥ (د) ∅

٦ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة لتجربة عشوائية، وكان ل (أ) = ٠,٣ (الشرقية ٢٠٢٤)

ل (أ ∪ ب) = ٠,٦ ، فإن ل (بَ) = ...

( ) ٠,٣ (ب) ٠,٦ (جـ) ٠,٧ (د) ٠,٩

٧ ألقى حجر نرد منتظم مرة واحدة فإذا كان الحدث أ هو ظهور عدد أولى، (أسيوط ٢٠٢٤)

والحدث ب هو ظهور عدد فردى، فإن ل (أ ∩ ب) = ...

(أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{٢}{٣}$

٨ فى تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة ، فإن احتمال ظهور عدد أكبر من ٤ = ... (المنيا ٢٠١٧)

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١}{٢}$

٩ إذا سحبت بطاقة عشوائيًا من بين ٢٠ بطاقة متماثلة ومرقمة من ١ إلى ٢٠ (البحيرة ٢٠١٧)

فإن احتمال أن يكون الرقم المسحوب مضاعفًا للعدد ٧ هو ....

(أ) ١٠ ٪ (ب) ١٥ ٪ (جـ) ٢٠ ٪ (د) ٢٥ ٪

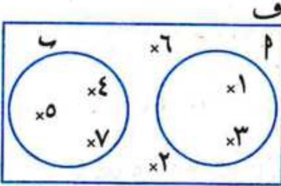
١٠ إذا ألقي حجر نرد منتظم مرة واحدة ، فإن احتمال ظهور عدد زوجي (بورسعيد ٢٠٢٤)

وعدد فردى معًا = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) ١

١١ في الشكل المقابل: إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف (كفر الشيخ ٢٠١٩)

لتجربة عشوائية ، فإن: ل (ب - أ) = ...



(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{٥}{٧}$

(جـ) $\frac{٢}{٧}$ (د) $\frac{٣}{٧}$

١٢ في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة، فإن احتمال ظهور (كفر الشيخ ٢٠٢١)

عدد فردى أولى هو ....

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٦}$ (د) $\frac{١}{٤}$

١٣ إذا كان أ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية، وكان ل (أ) = $\frac{٣}{٨}$ ، (بورسعيد ٢٠٢٤)

ل (ب) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٥}{٨}$ فإن: ل (أ ∩ ب) = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

١٤ إذا كان: أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف، وكان أ ⊂ ب، ل (أ) = ٠,٢ (الأقصر ٢٠١٩)

، ل (ب) = ٠,٦ ، فإن: ل (ب - أ) = ...

(أ) ٠,٢ (ب) ٠,٤ (جـ) ٠,٦ (د) ٠,٨

١٥ إذا كان: أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف، وكان ل (أ) = ٠,٧ (سوهاج ٢٠٢٤)

، ل (أ ∩ ب) = ٠,٣ ، فإن: ل (أ - ب) = ...

(أ) صفر (ب) ٠,٤ (جـ) ٠,٣ (د) ٠,٢

١٦ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان أ ⊂ ب ، (الأقصر ٢٠٢٤)

فإن: ل (أ - ب) = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ∅

١٧ إذا كان ل (أ) = ل (أَ) ، فإن: ل (أ) = ... (الأزهر ٢٠٢٤)

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) ١

١٨ إذا كان: أ ⊂ ف لتجربة عشوائية ما، وكان ل (أ) = ٠,٤ ، فإن: ل (أ$^{/}$) = ... (المنوفية ٢٠٢٢)

(أ) صفر (ب) ٠,٥ (جـ) ٠,٦ (د) ١

١٩ إذا كان احتمال وقوع الحدث أ هو ٢٥٪ فإن احتمال عدم وقوع الحدث أ = ... (الغربية ٢٠٢٤)

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) ١

٢٠ إذا كان: ل (أ) = ٤ ل (أ$^{/}$) فإن: ل(أ) = ... (كفر الشيخ ٢٠٢٤)

(أ) ٠,٨ (ب) ٠,٦ (جـ) ٠,٤ (د) ٠,٢

٢١ إذا كان: أ حدثًا من فضاء العينة لتجربة عشوائية (الشرقية ٢٠٢١)

حيث ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ل(أ$^{/}$) فإن: ل (أ) = ...

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ١

٢٢ إذا كان: أ$^{/}$ هو الحدث المكمل للحدث أ ، فإن: أ$^{/}$ ∪ أ = ... (الفيوم ٢٠٢٤)

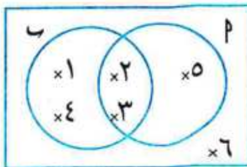
(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) $\varnothing$ (د) ف

٢٣ إذا كان: أ ⊂ ف لتجربة عشوائية ما، وكان: ل(أ) + ل(أ$^{/}$) = ٢ك، فإن: ك = ... (أسيوط ٢٠٢٣)

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٣}$ (د) $\frac{١}{٤}$

الأسئلة المقالية:

٢ في الشكل المقابل: إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة ف لتجربة عشوائية، فأوجد: (القليوبية ٢٠٢٤)



١ ل (أ ∩ ب) ٢ ل (أ − ب)

٣ احتمال عدم وقوع الحدث أ

---

٣ إذا كان: أ ، ب حدثين متنافيين فى تجربة عشوائية ما، وكان، ل (أ$^{/}$) = ٠,٥ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٨ ، فأوجد مع توضيح خطوات الحل: (القاهرة ٢٠٢٢)

١ ل (أ ∩ ب) ٢ ل (أ) ٣ ل (ب)

٤ إذا كان: ٢ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما ، وكان (القاهرة ٢٠٢٤)

ل (٢) = ٠,٣ ، ل (ب) = ٠,٤ ، فأوجد:

١ ل (٢ ∪ ب) ٢ ل (٢ − ب)

---

٥ إذا كان: ٢ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما، (بنى سويف ٢٠٢٤)

وكان ل (٢) = ٠,٧ ، ل (ب) = ٠,٤ ، ل (٢ ∩ ب) = ٠,٣ ، فأوجد:

١ احتمال وقوع الحدث ٢ فقط. ٢ ل (بَ). ٣ ل (٢ ∪ ب).

---

٦ إذا كان ٢ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما، (الفيوم ٢٠٢٢)

وكان ل (٢) = $\frac{٢}{٣}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (٢ ∩ ب) = $\frac{١}{٦}$ ، فأوجد:

١ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل. ٢ ل (٢ − ب)

---

٧ إذا كان ٢ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان ل (ب) = $\frac{١}{١٢}$ ، (كفر الشيخ ٢٠٢٤)

ل (٢ ∪ ب) = $\frac{١}{٣}$ ، فأوجد ل (٢) إذا كان:

١ ٢ ، ب حدثين متنافيين ٢ ب ⊂ ٢

---

٨ إذا كان: ل (٢) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٣}$ ، ل (٢ ∪ ب) = $\frac{١٧}{٢٤}$ (الوادى الجديد ٢٠٢٣)

حيث ٢ ، ب حدثان من فضاء عينة لتجربة عشوائية، فأوجد:

١ ل (٢ ∩ ب) ٢ ل (٢ − ب)

---

٩ كيس به ٢٠ بطاقة متماثلة مرقمة من ١ إلى ٢٠، سحبت بطاقة واحدة عشوائيًا من الكيس. (الإسكندرية ٢٠٢٣)

احسب احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عددًا:

١ يقبل القسمة على ٣ ٢ يقبل القسمة على ٣ أو ٥

---

١٠ إذا كان: ٢ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية ما، وكان: ل (٢) = $\frac{١}{٢}$ ، (أسيوط ٢٠٢٣)

ل (ب) = $\frac{١}{٣}$ ، فأوجد: ل (٢ ∪ ب) فى الحالتين الآتيتين:

١ ل (٢ ∩ ب) = $\frac{١}{٨}$ ٢ ٢ ، ب حدثان متنافيان

١١ إذا كان: ل (أ) = ل (أ′) ، وكان: ل(ب) = $\frac{1}{3}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{1}{5}$ فأوجد: (القليوبية ٢٠٢٣)

١ ل (أ ∪ ب)

٢ ل (ب − أ)

---

١٢ إذا كان: أ ، ب حدثين من فضاء العينة ف لتجربة عشوائية، وكان ل (أ) = ٤ , ٠ (الدقهلية ٢٠٢٣)

، ل (ب) = ٥ , ٠، ل (أ ∩ ب) = ٢ , ٠ فأوجد:

١ ل (أ ∪ ب)

٢ ل (أ − ب)

٣ ل (ف − ب)

---

١٣ إذا كان: أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ، وكان ل (أ) = ٧ , ٠، (الإسكندرية ٢٠٢١)

ل (أ − ب) = ٥ , ٠ ،

فأوجد: ل (أ ∩ ب)

---

١٤ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان (الأقصر ٢٠٢٤)

ل (أ) = $\frac{3}{8}$ ، ل (ب) = $\frac{1}{2}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{1}{4}$ فأوجد:

١ ل (أ′)

٢ ل (ب∩أ)′

٣ ل (أ∪ب)

مهارات تراكمية أساسية فى الجبر والاحتمال

اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان $٣^{س-٢} = ١$ ، فإن س = ... (بورسعيد ٢٠٢٤)

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) صفر

٢ إذا كان $س^{٢}$ + أ س − ٤ = (س + ٢) (س − ٢) فإن أ = ...

(أ) −٢ (ب) صفر (جـ) ٢ (د) ٤

٣ مربع محيطه ١٦ سم فإن مساحته تساوى .... $سم^{٢}$

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٦ (د) ٦٤

٤ إذا كان $\frac{١}{٢}$ س = ٦ فإن $\frac{١}{٣}$ س = ... (القاهرة ٢٠٢١)

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ١ (د) ٤

٥ إذا كان المقدار ($س^{٢}$ + ك س + ٩) مربعًا كاملًا فإن: ك = ... (الجيزة ٢٠٢٤)

(أ) ± ٦ (ب) ± ٩ (جـ) ± ١ (د) ± ٤

٦ إذا كان $س^{٣}$ $ص^{-٣}$ = ٨ فإن $\frac{ص}{س}$ = ... (الفيوم ٢٠٢١)

(أ) $\frac{١}{٥١٢}$ (ب) $\frac{١}{٨}$ (جـ) ٢ (د) $\frac{١}{٢}$

٧ أحد حلول المتباينة: ٢ س − ٣ > ٣ ، حيث س ∈ ص هو ....

(أ) س = ٣ (ب) س = − ٣ (جـ) س = ٧ (د) س = − ٧

٨ إذا كان أ = $\sqrt{٣}$ ، ب = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ فإن $أ^{٥٠} \times ب^{٥١}$ = ...

(أ) ٣ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) $\sqrt{٣}$ (د) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

٩ إذا كان $٢^{٥} \times ٣^{٥} = ٦^{م}$ فإن م = ... (سوهاج ٢٠٢١)

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ١٠ (د) ٢٥

١٠ إذا كان |س| = ٥ فإن س = ... (الفيوم ٢٠٢٤)

(أ) ٥ (ب) −٥ (جـ) ± ٥ (د) ١٠

١١ نصف العدد $٢^{١٠}$ هو .... (الجيزة ٢٠٢٤)

(أ) $٢^{٥}$ (ب) $٥^{٢}$ (جـ) $٢^{٩}$ (د) $٢^{٧}$

١٢ احتمال الحدث المستحيل = ... (السويس ٢٠٢٣)

(أ) صفر (ب) ٠,٥ (جـ) ١ (د) $\varnothing$

١٣ إذا كان س هو العنصر المحايد الجمعى ، ص هو العنصر المحايد الضربى،

فإن: $(٧)^{س} + (٢)^{ص}$ = ... (المنوفية ٢٠٢١)

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٧ (د) ٩

١٤ المعادلة ٣س + ٤ص + س ص = ٥ من الدرجة .... (البحيرة ٢٠٢١)

(أ) الأولى (ب) الثانية (جـ) الثالثة (د) الرابعة

١٥ إذا كان $\sqrt{٦٤ + ٣٦}$ = ٨ + أ فإن أ = ... (البحيرة ٢٠٢٤)

(أ) ٦ (ب) ١٠ (جـ) ٢ (د) ٣

١٦ إذا كان $٣^{س}$ = ٩ فإن س = ... (أسوان ٢٠٢١)

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٩ (د) ٨١

١٧ النقطة (-٢ ، -١) تقع فى الربع .... (بورسعيد ٢٠٢٢)

(أ) الأول (ب) الثانى (جـ) الثالث (د) الرابع

١٨ إذا كان مجموع عمرى أب وابنه الآن ٣٠ سنة فإن مجموع عمريهما بعد عشر سنوات = ... سنة.

(أ) ٢٠ (ب) ٣٠ (جـ) ٤٠ (د) ٥٠

١٩ $٢ (١ - \frac{١}{٢}) + ٣ (١ - \frac{١}{٣}) + ٤ (١ - \frac{١}{٤}) +$ .... $+ ١٠ (١ - \frac{١}{١٠}) =$ ....

(أ) ٤٥ (ب) ٤٩ (جـ) ٥٠ (د) ٥٥

٢٠ $ع_{+} \cap ع_{-}$ = ... (أسوان ٢٠٢٤)

(أ) {صفر} (ب) $\varnothing$ (جـ) ع (د) ع - {٠}

٢١ إذا كان ٣ص × ٥ = ٢٢٥ فإن ص = ...

(أ) ٢ (ب) ١٥ (جـ) صفر (د) ٢٠

٢٢ إذا كانت س + ٣ص = ٧ فإن س + ٣ (ص + ٥) = ... (الجيزة ٢٠٢١)

(أ) ٣ (ب) ٧ (جـ) ٢١ (د) ٢٢

٢٣ إذا كان س عددًا سالبًا فإن أكبر الأعداد التالية هو .... (الغربية ٢٠٢٤)

(أ) ٩ + س (ب) ٩ س (جـ) ٩ − س (د) $\frac{٩}{س}$

٢٤ إذا كان ٦^{س} = ١٢ ، فإن ٦$^{س+١}$ = ... (الغربية ٢٠٢٤)

(أ) ١٦ (ب) ١٣ (جـ) ٧٢ (د) ٢٧

٢٥ القاعدة التى تصف النمط ($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٤}{٥}$ ، .....) بدلالة ن

حيث ن ∈ ص$_{+}$ هى .... (الفيوم ٢٠١٩)

(أ) $\frac{٢}{ن+١}$ (ب) ن + $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{ن}{ن+١}$ (د) $\frac{٢ن-١}{ن+١}$

٢٦ إذا كان س + ص = س ص = ١٠ فإن س^{٢} ص + س ص^{٢} = ...

(أ) ١٠ (ب) ٢٠ (جـ) ٣٠ (د) ١٠٠

٢٧ $\sqrt[٣]{٣\frac{٣}{٨}}$ .... $\sqrt{٢\frac{١}{٤}}$

(أ) = (ب) < (جـ) > (د) ≠

٢٨ إذا كان $\sqrt{س^{٢}}$ = ٢٥ ، فإن س = ...

(أ) ٥ (ب) ± ٥ (جـ) ٢٥ (د) ± ٢٥

٢٩ مجموعة حل المتباينة: س < ٢ فى ح هى .... (المنوفية ٢٠٢١)

(أ)]٢ ، ∞[(ب)]٢ ، ∞[(جـ)]−∞ ، ٢[(د)]−∞ ، ٢]

٣٠ إذا كان س^{٣} = ٦٤ فإن $\sqrt{س}$ = ... (جنوب سيناء ٢٠٢٣)

(أ) ٢ (ب) ± ٢ (جـ) ٤ (د) ± ٨

٣١ الوسط الحسابى للقيم ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٧ ، ٩ هو .... (الإسكندرية ٢٠٢١)

(أ) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٨

٣٢ إذا كان (٥^س ، ٣) = (٢٥ ، ص)، فإن س + ص= .... (القليوبية ٢٠٢٤)

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٥ (د) ٦

٣٣ إذا كان ٣ أ = $\sqrt{٤}$ ب فإن $\frac{أ}{ب}$ = ... (البحيرة ٢٠٢١)

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٤}{٣}$

٣٤ إذا كان ٥^س = ١ فإن ٥^(س−١) = ... (بنى سويف ٢٠٢١)

(أ) −١ (ب) $\frac{١}{٥}$ (جـ) ١ (د) ٥

٣٥ احتمال الحدث المؤكد = ... (شمال سيناء ٢٠٢٣)

(أ) ١ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) −١ (د) صفر

٣٦ إذا كان س^٢ − ص^٢ = ١٠ ، س − ص = ٢ فإن س + ص = ... (أسوان ٢٠٢٣)

(أ) ١٠ (ب) ٢ (جـ) ٥ (د) ١٢

٣٧ إذا كان س^٢ + ٢ س + ٤ = ٨ ، ٢ − س = ٥ فإن س^٣ − ٨ = ...

(أ) ١٣ (ب) ٣ (جـ) ٤٠ (د) −٤٠

٣٨ قيمة س التى تحقق المعادلة س^٢ = ٩ حيث س ∈ ط هى .... (القاهرة ٢٠٢٢)

(أ) −٣ (ب) ٣ (جـ) $\sqrt{٣}$ (د) ± ٣

٣٩ المعكوس الجمعى للعدد (١ − $\sqrt{٢}$) هو .... (الجيزة ٢٠٢٢)

(أ) ١ + $\sqrt{٢}$ (ب) −١ − $\sqrt{٢}$ (جـ) $\sqrt{٢}$ − ١ (د) $\sqrt{٢}$

٤٠ ٣^٧ + ٣^٧ + ٣^٧ = ... (قنا ٢٠٢٤)

(أ) ٩^٧ (ب) ٣^٢١ (جـ) ٢٧^٧ (د) ٣^٨

نماذج اختبارات الجبر والاحتمال من الكتاب المدرسى

النموذج الأول

١ اختر الإجابة الصحيحة: (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ مجال الدالة ن حيث ن (س) = $\frac{س}{س - ١}$ هو ....

(أ) ح - {صفر} (ب) ح - {١} (جـ) ح - {صفر ، ١} (د) ح - {-١}

٢ عدد حلول المعادلتين: س + ص = ٢ ، ص + س = ٣ معًا هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٣ إذا كان س ≠ صفر فإن $\frac{٥ س}{س^٢ + ١} \div \frac{س}{س^٢ + ١}$ = ...

(أ) -٥ (ب) -١ (جـ) ١ (د) ٥

٤ إذا كانت النسبة بين محيطى مربعين ١ : ٢ فإن النسبة بين مساحتيهما = ...

(أ) ١ : ٢ (ب) ٢ : ١ (جـ) ١ : ٤ (د) ٤ : ١

٥ معادلة محور تماثل منحنى الدالة د حيث د (س) = $س^٢$ - ٤ هى ....

(أ) س = -٤ (ب) س = صفر (جـ) ص = صفر (د) ص = -٤

٦ إذا كانت أ ⊂ ف لتجربة عشوائية ما، وكان ل (أَ) = ٢ ل (أ) فإن ل (أ) = ...

(أ) $\frac{١}{٣}$ (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{٢}{٣}$ (د) ١

---

٢ (أ) باستخدام القانون العام: أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية فى ح :

$٢س^٢$ - ٥س + ١ = صفر (مقربًا الناتج لأقرب رقم عشرى واحد).

(ب) أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجالها حيث ن (س) = $\frac{س - ٣}{س^٢ - ٧س + ١٢} - \frac{٤}{س^٢ - ٤س}$

---

٣ (أ) أوجد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين فى ح × ح:

(١) س - ص = صفر (٢) $س^٢$ + س ص + $ص^٢$ = ٢٧

(ب) أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجالها حيث:

ن (س) = $\frac{س^2 + 4س + 3}{س^3 - 27} \div \frac{س + 3}{س^2 + 3س + 9}$ ثم أوجد ن (٢) ، ن (-٣) إن أمكن.

---

٤ (أ) مستطيل طوله يزيد على عرضه بمقدار ٤ سم ، فإذا كان محيط المستطيل ٢٨ سم.

فأوجد مساحة سطح المستطيل.

(ب) إذا كان ن (س) = $\frac{س^2 - 2س}{س^2 - 3س + 2}$ فأوجد:

(١) $ن^{-1}$ (س) فى أبسط صورة وعين مجالها. (٢) قيمة س إذا كان $ن^{-1}$ (س) = ٣

---

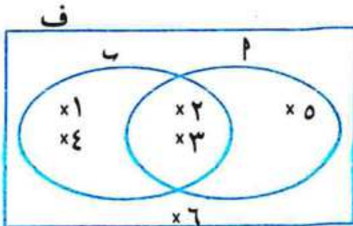
٥ (أ) إذا كان $ن_1$ (س) = $\frac{س^2}{س^3 - س^2}$ ، $ن_2$(س) = $\frac{س^3 + س^2 + س}{س^4 - س}$

فأثبت أن: $ن_1$(س) = $ن_2$(س).

(ب) فى الشكل المقابل:

إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة ف لتجربة عشوائية

فأوجد:



(١) ل (أ ∩ ب) (٢) ل (أ - ب)

(٣) احتمال عدم وقوع الحدث أ

النموذج الثانى

١ اختر الإجابة الصحيحة: (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ مجموعة حل المعادلتين س = ٣ ، ص = ٤ هى ....

(أ) {(٣ ، ٤)} (ب) {(٤ ، ٣)} (جـ) ح (د) ∅

٢ مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = $س^2$ + ٤ فى ح هى ....

(أ) {٢} (ب) {٢ ، -٢} (جـ) ح (د) ∅

٣ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية فإن ل $(\text{أ} \cap \text{ب}) =$ ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٠,٥ (د) $\emptyset$

٤ مجال المعكوس الضربى للدالة د حيث د (س) $= \frac{\text{س} + ٢}{\text{س} - ٣}$ هو ....

(أ) $\{٣\}$ (ب) ع $- \{-٢ ، ٣\}$ (جـ) ع $- \{٣\}$ (د) ع

٥ المستقيمان ٣ س + ٥ ص = صفر ، ٥ س − ٣ ص = صفر يتقاطعان فى ....

(أ) الربع الأول (ب) الربع الثانى (جـ) نقطة الأصل (د) الربع الثالث

---

٢ (أ) أوجد مجموعة حل المعادلة ٣س^٢ − ٥س + ١ = صفر باستخدام القانون العام مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

(ب) اختصر لأبسط صورة مبينًا المجال: ن (س) $= \frac{\text{س}^٣ - ٨}{\text{س}^٢ + \text{س} - ٦} \times \frac{\text{س} + ٣}{\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ٤}$

---

٣ (أ) أوجد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين معًا الآتيتين فى ع × ع:
س − ص = ١ ، س^٢ + ص^٢ = ٢٥

(ب) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما، وكان ل $(\text{أ}) = ٠,٣$ ، ل $(\text{ب}) = ٠,٦$ ، ل $(\text{أ} \cap \text{ب}) = ٠,٢$

فأوجد ل $(\text{أ} \cup \text{ب})$ ، ل $(\text{أ} - \text{ب})$.

---

٤ (أ) حل المعادلتين : ٢س − ص = ٣ ، س + ٢ص = ٤ فى ع × ع

(ب) أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجالها حيث ن (س) $= \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س}}{\text{س}^٢ - ٩} \div \frac{٢\text{س}}{\text{س} + ٣}$

---

٥ (أ) أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجالها حيث ن (س) $= \frac{\text{س}^٢ + ٢\text{س}}{\text{س}^٢ - ٤} + \frac{\text{س} + ٣}{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦}$

(ب) ارسم الشكل البيانى للدالة د حيث د (س) = س^٢ − ١ مستعينًا بالفترة [−٣ ، ٣] ومن الرسم أوجد مجموعة حل المعادلة س^٢ − ١ = صفر.

النموذج الثالث (لطلاب الدمج)

١ أكمل ما يأتى: (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ احتمال الحدث المستحيل = ...

٢ أبسط صورة للكسر الجبرى $\frac{س - ٣}{س^٢ - ٥س + ٦}$ فى المجال ع - {٢ ، ٣} هى ....

٣ إذا كانت أ ⊂ ف لتجربة عشوائية وكانت ل (أ) = $\frac{١}{٣}$ فإن ل (أَ) = ...

٤ المعادلة ٣س - $س^٢$ + ١ = صفر من الدرجة ....

٥ نقطة تقاطع المستقيمين س = -١ ، ص = ١ تقع فى الربع ....

٦ مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = س - ٥ هى ....

٢ اختر الإجابة الصحيحة:

١ مجموعة حل المعادلتين: س = ٢ ، س ص = ٦ هى ....

(أ) {(٢ ، ٣)} (ب) {٢ ، ٣} (جـ) {(٣ ، ٢)} (د) {٣}

٢ يكون للدالة د حيث د (س) = $\frac{س - ٢}{س - ٥}$ معكوس جمعى فى المجال ....

(أ) ع - {٢} (ب) ع - {٥} (جـ) ع - {٢ ، ٥} (د) {٢ ، ٥}

٣ المعكوس الضربى للكسر الجبرى $\frac{٣}{س^٢ + ١}$ هو ....

(أ) $\frac{-٣}{س^٢ + ١}$ (ب) $\frac{س^٢ + ١}{-٣}$ (جـ) $\frac{س^٢ + ١}{٣}$ (د) $\frac{س^٢ - ١}{٣}$

٤ مجال الدالة ن حيث ن (س) = $\frac{س + ٢}{س - ١}$ هو ....

(أ) ع - {-٢} (ب) ع - {١} (جـ) ع - {١ ، -٢} (د) ع - {٢}

٥ إذا كان ص = ٢ ، $س^٢$ - $ص^٢$ = ٥ فإن س = ...

(أ) -٣ (ب) ٣ (جـ) ±٣ (د) ٩

٦ المستقيمان س + ٢ ص = ١ ، ٢س + ٤ ص = ٦ يكونان ....

(أ) متوازيين (ب) متقاطعين (جـ) متعامدين (د) منطبقين

---

٣ ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة ، وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ:

١ في المعادلة ٢س^{٢} − ٥س − ٤ = صفر يكون أ = ١ ، ب = −٥ ، جـ = ٤ ( )

٢ أبسط صورة للدالة ن حيث: ن (س) = $\frac{\text{س}}{\text{س} + ١}$ + $\frac{١}{\text{س} + ١}$ هي س + ١ ( )

٣ $\frac{\text{س} - ١}{٥} \times \frac{\text{س} + ١}{\text{س}^{٢} - ١} = \frac{١}{٥}$ ، س ≠ ±١ ( )

٤ إذا كان عددان مجموعهما ٣ ، ومجموع مربعيهما ٥ ، فإن العددين هما ١ ، ٢ ( )

٥ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة ، فإن ل (أ ∩ ب) = ١ ( )

٦ إذا كان احتمال فوز إحدى الفرق = ٠,٧ فإن احتمال عدم فوزها هو ٠,٣ ( )

---

٤ صل من العمود (أ) بما يناسبه من العمود (ب):

(أ)	(ب)
١ مجموعة حل المعادلتين س = ٢ ، ص − ١ = ٠ هي	{(٢ ، ١)}
٢ حل المعادلة أس^{٢} + ب س + جـ = صفر هي س = ...	$\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٤}$
٣ إذا كان ن (س) = $\frac{\text{س} - ١}{\text{س} + ١}$ فإن مجال ن$^{-١}$ هو	$\frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\text{أ جـ}}}{٢\text{أ}}$
٤ إذا كان ن$_{١}$ = ن$_{٢}$ وكان ن$_{١}$(س) = $\frac{٥\text{س}}{٥\text{س}^{٢} + ٢٠}$ فإن ن$_{٢}$(س) = ...	ع − {١ ، −١}
٥ مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = $\frac{\text{س} - ٥}{\text{س}}$ هي	$\frac{١}{٣}$
٦ في الشكل المقابل: ل (أ − ب) = ...	{٥}

ف ، ب ، أ ، ×٤ ، ×٣ ، ×١ ، ×٢ ، ×٦ ، ×٥

١ محافظة القاهرة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ إذا كان العدد ك ∈] ٢ ، ٧ [فإن: ك يمكن أن تساوى ....

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٧ (د) ٩

٢ أبسط صورة للدالة د: د (س) = $\frac{٣ - س}{س - ٣}$ هى .... حيث س ≠ ٣

(أ) -٣ (ب) - ١ (جـ) ١ (د) ٤

٣ مجموعة أصفار الدالة د: د (س) = $\frac{س - ٤}{س + ١}$ هى ....

(أ) {٤ ، -١} (ب) {-١} (جـ) {٤} (د) ع

٤ إذا كان الزوج المرتب (٢ ، ٣) يحقق المعادلة: ك س - ص = ٧ فإن: ك ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٥

٥ مجال الدالة د: د (س) = ٩ هو ....

(أ) ع (ب) ع - {٩} (جـ) {٩} (د) ع - {-٩}

٦ إذا كان: ن$^{-١}$(س) = س حيث س ≠ صفر فإن: ن (٢) = ...

(أ) -٢ (ب) -$\frac{١}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) ٢

٧ إذا كان: أ ∈ ع - {صفر} ، ن عدداً صحيحًا موجبًا فإن: أ^{ن} × أ$^{-ن}$ = ...

(أ) -أ (ب) صفر (جـ) ١ (د) أ

٨ إذا كان المستقيمان للمعادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين متطابقين فإنه: .... للمعادلتين معًا.

(أ) لا يوجد حل (ب) يوجد حل واحد فقط

(جـ) يوجد حلان (د) يوجد عدد لا نهائى من الحلول

٩ إذا كان: أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية، فإن حدث وقوع أ ، ب معًا = ...

(أ) أ ∩ ب (ب) أ ∪ ب (جـ) أ - ب (د) ب - أ

٢ أجب عن الأسئلة الآتية:

١ باستخدام القانون العام **أوجد** مجموعة حل المعادلة الآتية فى ع :

٣ س^{٢} - ٥ س + ١ = صفر (مقربًا الناتج لأقرب رقم عشرى واحد)

٢ **أوجد** ن (س) فى أبسط صورة مبينًا مجالها، حيث:

$$ن(س) = \frac{س^{٢} + س - ٦}{س^{٢} - ٨} \times \frac{س^{٢} + ٢س + ٤}{س + ٣}$$

٣ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما،

ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = $\frac{٣}{٢}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٣}$ **فأوجد:**

أولًا: ل (أ ∩ ب)َ **ثانيًا:** ل (أ ∪ ب)

٤ **أوجد** جبريًّا فى ع × ع مجموعة حل المعادلتين الآتيتين معًا:

٢س - ص = ٣ ، س + ص = ٩

٥ عددان موجبان س ، ص الفرق بينهما ٢ ، حاصل ضربهما ٢٤ **أوجد العددين.**

٦ إذا كانت $ن_{١}(س) = \frac{س^{٢} - ٩}{س + ٣}$ ، $ن_{٢}(س) = \frac{٢س - ٦}{٢}$

فأثبت أن: $ن_{١}(س) = ن_{٢}(س)$ لجميع قيم س التى تنتمى للمجال المشترك، واذكر هذا المجال.

٧ **أوجد** ن(س) فى أبسط صورة مبينًا مجالها، حيث:

$$ن(س) = \frac{١}{س + ٢} + \frac{س + ٢}{س^{٢} + ٤س + ٤}$$

٢ محافظة الجيزة

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ مجموعة أصفار الدالة د: د (س) = $\frac{س - ٢}{٥}$ هى ....

(أ) {٥} (ب) {$\frac{٢}{٥}$} (جـ) {٢} (د) {$\frac{-٢}{٥}$}

٢ مجال الدالة د: د (س) = $\frac{س - ١}{س^{٢} - ٩}$ هو ....

(أ) ع (ب) ع - {١} (جـ) ع - {٩} (د) ع - {٣ ، -٣}

٣ المنحنى ص = أ $س^٢$ + ب س + حـ يقطع محور الصادات فى النقطة ....

(أ) (٠ ، ب) (ب) (٠ ، حـ) (جـ) (ب ، ٠) (د) (حـ ، ٠)

٤ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان ب ⊂ أ ، فإن ل (أ ∩ ب) = ...

(أ) ١ (ب) ل (أ) (جـ) ل (ب) (د) صفر

٥ $\sqrt{١٠٠ - ٣٦}$ = ١٠ - ....

(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ٣

٦ إذا كان أ > ب > صفر > حـ ، فإن أ ب .... ب حـ

(أ) > (ب) = (جـ) ⩽ (د) <

٧ عددان مجموعهما ٨ ، حاصل ضربهما ١٥ فإن العددين هما ....

(أ) ٢ ، ٦ (ب) ٣ ، ٥ (جـ) ٧ ، ١ (د) ٤ ، ٤

٨ (إذا كانت د (س) = س + ك ، وكانت ص (د) = {٥} فإن: ك = ...

(أ) -٥ (ب) ٥ (جـ) ± ٥ (د) صفر

٩ يكون للكسر ن (س) = $\frac{س + ٣}{س - ٤}$ معكوس جمعى فى المجال = ...

(أ) ح - {-٣} (ب) ح - {٤} (جـ) ح - {-٢ ، ٢} (د) ح - {-٣ ، ٤}

---

٢ أجب عن الأسئلة الآتية:

١ **أوجد** جبريًا مجموعة الحل للمعادلتين الآتيتين فى ح × ح (موضحًا خطوات الحل)

٣ س + ٢ ص = ٤ ، س - ٣ ص = ٥

٢ **أوجد:** ن (س) فى أبسط صورة مبينًا المجال، حيث:

$$ن(س) = \frac{س^٢ - ٨}{س^٢ + س - ٦} \times \frac{٢س + ٦}{س^٢ + ٢س + ٤}$$

٣ إذا كان $ن_١(س) = \frac{٥س}{٥س + ٢٥}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ + ٥س}{س^٢ + ١٠س + ٢٥}$

أثبت أن: $ن_١ = ن_٢$

٤ إذا كان $أ$ ، $ب$ حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية:

وكان ل ($أ$) = ٠,٧ ، ل ($ب$) = ٠,٥ ، ل ($أ \cap ب$) = ٠,٣

٥ **أوجد:** باستخدام القانون العام مجموعة الحل فى ح للمعادلة $س^٢ - ٦س + ٤ = $ صفر

(مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد)

٦ **أوجد** فى ح × ح مجموعة الحل للمعادلتين: س − ص = صفر ، س ص = ١٦

٧ **أوجد:** ن(س) فى أبسط صورة مبينًا المجال حيث:

$$ن(س) = \frac{س + ٢}{س^٢ + ٣س + ٣} - \frac{س^٢ - س}{١ - س^٢}$$

٣ محافظة الإسكندرية

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ مجموعة أصفار الدالة د (س) = $\frac{س - ٢}{س^٢ - ٤}$ هى ....

(أ) {٢} (ب) {−٢} (جـ) {−٢ ، ٢} (د) $\varnothing$

٢ مجموعة حل المعادلتين: س = ٣ ، $س^٢ + ص^٢ = ٢٥$ فى ح × ح هى ....

(أ) {(٣ ، ٤)} (ب) {(٣ ، ٤)، (٣ ، −٤)}

(جـ) {٣ ، −٤} (د) {(٤ ،−٣)}

٣ عدد حلول المعادلتين س + ص = ٣ ، س + ص = −٣ هى ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٤ مجموعة حل المعادلتين: س − ٣ = ٠ ، ص + ٢ = ٠ فى ح × ح هى ....

(أ) {٣ ، ٢} (ب) {−٣ ، −٢} (جـ) {(٣ ،−٢)} (د) {(−٢ ، ٣)}

٥ مجال الدالة د (س) = $\frac{س + ٢}{س - ١}$ هو ....

(أ) {١ ، −٢} (ب) ح - {١} (جـ) ح − {١ ، −٢} (د) {٢ ، −١}

٦ إذا كان ل (ٲ) = ٦ , ٠ ، فإن ل (ٲَ) = ...

(أ) ٠ , ٤ (ب) ٠ , ٦ (جـ) ٠ , ٥ (د) ١

٧ إذا كان ٲ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان ٲ ⊂ ب فإن ، ل (ٲ ∪ ب) = ...

(أ) ل (ٲ) (ب) ل (ب) (جـ) ١ (د) صفر

٨ المعكوس الجمعى للدالة د (س) = $\frac{\text{س} - ٣}{\text{س} + ٢}$ هو ....

(أ) $\frac{\text{س} + ٣}{\text{س} - ٢}$ (ب) $\frac{٣ - \text{س}}{\text{س} + ٢}$ (جـ) $\frac{-\text{س} - ٣}{\text{س} + ٢}$ (د) $\frac{-\text{س} - ٣}{-\text{س} - ٢}$

٩ [٣ ، ٥] - {٣ ، ٥} = ...

(أ)]٣ ، ٥[(ب) [٣ ، ٥] (جـ)]٣ ، ٥] (د) [٣ ، ٥[

---

٢ ١ أوجد باستخدام القانون العام مجموعة حل المعادلة: $\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٢ = $ صفر

فى ح متخذًا $\sqrt{١٧} \simeq ٤ , ١٢$

٢ أوجد جبريًا فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين: س + ص = ٧ ، س - ص = ٣

٣ إذا كان $ن_١(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢}{\text{س}^٢ - \text{س}}$ ، $ن_٢(\text{س}) = \frac{\text{س}^٣ - \text{س}^٢}{\text{س}^٣ - ٢\text{س}^٢ + \text{س}}$ فبرهن أن: $ن_١ = ن_٢$

٤ أوجد ن (س) فى أبسط صورة مبينًا المجال: ن (س) = $\frac{\text{س} - ٥}{\text{س}^٢ - ٢\text{س} - ١٥} \div \frac{٨}{٢\text{س} + ٦}$

٥ إذا كان ن (س) = $\frac{٣\text{س} - ٩}{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦}$ ، فأوجد $ن^{-١}(\text{س})$ فى أبسط صورة مبينًا مجالها،

ثم أوجد $ن^{-١}(٣)$ إن أمكن.

٦ إذا كان ٲ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما، وكان ل (ٲ) = ٤ , ٠ ، ل (ب) = ٥ , ٠

، ل (ٲ ∩ ب) = ٢ , ٠ فأوجد كلًّا من: (١) ل (ٲ ∪ ب) (٢) احتمال عدم وقوع ٲ

٧ أوجد ن (س) فى أبسط صورة موضحًا المجال، حيث ن (س) = $\frac{\text{س}^٢ + ٤\text{س}}{\text{س}^٢ - ١٦} + \frac{\text{س} - ٣}{\text{س}^٢ - ٧\text{س} + ١٢}$

٤ محافظة المنوفية

١ أولًا: اختر الإجابة الصحيحة:

١ مجموعة أصفار الدالة د: د(س) = ٩ هى ....

(أ) {٩} (ب) {٠} (جـ) ∅ (د) ح -{٩}

٢ إذا كان: ٥^ص = ١ ، فإن: ص = ...

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) $\frac{١}{٥}$ (د) صفر

٣ يقال للحدثين أ ، ب إنهما متنافيان إذا كان أ ∩ ب = ...

(أ) صفر (ب) -١ (جـ) {٠} (د) ∅

ثانيًا: أوجد: مجموعة حل المعادلتين فى ح × ح : س - ص = ٧ ، س ص = ١٨

---

٢ أولًا: اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان: أ^{٢} - ب^{٢} = ١٥ ، أ - ب = ٣، فإن: أ + ب = ...

(أ) ٥ (ب) ١ (جـ) ٣ (د) ١٢

٢ إذا كان المستقيمان: س + ٢ص = ٤ ، ٢س + ك ص = ١١ متوازيين، فإن: ك = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

٣ إذا كان: ن(س) = $\frac{س - ١}{س + ٣}$ فإن: مجال ن$^{-١}$(س) هو ....

(أ) ح -{٣} (ب) ح -{١} (جـ) ح -{-٣ ، ١} (د) {-٣ ، ١}

ثانيًا: أوجد ن(س) فى أبسط صورة، حيث ن(س) = $\frac{س^{٢} + ٢س + ٤}{س^{٣} - ٨}$ + $\frac{س^{٢} + س - ٢}{س^{٢} - ٤}$ مبينًا مجال ن(س).

---

٣ أولًا: اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان: أ ⊂ ف ، ل(أ) = ل(أ$'$) فإن: ل(أ) = ...

(أ) ٠,٢ (ب) ٠,٥ (جـ) ٠,٣ (د) ٠,٦

٢ إذا كان منحنى الدالة التربيعية د يمر بالنقاط (-١ ، ٠) ، (٠ ، -٤) ، (٤ ، ٠)، فإن مجموعة حل المعادلة د(س) = صفر فى ح هى ....

(أ) {-١ ، ٠} (ب) {-٤ ، ٠} (جـ) {-١ ، ٤} (د) {٤ ، -٤}

٣ مجال الدالة د : د (س) = $\frac{س - ٧}{٣(س + ١)}$ هو ....

(أ) ع (ب) ع -{-١} (جـ) ع -{١} (د) ع - {-١ ، ٣}

ثانيًا: أجب عما يأتى:

إذا كان: ن$_١$ (س) = $\frac{٢ س}{٢س + ٨}$ ، ن$_٢$ (س) = $\frac{س^٢ + ٤ س}{س^٢ + ٨س + ١٦}$ فأثبت أن ن$_١$ = ن$_٢$

---

٤ أجب عما يأتى:

(أ) إذا كان: أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية،

ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٤}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٨}$ فأوجد كلًّا من:

(١) ل (أ ∪ ب) (٢) ل (أ - ب) (٣) ل (بَ)

(ب) أوجد فى أبسط صورة: ن(س) = $\frac{٢س^٢ + ٤س}{س^٢ - ٤}$ × $\frac{س - ٢}{٢س + ٦}$ مبينًا مجال ن(س).

---

٥ أجب عما يأتى:

(أ) أوجد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين فى: ع × ع جبريًّا: ٢س - ص = ٣ ، س + ٢ص = ٤

(ب) أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية فى (ع) باستخدام القانون العام

س^٢ - ٢س - ٤ = صفر (مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين).

٥ محافظة الغربية

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان منحنى الدالة التربيعية د لا يقطع محور السينات، فإن عدد حلول المعادلة د (س) = ٠ فى ع هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى

٢ إذا كان: ن (س) = $\frac{٧}{س}$ + $\frac{س}{٧}$ فإن مجال ن هو ....

(أ) ع (ب) ع -{٠} (جـ) ع -{٧} (د) ع -{٠ ، ٧}

٣ إذا كان: $س + ص = ٢$ فإن $٢س + ٢ص + ١ = $ ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٥

٤ إذا كان المستقيمان: $س + ٢ص = ١$ ، $٢س + أ ص = ٥$ متوازيين فإن $أ = $ ....

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) صفر

٥ $\sqrt{١٦ + ٩} = ٤ + $ ....

(أ) ٣ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) ٥

٦ إذا كان للكسر الجبرى $\frac{ص + ٢}{ص + ١}$ معكوس ضربى هو $\frac{ص + ١}{ص - أ}$ فإن $أ = $ ....

(أ) -٢ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) -١

٧ المجال المشترك للكسرين: $\frac{٣}{س - ٦}$ ، $\frac{٩}{٢س - ١٢}$ هو ....

(أ) $\varnothing$ (ب) ع $-\{٦\}$ (جـ) ع $-\{١٢\}$ (د) ع $-\{٦ ، ١٢\}$

٨ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من تجربة عشوائية ما، وكان $ل(أ) = \frac{١}{٣}$ ،
$ل(أ \cup ب) = \frac{٧}{١٢}$ فإن: $ل(ب) = $ ....

(أ) $\frac{١}{٤}$ (ب) $\frac{١}{١٢}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٣}$

٩ مجموعة أصفار الدالة: $د(س) = \frac{س}{س - ٥} + \frac{٤}{٥ - س}$ هى ....

(أ) $\{٥\}$ (ب) $\{-٥\}$ (جـ) $\{٤\}$ (د) $\{-٤\}$

---

٢ أجب عن الأسئلة الآتية موضحًا خطوات الحل:

١ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما، وكان:

$ل(\acute{أ}) = ٠,٣$ ، $ل(أ \cap ب) = ٠,٣$

فأوجد: $ل(أ)$ ، $ل(أ - ب)$

٢ أوجد مجموعة حل المعادلتين فى ع × ع : $س + ص = ٣$ ، $س ص = ٢$

٣ أوجد قيمتى أ ، ب علمًا بأن (٣ ، -١) حل للمعادلتين:

$أ س + ب ص - ٥ = $ صفر ، $٣ أ س + ب ص = ١٧$

٤ باستخدام القانون العام أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة:

$٢ س^٢ - ٤ س + ١ = ٠$ مقربًا الناتج لرقمين عشريين.

٥ إذا كانت $ن_١(س) = \frac{س^٣ + س^٢ + س}{س^٣ - ١}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س}{س^٢ - س}$

فبين: هل: $ن_١ = ن_٢$ أم لا؟ مع ذكر السبب.

٦ أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبينًا المجال: $ن(س) = \frac{س^٢ - ٣س}{س^٢ - ٥س + ٦} - \frac{٢س + ٤}{س^٢ - ٤}$

٧ أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبينًا مجال ن ، ثم أوجد ن(−٢) إن أمكن:

$ن(س) = \frac{س^٢ + ٢س}{س^٣ - ٢٧} \div \frac{س + ٢}{س^٢ + ٣س + ٩}$

٦ محافظة الدقهلية

١ (أ) اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة ف لتجربة عشوائية، فإن: أ ∩ ب = ...

(أ) صفر　　(ب) ف　　(جـ) ١　　(د) ∅

٢ إذا كان س + ٣ص = ٧ ، فإن: س + ٣(ص + ٥) = ...

(أ) ٢٢　　(ب) ٢١　　(جـ) ٧　　(د) ٣

٣ المجال المشترك للكسرين الجبريين $ن_١(س) = \frac{٣}{س^٢ - ١}$ ، $ن_٢(س) = \frac{٤ س}{س^٢ - س}$ هو ....

(أ) ح −{١}　　(ب) ح −{٠ ، ١}

(جـ) ح −{٠ ، ١ ، −١}　　(د) ح −{−١ ، ١}

(ب) باستخدام القانون العام، أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة: $س^٢ - ٦س + ٤ = ٠$ مقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية.

---

٢ (أ) اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان للمعادلتين: ٣س + م ص = ٥ ، ك س + ٦ص = ١٥

عدد لا نهائى من الحلول فى ح × ح فإن: ك م = ...

(أ) ١٨　　(ب) ١٢　　(جـ) ٦　　(د) ٣

٢ مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = $س^{٢}$ + ٢٥ هى ....

(أ) {٥}　　(ب) {-٥}　　(جـ) {-٥ ، ٥}　　(د) ∅

٣ إذا كان (س - ٤ ، ٥) = (٣ ، ص + ٢) فإن: س + ص = ...

(أ) ١٢　　(ب) ١٠　　(جـ) ٨　　(د) ٦

(ب) إذا كان $ن_{١}$ ، $ن_{٢}$ كسرين جبريين حيث:

$ن_{١}$(س) = $\frac{٢ س}{٢س + ٤}$ ، $ن_{٢}$(س) = $\frac{س^{٢} + ٢ س}{س^{٢} + ٤ س + ٤}$، فأثبت أن: $ن_{١}$ = $ن_{٢}$

---

٣ (أ) اختر الإجابة الصحيحة:

١ المعادلة س ص = ٣ من الدرجة .... فى متغيرين.

(أ) الصفرية　　(ب) الأولى　　(جـ) الثانية　　(د) الثالثة

٢ إذا كان مجال الدالة د(س) = $\frac{٣}{س + ك}$ هو ح -{-٢} فإن: ك = ...

(أ) ٢　　(ب) ٣　　(جـ) -٣　　(د) -٢

٣ أبسط صورة للدالة ن(س) = $\frac{٣ - س}{س - ٣}$ حيث س ≠ ٣ هى............

(أ) ٣　　(ب) -٣　　(جـ) ١　　(د) -١

(ب) أوجد قيمة كلٍّ من: أ ، ب ، علمًا بأن (١ ، ٢) حل للمعادلتين:

أ س + ب ص = -٥ ، ٢أ س + ب ص = ٢

---

٤ (أ) أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبينًا المجال، حيث: ن(س)= $\frac{س^{٢} - ٢س + ٤}{س^{٣} + ٨}$ + $\frac{س^{٢} - ١}{س^{٢} + س - ٢}$

(ب) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية، وكان:

ل (أ) = ٠,٥ ، ل (ب) = ٠,٤ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,١

فأوجد ١ ل (أ ∪ ب)　　٢ ل (ب - أ)

---

٥ (أ) إذا كان ن (س) = $\frac{س^{٢} - ٢ س}{(س - ٢) (س^{٢} + ٢)}$

١ فأوجد $ن^{-١}$ (س)، وعين مجال $ن^{-١}$ (س)

٢ إذا كان $ن^{-١}$ (س) = ٣ فأوجد قيمة س

(ب) مستطيل يزيد طوله على عرضه بمقدار ٣سم، مساحته تساوى ٢٨$سم^{٢}$، أوجد محيطه.

٧ محافظة البحيرة

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كانت د (س) = $\frac{س - ٥}{٥ - س}$ ، س ≠ ٥ فإن د (س) فى أبسط صورة هى ....

(أ) −١ (ب) ١ (جـ) ٥ (د) −٥

٢ إذا كان س حدثًا من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف ، وكان ل (سَ) = ٢ ل (س)

فإن: ل (س) = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٣}$ (جـ) ١ (د) $\frac{٢}{٣}$

٣ مجال المعكوس الضربى للكسر الجبرى: $\frac{س + ٢}{س - ٣}$ هو ....

(أ) ع −{−٢} (ب) ع −{−٢ ، ٣} (جـ) ع −{٣} (د) {−٢ ، ٣}

٤ المنحنى ص = أ س^{٢} + ب س + حـ يقطع محور الصادات عند النقطة ....

(أ) (حـ ، ٠) (ب) (٠ ، ب) (جـ) (٠ ، حـ) (د) (ب ، ٠)

٥ إذا كان $\frac{١}{س}$ + $\frac{١}{ص}$ + $\frac{١}{س ص}$ = $\frac{ك}{س ص}$ فإن ك = ...

(أ) س ص (ب) س + ص (جـ) ٣ (د) س + ص + ١

٦ إذا كان $\sqrt{س^{٢}}$ = ٢٥ فإن س = ...

(أ) ٥ (ب) ± ٥ (جـ) ٢٥ (د) ± ٢٥

٧ مجموعة أصفار الدالة: د (س) = صفر هى ....

(أ) ع −{٠} (ب) ∅ (جـ) ع (د) {٠}

٨ إذا كان هناك حل وحيد للمعادلتين: س + ٤ ص = ٥ ، ٣س + ك ص = ١٢ ، فإن ك ≠ ....

(أ) ١٢ (ب) −٤ (جـ) ٤ (د) −١٢

٩ درجة المقدار الجبرى: ٣س + ٤ ص + س^{٢}ص هى ....

(أ) الأولى (ب) الثالثة (جـ) الثانية (د) الرابعة

٢ [١] إذا كان $أ$ ، $ب$ حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية، وكان:

$ل(أ) = ٠,٧$ ، $ل(ب) = ٠,٦$ ، $ل(أ \cap ب) = ٠,٤$

فأوجد كلًّا: (١) $ل(أ')$ (٢) $ل(أ \cup ب)$ (٣) $ل(أ - ب)$

[٢] إذا كان $ن_١(س) = \frac{س^٢}{س^٣ - س^٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٣ + س^٢ + س}{س^٤ - س}$ ، فأثبت أن $ن_١ = ن_٢$

[٣] أوجد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين فى ح × ح: $س - ص = ١$ ، $س^٢ - س ص = ٣$

[٤] أوجد $ن(س)$ فى أبسط صورة مبينًا مجالها، حيث: $ن(س) = \frac{س^٢ - ٥س + ٦}{س^٣ - ٨} \div \frac{س - ٣}{س^٢ + ٢س + ٤}$

[٥] أوجد مجموعة الحل فى ح للمعادلة: $س^٢ + ٢س - ٤ =$ صفر (مقربًا الناتج لرقمين عشريين)

[٦] أوجد $ن(س)$ فى أبسط صورة مبينًا مجالها،

حيث: $ن(س) = \frac{س^٢ + ٦س + ٨}{س^٢ - ٤} - \frac{س^٢ - ٥س}{س^٢ - ٧س + ١٠}$

[٧] أوجد جبريًّا مجموعة حل المعادلتين الآتيتين فى ح × ح: $٣س + ص = ٩$ ، $٢س - ص = ١$

٨ محافظة الشرقية

١ (أ) اختر الإجابة الصحيحة:

[١] $\sqrt{٢٥ - ٩} = ٥ -$ ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ١ (د) ١-

[٢] إذا كان ص (د) = ∅ ، فإن د (س) يمكن أن تكون ....

(أ) $س^٢ + ٤$ (ب) $س - ٤$ (جـ) $س^٢ - ٤$ (د) $س + ٤$

[٣] إذا كان المستقيمان $س - ٣ص = ٢$ ، $س + ك ص = ٥$ متوازيين فإن ك = ...

(أ) ٢ (ب) ٣- (جـ) ٥ (د) ٣

(ب) إذا كان: $ن_١(س) = \frac{٥س}{٥س + ١٠}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ + ٢س}{س^٢ + ٤س + ٤}$ فأثبت أن $ن_١ = ن_٢$

٢ (أ) اختر الإجابة الصحيحة:

١ أبسط صورة للدالة د: د (س) = $\frac{س}{س - ٢} + \frac{٢}{٢ - س}$ هى ....

(أ) س − ٢ (ب) س (جـ) ٢ (د) −١

٢ إذا كان $\frac{س}{ص}$ = ٣ ، ص^{٢} = ٤ ، فإن س = ...

(أ) ± ٦ (ب) −٦ (جـ) ٦ (د) ٣

٣ إذا كان أ ⊃ ب فإن ل (أ − ب) = ...

(أ) ل (ب) (ب) صفر (جـ) ل (أ) (د) ١

(ب) أوجد فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين: س − ص = ١ ، ص^{٢} + س = ٧

---

٣ (أ) اختر الإجابة الصحيحة:

١ مجال المعكوس الضربى للدالة د: د (س) = $\frac{٢}{س^{٢} + ٤}$ هو ....

(أ) ح − {١ ، ٢ ، −٢} (ب) ح − {٢ ، −٢}

(جـ) ح (د) ح − {١}

٢ إذا كان ٢^{س} = ٣ ، فإن ٨$^{-س}$ = ...

(أ) −٢٧ (ب) ٨١ (جـ) $\frac{١}{٢٧}$ (د) $\frac{١}{٨١}$

٣ المجال المشترك للدالتين د$_{١}$ (س) = $\frac{س}{س - ٣}$ ، د$_{٢}$ (س) = $\frac{س + ٣}{٢}$ ....

(أ) ح − {٢ ، ٣} (ب) ح − {٠ ، ٣} (جـ) ح − {٣} (د) ح − {٢}

(ب) أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية فى ح: ٢س^{٢} − ٤س + ١ = ٠ مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

---

٤ (أ) أوجد ن (س) فى أبسط صورة موضحًا المجال: ن (س) = $\frac{س^{٢} - ٣س + ٢}{س^{٢} - ٤} - \frac{٣س - س^{٢}}{س^{٢} - س - ٦}$

(ب) أوجد فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين الآتيتين: س − ص = ٣ ، ٢س + ص = ٦

---

٥ (أ) أوجد ن (س) فى أبسط صورة موضحًا المجال: ن (س) = $\frac{س^{٣} - ٨}{س^{٢} - ٩} \times \frac{س + ٣}{س^{٢} + ٢س + ٤}$

(ب) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان ل (أَ) = ٠,٤ ، ل (ب) = ٠,٥ ،

ل (أ ∪ ب) = ٠,٨ فأوجد كلًا من: (١) ل (أ) (٢) ل (أ ∩ ب)

٩ محافظة بورسعيد

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كانت د(س) = $\frac{س + ٧}{س - ٣}$ فإن: د ليست معرفة عندما س = ...

(أ) ٣ (ب) ٧ (جـ) -٣ (د) -٧

٢ عددان موجبان مجموعهما ٨ والفرق بينهما ٢ فإن العددين هما ....

(أ) ٢، ٦ (ب) ٣، ٥ (جـ) ٦، ٤ (د) ٢، ٤

٣ $ح_+ \cap ح_-$ = ...

(أ) {صفر} (ب) ح (جـ) $\varnothing$ (د) $ح_+$

٤ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = صفر هى ....

(أ) ح -{صفر} (ب) $\varnothing$ (جـ) {صفر} (د) ح

٥ إذا كان منحنى الدالة التربيعية د متماثلًا حول محور الصادات، ويمر بالنقطة (٢ ، ٠)، فإن مجموعة حل المعادلة د (س) = صفر فى ح هى ....

(أ) {٢ ، -٢} (ب) {٢} (جـ) {٢ ، صفر} (د) (٢ ، -٢)

٦ ٣ × ٤ - ٤ ÷ ٢ = ...

(أ) صفر (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ١٠

٧ إذا كان: $أ'$ هو الحدث المكمل للحدث أ فإن: $أ' \cup أ$ = ...

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) ف (د) $\varnothing$

٨ مجال الدالة $ن^{-١}$ حيث ن(س) = $\frac{س + ٤}{س - ٤}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح -{٤} (جـ) ح -{٤ ، -٤} (د) {٤ ، -٤}

٩ إذا كانت س $\in$ ح- {٠ ، ١} فإن $\frac{١ - س}{س} \div \frac{س - ١}{س}$ = ...

(أ) ١ (ب) -١ (جـ) س - ١ (د) س

٢ أجب عن الأسئلة الآتية:

١ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان ل (أ) = $\frac{٣}{٥}$ ،
ل (ب) = $\frac{١}{٥}$ ، فأوجد: ل (أ ∩ ب) ، ل (أ ∪ ب)

٢ أوجد ن(س) فى أبسط صورة مع ذكر المجال، حيث ن (س) = $\frac{٢س}{س + ٢} + \frac{٤}{س + ٢}$

٣ أوجد ن(س) فى أبسط صورة مع ذكر المجال، حيث ن (س) = $\frac{س^٢ + ٣س}{س^٢ - ٩} \times \frac{س - ٣}{٢س}$

٤ أثبت أن: $ن_١ = ن_٢$ ، حيث: $ن_١$ (س) = $\frac{س^٢ - ٤}{س^٢ - ٤س + ٤}$ ، $ن_٢$ (س) = $\frac{س + ٢}{س - ٢}$

٥ أوجد جبريًا فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين الآتيتين:

س + ص = ٥ ، س - ص = ١

٦ باستخدام القانون العام أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية فى ح:

$س^٢ - ٥س + ٣ = ٠$ (مقربًا الناتج لأقرب رقم عشرى واحد)

٧ أوجد جبريًا فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين الآتيتين: س - ٢ ص = ٠ ، س ص = ٨

١٠ محافظة شمال سيناء

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ المجال المشترك للكسرين $\frac{٤}{س - ٥}$ ، $\frac{٤}{٢س - ١٠}$ هو ....

(أ) ح -{٤} (ب) ح (جـ) ح -{٥} (د) ح -{٩}

٢ إذا كان للمعادلتين س + ٢ص = ٥ ، ٣س + ك ص = ١٥ عدد لا نهائى من الحلول فى ح × ح
فإن قيمة ك = ...

(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ١٥ (د) ١٨

٣ إذا كان $س^٢ - ص^٢ = ١٢$ ، س - ص = $\frac{١}{٤}$ فإن: س + ص = ...

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ١٢ (د) ٤٨

٤ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما فإن: ل (أ ∩ ب) = ...

(أ) صفر (ب) $\frac{١}{٢}$ (جـ) ١ (د) ٢

٥ إذا كان $٧^{س-٣}$ = ١ ، فإن: س = ...

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٧ (د) ١٠

٦ إذا كان مجال الدالة ر(س) = $\frac{س - ٧}{س^٢ - أ س + ١٦}$ هو ح -{٤} فإن: أ = ...

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

٧ مجموعة حل المعادلتين: س - ٤ = ٠ ، ص + ٣ = ٠ فى ح × ح هى ....

(أ) {(-٤ ، ٣)} (ب) {(٤ ، ٣)} (جـ) {(٤ ، -٣)} (د) {(-٣ ، ٤)}

٨ أبسط صورة للمقدار الجبرى $\frac{س^٢ + ٢}{س^٢ + ٦}$ + $\frac{٤}{س^٢ + ٦}$ هى ....

(أ) س^٢ + ٦ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) $\frac{١}{س^٢ + ٦}$

٩ مجموعة أصفار الدالة د: د(س) = $س^٢$ - ١٦ هى ....

(أ) {٤} (ب) {-٤ ، ٤} (جـ) ∅ (د) {-٤}

---

٢ أجب عن الأسئلة الآتية:

١ أوجد فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين الآتيتين معًا: ٢ س + ص = ٥ ، ٤ س - ص = ٧

٢ إذا كان: $ر_١$ (س) = $\frac{س - ٣}{س^٢ - ٩}$ ، $ر_٢$ (س) = $\frac{٢ س - ٦}{٢ س^٢ - ١٨}$ فأثبت أن: $ر_١$ = $ر_٢$

٣ أوجد فى ح باستخدام القانون العام مجموعة حل المعادلة: $س^٢$ - ٤ س + ٢ = صفر مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.

٤ أوجد ر(س) فى أبسط صورة مبينًا المجال،

حيث: ر(س) = $\frac{س + ٣}{س^٢ + ٢ س - ٣}$ × $\frac{س^٢ - ١}{س^٢ - ٤ س - ٥}$

٥ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة ف لتجربة عشوائية ما، وكان ل (أ) = ٠,٧ ، ل (ب) = ٠,٤ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٢ فأوجد:

(١) ل (أ') (٢) ل (أ ∪ ب) (٣) ل (ب - أ)

٦ إذا كانت $ن(س) = \frac{س - ٣}{س^٢ - س - ٦}$ فأوجد: $ن^{-١}(س)$ فى أبسط صورة مبينًا مجال $ن^{-١}$

٧ أوجد فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين الآتيتين معًا: س − ص = ٠ ، $س^٢ + ص^٢ = ٣٢$

١١ محافظة الفيوم

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ مجموعة أصفار الدالة د (س) = $\frac{س - ٣}{س + ٢}$ هى ....

(أ) {٣} (ب) {−٢} (جـ) {−٣} (د) {٢}

٢ أبسط صورة للدالة د (س) = $\frac{س - ٧}{٧ - س}$ ، حيث س ≠ ٧ هى ....

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) −٧ (د) ٧

٣ مجال الدالة د (س) = ٢ $س^{-٣}$ هو ....

(أ) {٢} (ب) {−٢} (جـ) ح − {−٣} (د) ح − {٠}

٤ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان ل (أ) = ٠,٣ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٦ ، فإن ل (ب/) = ...

(أ) ٠,٣ (ب) ٠,٦ (جـ) ٠,٧ (د) ٠,٠٩

٥ إذا كانت $٣^{س} = ٩$ فإن $٣^{س+١}$ = ...

(أ) ٣ (ب) ٩ (جـ) ٢٧ (د) ٨١

٦ إذا كان $\sqrt{٦٤ + ٣٦}$ = ٨ + س فإن: س =............

(أ) ٦ (ب) ٩ (جـ) ٢ (د) ١٠

---

٢ (أ) أوجد د(س) فى أبسط صورة موضحًا المجال، حيث: د(س) = $\frac{٢س - ٦}{س^٢ - ٩} - \frac{٨}{٣ - س^٢ - ٢س}$

(ب) أوجد فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين الآتيتين جبريًا: ص − س = −٣ ، $س^٢ + ص^٢ = ٥$

---

٣ (أ) أوجد فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين: ٢ص = س − ٥ ، ٤س = ٢ − ص

(ب) أوجد باستخدام القانون العام مجموعة حل المعادلة الآتية: $س^٢ = ٤ + ٢س$ فى ح

(مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين).

٤ (أ) إذا كان: $د_1(س) = \frac{٢س}{٢س + ٤}$ ، $د_2(س) = \frac{س^2 + ٢س}{س^2 + ٤س + ٤}$ فهل $د_1 = د_2$

(ب) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان: ل (أ) = ٠,٦ ،

ل (ب) = ٠,٥ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٣ فأوجد:

١ ل (أَ)　　٢ ل (أ ∪ ب)　　٣ ل (ب − أ)

---

٥ (أ) أوجد: د(س) في أبسط صورة مبينًا المجال: $د(س) = \frac{٣س^2 - ٦س}{س^2 - ٤} \div \frac{س^2 + س}{س^2 + ٣س + ٢}$

(ب) اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان $د(س) = \frac{س - ٣}{س + ٢}$ ، فإن مجال $د^{-1}(س)$ هو ....

(أ) {−٣}　(ب) {−٢}　(جـ) ح −{−٣ ، ٢}　(د) ح −{−٢ ، ٣}

٢ إذا كانت مجموعة الحل للمعادلة: $س^2$ − أ س + ٤ = ٠ في ح هي ∅ ،

فإن أ يمكن أن تساوى ....

(أ) −٥　(ب) صفر　(جـ) ٤　(د) ٥

٣ المستقيمان س + ٥ = ٠ ، ٢ص + ٦ = ٠ يتقاطعان في الربع ....

(أ) الأول　(ب) الثاني　(جـ) الثالث　(د) الرابع

١٢ محافظة بنى سويف

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان: $\sqrt{س} = \sqrt[3]{٨}$ فإن: س = ...

(أ) ٢　(ب) ٤　(جـ) ١٦　(د) ٦٤

٢ إذا كان المستقيمان الممثلان للمعادلتين: س + ٣ص = ٥ ، س + ك ص = ٩

متوازيين، فإن: ك = ...

(أ) ٣　(ب) ٥　(جـ) ٧　(د) ٩

٣ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية فإن ل (أ ∩ ب) = ...

(أ) ١　(ب) ٠,٥　(جـ) صفر　(د) ∅

٤ مجموعة أصفار الدالة د: د (س) = ٢س (س^{٢} − ٢س + ١) هى ....

(أ) {صفر} (ب) {صفر ، ١} (جـ) {صفر ، −١} (د) {صفر، ١، −١}

٥ إذا كان منحنى الدالة التربيعية د يمر بالنقاط (−١ ، ٠) ، (٠ ، −٤)، (٤ ، ٠) فإن مجموعة حل المعادلة د (س) = صفر فى ح هى ....

(أ) {صفر ، −١} (ب) {−١ ، −٤} (جـ) {−١ ، ٤} (د) {٤ ، −٤}

٦ إذا كان: ن(س) = $\frac{س - ٥}{س + ٢}$ فإن مجال ن$^{-١}$ هو ....

(أ) ح − {−٢} (ب) ح − {٥} (جـ) ح − {٢ ، −٥} (د) ح − {٥ ، −٢}

---

٢ (أ) اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان س^{٢} − ص^{٢} = ٢ (س + ص) حيث س + ص ≠ صفر ، فإن س − ص = ...

(أ) ٨ (ب) ٦ (جـ) ٤ (د) ٢

٢ أبسط صورة للدالة د: د (س) = $\frac{٣ - س}{س - ٣}$ حيث س ≠ ٣ هى ....

(أ) −١ (ب) صفر (جـ) ١ (د) ٣

٣ إذا كان المجال المشترك للدالتين ن$_{١}$(س) = $\frac{٣}{س}$ ، ن$_{٢}$(س) = $\frac{٥}{س + ك}$ هو ح −{٠ ، ٢}، فإن: ك = ...

(أ) ٢ (ب) −٢ (جـ) −٣ (د) −٥

(ب) أوجد فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين: ص − س = ٢ ، س^{٢} + س ص − ٤ = صفر

---

٣ (أ) أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبينًا مجال الدالة ن ، حيث:

$$ن(س) = \frac{س - ٢}{س^{٢} - ٤} + \frac{٢س + ٦}{س^{٢} + ٥س + ٦}$$

(ب) أوجد جبريًا فى ح × ح مجموعة حل المعادلتين: س = ٣ ص + ٧ ، س + ٢ ص = ١٢

---

٤ (أ) إذا كانت ن(س) = $\frac{س^{٢} + ١٤س + ٤٩}{س^{٣} - ٨} \div \frac{س + ٧}{س - ٢}$

فأوجد ن(س) فى أبسط صورة وعين مجالها، ثم أوجد ن(−١)

(ب) باستخدام القانون العام أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة $س^2 = ٥ - ٢س$

مقربًا الناتج لرقمين عشريين.

٥ (أ) إذا كان: $ن_1(س) = \frac{٣}{س - ١} - \frac{٢}{س - ١}$ ، $ن_2(س) = \frac{س^2}{س^3 - س^2}$ فأثبت أن:

$ن_1(س) = ن_2(س)$ لجميع قيم س التى تنتمى للمجال المشترك، وأوجد هذا المجال.

(ب) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان ل(أ) = ٠,٧ ،

ل(أ - ب) = ٠,٥ ، فأوجد: ل(أ′) ، ل(أ ∩ ب)

١٣ محافظة المنيا

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان أ حدثًا من فضاء عينة ف لتجربة عشوائية، وكان ل(أ) = ل(أ′)، فإن ل(أ) = ...

(أ) ١ (ب) $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) $\frac{١}{٣}$

٢ أبسط صورة للمقدار $\frac{س^2 + ١}{س^2 + ٤} + \frac{٣}{س^2 + ٤}$ هى ....

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ١ (د) $\frac{١}{س^2 + ٤}$

٣ مجموعة أصفار الدالة د حيث د(س) = س ($س^2$ - ٢س + ١) هى ....

(أ) {٠ ، ١} (ب) {٠ ، -١} (جـ) {صفر} (د) {١}

٤ إذا كان منحنى الدالة التربيعية د يمس محور السينات فى النقطة (ك + ١ ، ك - ٢)،

فإن: ك = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٥ إذا كانت $ن(س) = \frac{س}{س^2 + ٩}$ فإن: مجال $ن^{-1}$ هو ....

(أ) ∅ (ب) ح - {-٣ ، ٣} (جـ) ح (د) ح - {٠}

٦ الدالة ن(س) = أ$س^2$ + ب س + جـ عندما أ ≠ ٠ ، أ ، ب ، جـ ∈ ح من الدرجة ....

(أ) الصفرية (ب) الأولى (جـ) الثانية (د) الثالثة

٢ (أ) اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان $د_١(س) = \frac{س}{س^٢ + س}$ ، $د_٢(س) = \frac{١}{س + ١}$ فإن $د_١ = د_٢$ عندما $س \in$ ....

(أ) ح -{٠} (ب) ح -{٠، ١} (جـ) ح -{-١} (د) ح -{٠، -١}

٢ إذا كان أ ب = ٢ ، أ $ب^٢$ = ١٨ فإن ب = ...

(أ) -٣ (ب) ± ٣ (جـ) ٣ (د) ٩

٣ المستقيمان ٣س + ٥ص = ٠ ، ٥س - ٣ص = ٠ يتقاطعان في ....

(أ) نقطة الأصل (ب) الربع الأول (جـ) الربع الثانى (د) الربع الرابع

(ب) باستخدام القانون العام أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية فى ح:

$٢س^٢$ - س - ٢ = ٠ ، عندما $\sqrt{١٧}$ = ٤,١٢

---

٣ (أ) إذا كانت الدالة د : د(س) = $\frac{س + ٢}{س^٢ - أس + ٢٥}$ ، مجال د = ح - {٥}

فأوجد قيمة أ حيث أ $\in$ ح

(ب) أوجد د(س) فى أبسط صورة مبينًا المجال، د(س) = $\frac{س^٢ - ٢س - ١٥}{س^٢ - ٩} \div \frac{٢س - ١٠}{س^٢ - ٦س + ٩}$

---

٤ (أ) أوجد د(س) فى أبسط صورة مبينًا المجال، د(س) = $\frac{٢س + ٦}{س^٢ + س - ٦} - \frac{س^٢ - ٦س}{س^٢ - ٨س + ١٢}$

(ب) أوجد فى ح × ح مجموعة حل زوج المعادلات: س - ص = ١ ، $س^٢ + ص^٢ = ٢٥$

---

٥ (أ) أوجد فى ح × ح مجموعة حل زوج المعادلات: ٢س - ص = ٣ ، س + ٢ص = ٤

(ب) إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان:

ل (أ - ب) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (أ ∪ ب) = $\frac{٣}{٥}$ فأوجد:

١ ل (أ ∩ ب) ٢ ل (أ) ٣ ل (ب)

١٤ محافظة أسيوط

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كانت $٢^{س} = ٣$ ، فإن $٨^{س} =$ ....

(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ٩ (د) ٢٧

٢ إذا كان المستقيمان الممثلان للمعادلتين س + ٢ص = ١٤ ، ٢س + كص = ٥
متوازيين فإن: ك = ...

(أ) ٢ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ١٢

٣ مجموعة أصفار الدالة د : د(س) = $\frac{س^{٢} - س - ٢}{س^{٢} + ٤}$ هى ....

(أ) $\varnothing$ (ب) ح (جـ) {٢ ، -١} (د) {-٢ ، ٢}

٤ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، أ $\supset$ ب ، فإن: ل (أ $\cup$ ب) = ...

(أ) ل (أ) (ب) ل (ب) (جـ) ل (أ $\cap$ ب) (د) صفر

٥ المجال المشترك للكسرين $\frac{٢س}{س - ٣}$ ، $\frac{٧س + ١}{٢س - ٦}$ هو ....

(أ) ح (ب) ح - {٠ ، ٣} (جـ) ح - {٣} (د) ح - {٣ ، -٣}

٦ إذا كان للكسر الجبرى $\frac{س - ١}{س + ٥}$ معكوس ضربى هو $\frac{س + ٥}{س + ٣}$ ، فإن: أ = ...

(أ) ٣ (ب) -٥ (جـ) -٣ (د) ٥

---

٢ أجب عن الأسئلة الآتية:

(أ) أوجد ن(س) فى أبسط صورة موضحًا مجالها، حيث ن(س) = $\frac{س^{٣} - ٢٧}{س^{٢} - ٥س + ٦} \div \frac{س^{٢} + ٣س + ٩}{س - ٢}$

(ب) أوجد فى ح باستخدام القانون العام مجموعة حل المعادلة: $س^{٢} + ٣س = ١$

(مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد)

---

٣ (أ) اختر الإجابة الصحيحة:

١ عدد حلول المعادلتين س - ٢س = ١ ، ٣س + ص = ١٠ معًا فى ح × ح هو ....

(أ) صفر (ب) ١

(جـ) ٢ (د) عدد لانهائى من الحلول

٢ إذا كان: $د(س) = \frac{س - ١}{س + ٣}$ ، فإن مجال $د^{-١}$ هو ....

(أ) ع -{-٣}　(ب) ع -{١}　(جـ) ع -{١ ، -٣}　(د) ع

٣ $\sqrt{١٤٤ + ٢٥} = ١٢ +$ ....

(أ) -٢　(ب) ١　(جـ) ٤　(د) ٥

(ب) أوجد فى ع × ع مجموعة حل المعادلتين الآتيتين: س = ٣ ، $س^٢ + ص^٢ = ٢٥$

---

٤ (أ) إذا كان: $د_١(س) = \frac{١}{س}$ ، $د_٢(س) = \frac{س^٢ + ٤}{س^٣ + ٤س}$ فأثبت أن $د_١ = د_٢$

(ب) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ما ، وكان ل (أ/) = ٠,٦ ،

ل (ب) = ٠,٥ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٢ فأوجد:

١ ل (أ)　٢ ل (أ ∪ ب)　٣ ل (ب - أ)

---

٥ (أ) أوجد د(س) فى أبسط صورة موضحًا مجالها، حيث $د(س) = \frac{س^٢ + س}{س^٢ - ١} - \frac{س - ٥}{س^٢ - ٦س + ٥}$

(ب) أوجد مجموعة حل المعادلتين الآتيتين: ٢س + ص = ١٠ ، س - ص = ٢ فى ع × ع

١٥ محافظة قنا

١ (أ) اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان: س - ص = ٣ ، $س^٢ - ص^٢ = ١٢$ ، فإن: س + ص = ...

(أ) ٢　(ب) ٣　(جـ) ٤　(د) ١٢

٢ إذا كان: $د(س) = \frac{س - ٣}{٧}$ فإن مجال $د^{-١}(س)$ هو ....

(أ) ع　(ب) ع -{٧}　(جـ) ع -{٣}　(د) ع -{٧ ، ٣}

٣ المجال المشترك للكسرين: $\frac{س - ٣}{٣}$ ، $\frac{س + ٢}{س}$ هو ....

(أ) ع -{٣}　(ب) ع -{٠}　(جـ) ع -{٣ ، -٢}　(د) ع -{٠ ، ٣}

(ب) إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان ل (أ) = ٠,٥ ، ل (ب) = ٠,٧ ،

ل (أ ∩ ب) = ٠,٤ فأوجد: ل (ب - أ)

٢ (أ) اختر الإجابة الصحيحة:

١ عدد حلول المعادلتين: س + ص = ٥ ، ٢س + ٢ص = ١٠ معًا فى ع × ع هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لانهائى

٢ مجموعة أصفار الكسر الجبرى: $\frac{س - ٣}{٥}$ هى ....

(أ) ع (ب) ∅ (جـ) {٣} (د) ع - {٣}

٣ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية ف

فإن ل (أ ∩ ب) = ...

(أ) ∅ (ب) صفر (جـ) ل (أ) (د) ل (ب)

(ب) أوجد ن(س) فى أبسط صورة موضحًا المجال، حيث ن(س) = $\frac{س^٣ - ٨}{س^٢ + س - ٦} \div \frac{س^٢ + ٢س + ٤}{٣س + ٩}$

---

٣ (أ) اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان: أ ب = ١ ، ب حـ = ٤ ، أ حـ = ٩ ، حيث أ ، ب ، حـ أعداد حقيقية موجبة، فإن: أ ب حـ = ...

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

٢ الزوج المرتب الذى يحقق المعادلتين: س ص = ٤ ، س = ص معًا هو ....

(أ) (٢ ، ٢) (ب) (-٢ ، ٢) (جـ) (٢ ، -٢) (د) (٤ ، ١)

٣ إذا كان ن (س) = $\frac{٣س - ٦}{س - ٣}$ ، فإن: $ن^{-١}$ (٢) = ...

(أ) صفر (ب) ٦ (جـ) $\frac{١}{٢}$ (د) غير معرف

(ب) إذا كان: $ن_١$(س) = $\frac{س^٢ - س}{س^٣ - ٢س^٢}$ ، $ن_٢$(س) = $\frac{س^٢ - ٣س + ٢}{س^٣ - ٤س^٢ + ٤س}$

فأثبت أن $ن_١$(س) = $ن_٢$(س)

---

٤ (أ) باستخدام القانون العام أوجد مقربًا لأقرب رقمين عشريين مجموعة الحل للمعادلة:

٢$س^٢$ + ٥س - ١ = ٠ حيث $\sqrt{٣٣}$ ≈ ٥,٧٤

(ب) حل فى ع × ع المعادلتين: س ص = ٣ ، س + ص = ٤

٥ (أ) أوجد المجال المشترك للكسرين الآتيين: $\frac{س}{٤ - س^٢}$ ، $\frac{٥}{س + ٢}$

(ب) زاويتان متكاملتان قياس إحداهما أربعة أمثال الأخرى، فما قياس كل منهما؟

١٦ محافظة الأقصر

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ مجال المعكوس الضربى للدالة د (س) = $\frac{س - ٢}{س + ١}$ هو ....

(أ) {-١} (ب) ح -{-١، ٢} (جـ) ح -{٢} (د) ح -{-١}

٢ عدد حلول المعادلة ٢س - ص = ٣ فى ح × ح هو ....

(أ) صفر (ب) ٢ (جـ) ١ (د) عدد لانهائى

٣ إذا كان ($٢^{س}$ ، $ص^٣$) = (٨ ، -٢٧) فإن س + ص = ...

(أ) -٦ (ب) ٦ (جـ) صفر (د) ٥

٤ $(س + ٥)^٢ = س^٢ + ك س + ٢٥$ فإن ك = ...

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) ١٠ (د) ١

٥ أ ، ب حدثان من فضاء عينة لتجربة عشوائية أ ⊂ ب حيث أ ≠ ب، فإن ل (أ ∪ ب) = ...

(أ) ل (ب) (ب) ل (أ) (جـ) ل (أ ∩ ب) (د) صفر

٦ مجموعة أصفار الدالة د(س) = ٥س هى ....

(أ) {$\frac{١}{٥}$} (ب) {صفر} (جـ) ٥ (د) ∅

٧ إذا كانت ص (د) = {٤ ، -٤} ، د(س) = $س^٢$ + أ ، فإن أ = ...

(أ) ٢ (ب) ±٤ (جـ) ±٢ (د) -١٦

٨ أحد حلول المعادلتين: س - ص = ٠ ، س ص = ٩ ....

(أ) (٣ ، -٣) (ب) (-٣ ، ٣) (جـ) (٣ ، ٣) (د) (٩ ، ١)

٩ مجال الدالة د حيث د (س) = $\frac{٥}{س - ١}$ هو ....

(أ) {١} (ب) {٥} (جـ) ح -{١} (د) ح -{٥}

٢ أجب عن الأسئلة الآتية:

١ إذا كان: $ن(س) = \frac{س^2 - س}{س^2 - 3س + 2}$:

(١) فعين مجال $ن^{-1}(س)$ (٢) وأوجد: $ن^{-1}(س)$ فى أبسط صورة

٢ مستخدمًا القانون العام أوجد فى ح حل المعادلة $س^2 - 4س + 3 = 0$
(مقربًا الناتج لرقمين عشريين)

٣ ضع ن (س) فى أبسط صورة مبينًا المجال $ن(س) = \frac{س^2 - 7س + 10}{س^2 - 6س + 5} \div (س^2 - 2س)$

٤ مستطيل طوله يزيد على عرضه بمقدار ٢سم، وكان محيطه = ٢٨سم، أوجد مساحة المستطيل.

٥ حل المعادلتين الآتيتين معًا فى ح × ح: $س - ص = 3$ ، $س ص = 10$

٦ إذا كان ل (أ) = $\frac{2}{5}$ ، ل (ب) = $\frac{1}{3}$ فأوجد: ل (أ ∪ ب) فى الحالتين التاليتين:

(١) الحدثان متنافيان

(٢) ل (أ ∩ ب) = $\frac{1}{15}$

٧ إذا كان $ن_1(س) = \frac{5س^3 + 10س}{(س^2+2)(س+1)}$ ، $ن_2(س) = \frac{5س}{س+1}$ فأثبت أن: $ن_1 = ن_2$

١٧ محافظة أسوان

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان: $5^{س-3} = 1$ ، فإن: س = …………

(أ) ٣ (ب) −٣ (جـ) صفر (د) ١

٢ إذا كان أَ هو الحدث المكمل للحدث أ، فإن: ل (أ ∩ أَ) = …………

(أ) ∅ (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) ١ (د) صفر

٣ مجموعة أصفار الدالة د (س) = ٥ هى …………

(أ) {٥} (ب) {١} (جـ) ∅ (د) {صفر}

٤ إذا كان: $ن(س) = \frac{س+2}{س+5}$ ، فإن مجال $ن^{-1}(س)$ هو …………

(أ) {−٢ ، −٥} (ب) {−٢}

(جـ) {−٥} (د) ح − {−٢ ، −٥}

٥ أبسط صورة للدالة د : د(س) = $\frac{س - ٥}{٥ - س}$ ، س ≠ ٥ هى ....

(أ) ٥ (ب) −٥ (جـ) ١ (د) −١

٦ مجال الدالة د (س) = $\frac{س - ٣}{س^٢ - ٤}$ هو ....

(أ) {٢ ، −٢} (ب) {٣} (جـ) ع −{٢ ، −٢} (د) {٢}

٧ إذا كان منحنى الدالة التربيعية د لا يقطع محور السينات فى أى نقطة، فإن عدد حلول المعادلة د (س) = صفر فى ع هو ....

(أ) حلّان (ب) عدد لا نهائى من الحلول

(جـ) صفر (د) حل وحيد

٨ $\sqrt{٣٦ + ٦٤}$ = ٦ + ...

(أ) ٨ (ب) ١٠ (جـ) ٤ (د) ١٤

٩ عدد الحلول للمعادلتين: ٣ س + ص = ٤ ، ٢ ص + ٦ س = ٣ فى ع × ع هو ....

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) عدد لانهائى (د) ∅

---

٢ أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

١ أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبينًا المجال ن (س) = $\frac{س + ١}{س^٢ - س - ٢} + \frac{س^٢ + ٣ س - ١٠}{٣ س^٢ + ١٦ س + ٥}$

٢ أوجد فى ع × ع مجموعة الحل للمعادلتين معًا: ٣ س + ص = ٧ ، س + ص = ٣

٣ أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبينًا المجال ن (س) = $\frac{س^٢}{س^٢ + ٢ س} + \frac{٢ س - ٤}{س^٢ - ٤}$

٤ أوجد مجموعة الحل للمعادلة الآتية باستخدام القانون العام: ٣س^٢ = ٥س − ١

(مقربًا الناتج لرقمين عشريين)

٥ إذا كان ⍟ ، ب حدثين متنافيين من تجربة عشوائية، وكان ل (⍟) = $\frac{١}{٣}$ ، ل (⍟ ∪ ب) = $\frac{٧}{١٢}$

فأوجد: ل (ب)

٦ إذا كان: $ن_١$ (س) = $\frac{س}{س^٢ - ٤}$ ، $ن_٢$ (س) = $\frac{٢ س}{٢س^٢ - ٨}$ فأثبت أن: $ن_١$ = $ن_٢$

٧ أوجد فى ع × ع مجموعة الحل للمعادلتين: س = ص ، س^٢ + ص^٢ = ٥٠

١٨ أزهر الإسكندرية

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ مجموعة أصفار الدالة د حيث د (س) = س – ٥ هى ....

(أ) ع (ب) ع – {٥} (جـ) {٥} (د) {٠ ، ٥}

٢ إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، فإن ل (أ – ب) = ...

(أ) صفر (ب) ل (أ) (جـ) ل (ب) (د) ل (أ ∪ ب)

٣ إذا كان: (س ≠ صفر) فإن: $\frac{٣ س}{س^٢ + ٥} \div \frac{س}{س^٢ + ٥}$ = ... (فى أبسط صورة)

(أ) ١ (ب) ٥ (جـ) ٢ (د) ٣

٤ مجموعة حل المعادلتين: ص = ٥ ، س + ص = صفر فى ع × ع هى ....

(أ) {(–٥ ، ٥)} (ب) {(٥ ، صفر)} (جـ) {(–٥ ، ٥)} (د) {(صفر ، ٥)}

٥ مجال الدالة ن حيث ن(س) = $\frac{٢ س + ٣}{س + ٧}$ هو ....

(أ) {٧} (ب) ع – {٧} (جـ) ع – {–٧} (د) ع – {–٣}

---

٢ أكمل ما يأتى:

١ إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان ل (أ) = ٠,٣ ،

ل (ب) = ٠,٦ ، ل (أ ∪ ب) = ٠,٧ فإن ل (أ ∩ ب) = ...

٢ مجموعة حل المعادلتين: ص = ٣ – س ، س ص = ٢ فى ع × ع هى ....

٣ المجال المشترك للكسرين الجبريين: $\frac{٢}{س – ٣}$ ، $\frac{س}{س^٢ + ٤}$ هو ....

٤ إذا كان للمعادلتين: س + ٢ ص = ١ ، ٢ س + ك ص = ٢ حل وحيد،

فإن ك لا يمكن أن تساوى ....

٥ أبسط صورة للمقدار: $\frac{س^٢ + ٦}{س^٢ + ٩} + \frac{٣}{س^٢ + ٩}$ هى ....

---

٣ (أ) باستخدام القانون العام أوجد فى ع مجموعة حل المعادلة: ٢ $س^٢$ – ٥ س + ١ = ٠

(مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد)

(ب) أوجد $ن(س)$ فى أبسط صورة مبينًا المجال، حيث $ن(س) = \frac{س^3 - 1}{س^2 + 4س - 5} \times \frac{س + 5}{س^2 + س + 1}$

ثم أوجد $ن(2)$، $ن(1)$ إن أمكن.

١٩ أزهر الوادى الجديد

١ اخترالإجابة الصحيحة:

١ المستقيمان $3س + 5ص = 0$ ، $5س - 3ص = 0$ متقاطعان فى ....

(أ) نقطة الأصل (ب) الربع الأول (جـ) الربع الثانى (د) الربع الرابع

٢ إذا كان $أ \subset ف$ لتجربة عشوائية ما، وكان $ل(أ') = 2 ل(أ)$ فإن $ل(أ) =$ ....

(أ) $\frac{1}{3}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (جـ) $\frac{2}{3}$ (د) 1

٣ عدد حلول المعادلتين: $س + ص = 2$ ، $ص + س = 3$ معًا هو ....

(أ) صفر (ب) 1 (جـ) 2 (د) 3

٤ أحد حلول المعادلتين: $س - ص = 2$ ، $س^2 + ص^2 = 20$ هو ....

(أ) $(-4 ، 2)$ (ب) $(2 ، -4)$ (جـ) $(3 ، 1)$ (د) $(4 ، 2)$

٥ إذا كان $ص(د) = \{5\}$ ، $د(س) = س^3 - 3س^2 + أ$ فإن $أ$ يساوى ....

(أ) -50 (ب) -5 (جـ) 5 (د) 50

٢ أكمل ما يأتى:

١ $(5 ، س - 7) = (ص + 1 ، -5)$ فإن $س + ص =$ ....

٢ المجال المشترك للدالتين $ن_1$ ، $ن_2$ حيث $ن_1(س) = \frac{س - 2}{س^2 - 4}$ ،

$ن_2(س) = \frac{1}{س + 1}$ هو ....

٣ أبسط صورة للدالة $ن$ حيث $ن(س) = \frac{5}{س - 3} - \frac{4}{3 - س}$ هى .... ومجالها ....

٤ احتمال الحدث المستحيل يساوى ....

٥ المعكوس الضربى للكسر الجبرى $\frac{3}{س^2 + 1}$ هو ....

٣ [١] باستخدام القانون العام أوجد مجموعة حل المعادلة الآتية فى ع : $٢س^٢ - ٥س + ١ =$ صفر، (مقربًا الناتج لرقم عشرى واحد)

[٢] أوجد ن(س) فى أبسط صورة مبينًا مجالها، حيث: $ن(س) = \frac{س^٢ + ٤س + ٣}{س^٣ - ٢٧} + \frac{س + ٣}{س^٢ + ٣س + ٩}$

[٣] إذا كان أ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائية، وكان ل (أ) = ٠,٣ ، ل (أ ∩ ب) = ٠,٢ ، فأوجد: ل (أ - ب)

٢٠ أزهر الأقصر

١ (أ) اختر الإجابة الصحيحة:

[١] إذا كان أ ، ب حدثين متنافيين، فإن ل (أ ∩ ب) = ...

(أ) ∅ (ب) ل (أ) (جـ) ل (ب) (د) صفر

[٢] إذا كان للمعادلتين س - ك ص = ل ، ٢س - ٤ص = ١ عدد لانهائى من الحلول فإن ل × ك = ...

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) ٨ (د) ٤

[٣] إذا كان: $ن_١(س) = \frac{س + ١}{س - ٢}$ ، $ن_٢(س) = \frac{س^٢ + س}{س^٢ - ٢س}$ فإن المجال المشترك الذى تتساوى فيه الدالتان $ن_١$ ، $ن_٢$ هو ....

(أ) ح -{٠} (ب) ح -{٠ ، ٢}

(جـ) ح -{٠ ، -٢} (د) ح -{٠ ، -١ ، -٢}

(ب) أوجد مجموعة الحل باستخدام القانون العام: س (س - ١) = ٤

٢ (أ) أكمل ما يأتى:

[١] مجموعة حل المعادلتين: س = ١ ، $س^٢ + ص^٢ = ١٠$ فى ح × ح هى ....

[٢] مجموعة أصفار الدالة د(س) = $س^٢ + ٢٥$ هى ....

[٣] مجموعة حل المعادلتين: س = ٣ ، ص = ٤ فى ح × ح هى ....

(ب) ضع فى أبسط صورة مبينًا المجال: $ن(س) = \frac{س^٢ - ٢س - ١٥}{س^٢ - ٩} \div \frac{٢س - ١٠}{س^٢ - ٦س + ٩}$

٣ (أ) إذا كان ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = $\frac{٢}{٣}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٣}$ فأوجد:

١ ل (أ ∪ ب)

٢ ل (أ َ)

(ب) ضع فى أبسط صورة مبينًا المجال: ن(س) = $\frac{٢}{س + ٣} + \frac{س + ٣}{س^٢ + ٣س}$

٢١ محافظة بورسعيد (دمج)

١ أكمل العبارات الآتية:

١ أبسط صورة للكسر الجبرى = $\frac{س - ٢}{س^٢ - ٤}$ هو ....

٢ مجال الدالة ن حيث ن (س) = $\frac{س}{س - ٣}$ هو ....

٣ مجموعة حل المعادلتين: س = ٢ ، ص = ٤ فى ح × ح هى ....

٤ نقطة تقاطع المستقيمين س = ١ ، ص = ٢ تقع فى الربع ....

٥ احتمال الحدث المستحيل = ...

٦ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = س + ٥ فى ح هى ....

٢ اختر الإجابة الصحيحة:

١ مجموعة حل المعادلتين: س = ٢ ، س ص = ٦ فى ح × ح هى ....

(أ) {٢ ، ٣} (ب) {(٢ ، ٣)} (جـ) {(٣ ، ٢)} (د) {٢ ، ٥}

٢ مجال الدالة ن$^{-١}$(س) = $\frac{س + ٣}{س - ٣}$ هو ....

(أ) ح -{٣ ، -٣} (ب) ح -{٣ ، ٣} (جـ) ح -{١ ، ٢} (د) ∅

٣ أبسط صورة الدالة د: (س) = $\frac{٣}{س + ٣} + \frac{س}{س + ٣}$ حيث (س ≠ -٣) هى ....

(أ) ١ (ب) $\frac{٣}{س + ٣}$ (جـ) $\frac{٣}{س - ٣}$ (د) س + ٣

٤ إذا كان: أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء العينة لتجربة عشوائية فإن: ل ($\text{أ} \cap \text{ب}$) = ...

(أ) ١ (ب) صفـــر (جـ) ٢ (د) $\varnothing$

٥ عدد حلول المعادلة: س + ص = ٠ فى ح × ح هو ....

(أ) عدد لا نهائى (ب) صفـــر (جـ) ٢ (د) $\varnothing$

٦ المستقيمان: س + ٢ص = ٣ ، ٢س + ٤ص = ٦ يكونان ....

(أ) متوازيان (ب) متقاطعان (جـ) منطبقان (د) متعامدان

---

٣ ضع علامة (✓) أمام العبارات الرياضية الصحيحة، وعلامة (✗) أمام العبارات الرياضية الخطأ:

١ إذا كان: $\text{أ} \subset$ ف لتجربة عشوائية ما وكان: ل ($\text{أ}'$) = ل (أ) ، فإن: ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ (.......)

٢ عددان موجبان مجموعهما ٥ وحاصل ضربهما ٦ فإن العددين هما ٢ ، ٣ (.......)

٣ إذا كانت المعادلة التربيعية ٤س^{٢} − ٥س = ٦ فى صورتها العامة، فإن: حـ = ٥ (.......)

٤ إذا كان: ن (س) = $\frac{\text{س}}{\text{س} - ٣}$ ، فإن مجال ن$^{-١}$ هو ح −{١} (.......)

٥ أبسط صورة للدالة ن (س) = $\frac{\text{س} - ٢}{٣} \times \frac{\text{س} + ٢}{\text{س}^{٢} - ٤}$ هى $\frac{١}{٣}$ ، س ≠ ±٢ (.......)

٦ مجموعة أصفار الدالة د : د (س) = س^{٢} − ٢س هى {٠ ، ٢} (.......)

---

٤ اختر من العمود (أ) ما يناسبه من العمود (ب) بالإجابات الصحيحة:

(أ)	(ب)
١ إذا كان: $\text{أ} \cap \text{ب} = \varnothing$ ، فإن: ل (أ − ب) = ...	(أ) ١
٢ المستقيمان: س + ص = صفر ، ٢س − ٢ص = صفر متقاطعان فى	(ب) ح −{−٢}
٣ إذا كان: ن$_{١}$ = ن$_{٢}$ ، وكان ن$_{١}$ (س) = $\frac{٢\text{س}}{٢\text{س}^{٢} + ٤}$ ، فإن ن$_{٢}$ (س) = ...	(جـ) $\frac{١}{٢}$
٤ إذا كان: س ≠ صفر ، فإن: $\frac{٣\text{س}}{\text{س}^{٢} + ١} \div \frac{٦\text{س}}{\text{س}^{٢} + ١}$	(د) $\frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٢}$
٥ مجال المعكوس الجمعى للكسر = $\frac{\text{س} - ٢}{\text{س} - ٢}$ هو	(هـ) نقطة الأصل
٦ احتمال الحدث المؤكد = ...	(و) ل (أ)

٥ أكمل إجابة كل مما يأتى:

(ا) إذا كان منحنى الدالة د حيث د (س) : س^{٢} + ﺃ يمر بالنقطة (٠ ، ١) ، فأوجد قيمة ﺃ .

الإجابة:

∵ د (س) = س^{٢} + ﺃ   س = ٠ عندما ص = ...

∴ صفر + ﺃ = ...   ∴ ﺃ = ...

(ب) حل المعادلتين الآتيتين:

إذا كان س + ص = ٣ ، س − ص = ٧

الإجابة:

س + ص = ٣

س − ص = ٧   بالجمع

٢س = ...

س = ...

بالتعويض فى س + ص = ٣

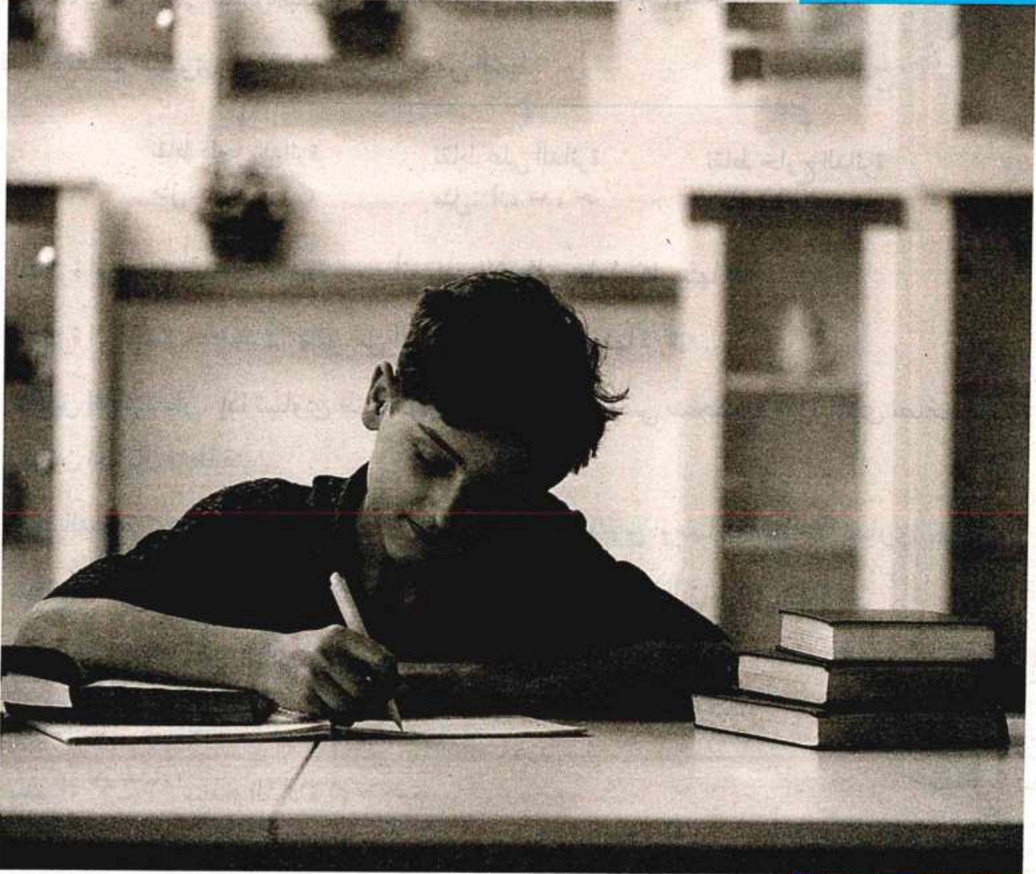
ص = ٣ − ....

ص = ...

م.ح = {(...... ، ......)}

ثانيًا

المراجعة النهائية
وامتحانات الهندسة المستوية

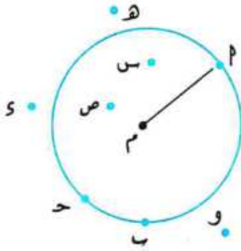


المحتـــويـــات

- ملخص عام على الوحدتين الرابعة والخامسة.
- أسئلة هامة على الوحدتين الرابعة والخامسة من امتحانات المحافظات السابقة.
- مهارات تراكمية أساسية فى الهندسة.
- نماذج اختبارات الهندسة المستوية من الكتاب المدرسى.
- امتحانات المحافظات على الهندسة المستوية بنظام سنة ٢٠٢٥ / ٢٠٢٦م.

ملخص عام على الوحدة الرابعة

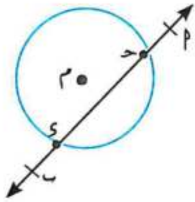
مفاهيم أساسية عن الدائرة:



- الخط المنحنى المغلق يسمى دائـرة (م)
- جميع النقاط التى تنتمى للدائرة تبعد بعدًا ثابتًا (نق) عن مركزها (م) (م أ = نق)
- الدائرة تقسم المستوى إلى ثلاث مجموعات من النقط.

نقاط داخل الدائرة	نقاط على الدائرة	نقاط خارج الدائرة
مثل: س ، ص ، م	مثل: أ ، ب ، حـ	مثل: ء ، هـ ، و

- الدائرة الواحدة لها عدد لا نهائى من أنصاف الأقطار وطول كل منها نق .
- الدائرة الواحدة لها عدد لا نهائى من الأقطار وطول كل منها ٢ نق .
- تتطابق الدائرتـــان: إذا تساوى طولا نصفى قطريهما والعكـس صحيـح؛ إذا تساوى نصف قطرى دائرتين تكونان متطابقتين.
- محيط الدائرة م هو: طول الخط المنحنى المُغلق ويساوى ٢ π نق ومساحة سطحها تُساوي π نق^{٢}
- سطح الدائرة هــو: مجموعة النقاط داخل الدائرة $\cup$ مجموعة النقاط على الدائرة.



- **سطح الدائرة يختلف عن الدائرة.**

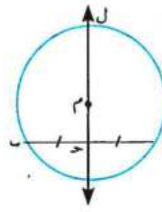
فمثلاً: $\overleftrightarrow{أب}$ $\cap$ الدائرة م = { حـ ، ء }

بينـــما: $\overleftrightarrow{أب}$ $\cap$ سطح الدائرة م = $\overline{حـ ء}$

نتائـج هامة فى الدائـرة:

نتيجــة ١

المستقيم المار بمركز الدائرة وبمنتصف أى وتر فيها يكون **عموديًّا على هذا الوتر.**



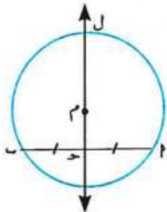
فمثلًا: ∵ المستقيم ل يمر بالمركز (م)

، حـ منتصف $\overline{أب}$

∴ ل $\perp$ $\overline{أب}$

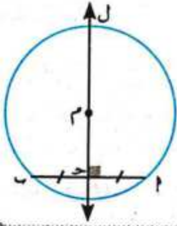
نتيجــة ٢

المستقيم المار بمركز الدائرة وعموديًّا على أى وتر فيها **ينصف هذا الوتر.**



فمثلًا: المستقيم ل يمر بمركز الدائرة (م) ، ل $\perp$ $\overline{أب}$

∴ ل ينصف $\overline{أب}$



نتيجـة ٣

المستقيم العمودى على أى وتر فى دائرة من منتصفه يمر بمركزها.

فمثلًا: ∵ ل ⊥ $\overline{ٱب}$ ، حـ منتصف $\overline{ٱب}$

∴ ل يمر بمركز الدائرة

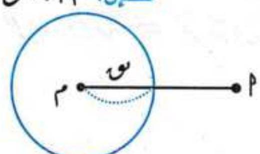
أوضاع نقطة ومستقيم ودائرة بالنسبة لدائرة:

أولا موضع نقطة بالنسبة لدائرة:

بفرض أن: م دائرة، نق نصف قطرها ، ٱ نقطة فى مستوى الدائرة

ٱ تقع خارج الدائرة

فـإن: م ٱ > نق



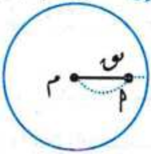
ٱ تقع على الدائرة

فـإن: ٱ م = نق



ٱ تقع داخل الدائرة

فـإن: ٠ ⩽ ٱ م < نق



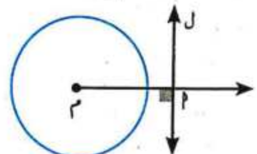
ثانيا موضع مستقيم بالنسبة لدائرة:

بفرض أن: م دائرة، طول نصف قطرها نق، ل مستقيم فى مستواها

، $\overleftrightarrow{مٱ}$ ⊥ ل ، حيث $\overleftrightarrow{مٱ}$ ∩ ل = { ٱ }

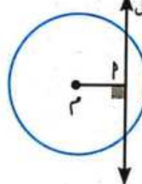
ل تقع خارج الدائرة

فـإن: م ٱ > نق



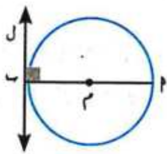
ل يقطع الدائرة

فـإن: ٠ ⩽ م ٱ < نق



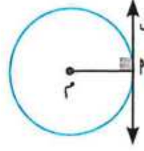
ل مماسًا الدائرة

فإن: مٱ = نق



حقيقـة ١

المماس لدائرة يكون **عموديًا** على نصف القطر المرسوم من نقطة التماس.

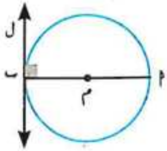


فمثلًا: ل مماس للدائرة عند أ ، $\overline{مأ}$ نصف قطر

∴ $\overleftrightarrow{مأ}$ ⊥ ل

حقيقـة ٢

المستقيم العمودى على قطر الدائرة من إحدى نهايتيه يكون **مماسًا** لها.



∵ $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة، ل ⊥ $\overline{أب}$ عند ب

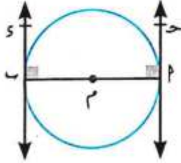
∴ ل يكون مماسًا للدائرة

ملاحظة هامة

المماسان للدائرة المرسومان من نهايتى قطر فيها يكونان **متوازيين**

∵ $\overline{أب}$ قطر فى الدائرة، $\overleftrightarrow{أحـ}$ ، $\overleftrightarrow{بء}$ مماسان عند أ ، ب

∴ $\overleftrightarrow{أحـ}$ // $\overleftrightarrow{بء}$

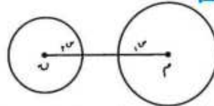


ثالثًا موضع دائرة بالنسبة لدائرة:

بفرض أن: م ، ن دائرتان، طولا نصفى قطريهما $نق_1$ ، $نق_2$ ، حيث $نق_1 > نق_2$ ، $\overleftrightarrow{من}$ خط المركزين

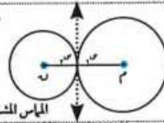
• الدائرتان متباعدتان:

فإن: $من > نق_1 + نق_2$



• الدائرتان متماستان من الخارج:

فإن: $من = نق_1 + نق_2$

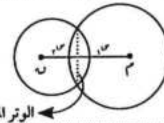


ملاحظـة

$\overline{من}$ عمودى على المماس المشترك

• الدائرتان متقاطعتان:

فإن: $نق_1 - نق_2 < من < نق_1 + نق_2$

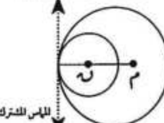


ملاحظـة

$\overline{من}$ عمودى على الوتر المشترك وينصفه

• الدائرتان متماستان من الداخل:

فإن: $من = نق_1 - نق_2$

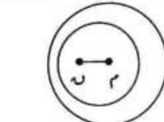


ملاحظـة

$\overleftrightarrow{من}$ عمودى على المماس المشترك

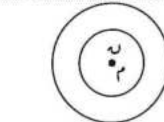
• الدائرتان متداخلتان:

فإن: $من < نق_1 - نق_2$



• الدائرتان متحدتا المركز:

فإن: من = صفر



نتيجـة ١

خط المركزين لدائرتين متماستين من الداخل أو الخارج يمر بنقطة التماس، ويكون عموديًّا على المماس المشترك عند هذه النقطة.

نتيجـة ٢

خط المركزين للدائرتين المتقاطعتين يكون عموديًّا على الوتر المشترك وينصفه.

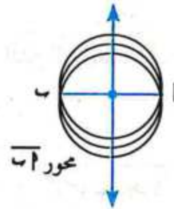
تعيين الدائرة:

أولًا: رسم دائرة تمر بنقطة معلومة:

يمكن رسم عدد لا نهائى من الدوائر تمر بنقطة معلومة.

ثانيًا: رسم دائرة تمر بنقطتين معلومتين:

يمكن رسم عدد لا نهائى من الدوائر تمر بنقطتين ﻫ ، ب حيث مراكز هذه الدوائر تقع على محور $\overline{ﻫب}$



ملاحظات

- طول نصف قطر أصغر دائرة يمكننا رسمها لكى تمر بالنقطتين ﻫ ، ب يساوى $\frac{1}{2}$ ﻫ ب
- لا يمكننا رسم أى دائرة تمر بالنقطتين ﻫ ، ب إذا كان طول نصف قطرها أصغر من $\frac{1}{2}$ ﻫ ب

ثالثًا: رسم دائرة تمر بثلاث نقاط معلومة:

الحالة الأولى

أى ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة يمر بها دائرة واحدة.

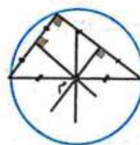
الحالة الثانية

لا يمكن رسم أى دائرة تمر بثلاث نقاط على استقامة واحدة.

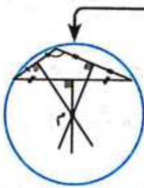
- الدائرة التى تمر برءوس مثلث تسمى الدائرة الخارجة عن المثلث.
- مركز الدائرة الخارجة عن المثلث هى نقطة تقاطع الأعمدة المقامة على أضلاع المثلث من منتصفاتها (محاور تماثل أضلاعه).



إذا كان المثلث **حاد الزوايا** فإن مركز الدائرة الخارجة عنه تقع **داخل المثلث**



إذا كان المثلث **قائم الزاوية** فإن مركز الدائرة الخارجة عنه تقع فى **منتصف وتر المثلث**



إذا كان المثلث **منفرج الزاوية** فإن مركز الدائرة الخارجة عنه تقع **خارج المثلث**

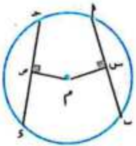
- يمكن رسم دائرة خارجة تمر برءوس كل من: المثلث والمربع والمستطيل وشبه المنحرف المتساوى الساقين وأى مضلع منتظم، بينما لا يمكن رسم دائرة خارجة تمر برءوس متوازى الأضلاع والمعين وشبه المنحرف غير متساوى الساقين.

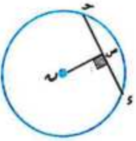


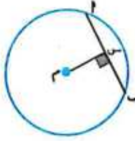
- مركز الدائرة الخارجة عن المثلث المتساوى الأضلاع هى نقطة تقاطع محاور تماثل أضلاعه، وهى نفسها نقطة تقاطع متوسطاته، وهى نفسها نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة، وهى نفسها نقطة تقاطع ارتفاعاته.

علاقة أوتار الدائرة بمركزها:

نظريــة ١







- الأوتار المتساوية الطول فى دائرة (أو الدوائر المتطابقة) تكون على أبعاد متساوية من مركزها (أو مراكزها).

فمثلًا: ∵ أ ب = حـ ء ، $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{حـ ء}}$

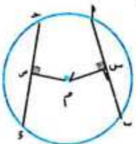
∴ م س = م ص

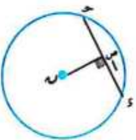
كذلك: م ، ن دائرتان متطابقتان

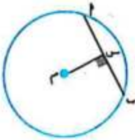
فيهمـا: أ ب = حـ ء ، $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ن ص}} \perp \overline{\text{حـ ء}}$

∴ م س = ن ص

نظريــة ٢







- فى الدائرة الواحدة (أو فى الدوائر المتطابقة) إذا كانت الأوتار على أبعاد متساوية من المركز (أو المراكز)، فإنها تكون متساوية فى الطول.

فمثلًا: ∵ م س = م ص ، $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{حـ ء}}$

∴ أ ب = حـ ء

كذلك: م ، ن دائرتان متطابقتان ، $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ن ص}} \perp \overline{\text{حـ ء}}$

، م س = ن ص

∴ أ ب = حـ ء

أسئلة هامة على الوحدة الرابعة من امتحانات المحافظات السابقة

١ اخترالإجابة الصحيحة:

١ يوجد للدائرة عدد .... من محاور التماثل. (المنيا ٢٠٢٣)

(ا) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) لا نهائى

٢ عدد محاور تماثل نصف الدائرة .... (قنا ٢٠٢٤)

(ا) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى

٣ طول نصف قطر الدائرة التى مركزها نقطة الأصل وتمر بالنقطة (٣ ، ٤) = ... وحدة طول. (الدقهلية ٢٠٢٣)

(ا) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٧

٤ إذا كان محيط دائرة = ٤٤ سم، فإن مساحتها $\simeq$ .... سم^{٢} (حيث $\pi \simeq \frac{٢٢}{٧}$) (المنوفية ٢٠٢٢)

(ا) ٢٢ (ب) ٤٩ (جـ) ٨٨ (د) ١٥٤

٥ محيط الدائرة التى طول نصف قطرها نق سم يساوى .... سم. (القاهرة ٢٠٢٤)

(ا) π نق^{٢} (ب) π نق (جـ) ٢ π نق (د) ٢ π نق^{٢}

٦ دائرة طول قطرها ٧سم فإن محيطها = ... سم (بورسعيد ٢٠٢٢)

(ا) ٧ π (ب) ١٤ π (جـ) ٤٩ π (د) $\frac{٧}{٢}\pi$

٧ القطر هو .... يمر بمركز الدائرة. (بورسعيد ٢٠٢٢)

(ا) مستقيم (ب) شعاع (جـ) مماس (د) وتر

٨ أكبر الأوتار طولًا فى الدائرة يسمى .... (الإسماعيلية ٢٠٢١)

(ا) مماسًا (ب) قاطعًا (جـ) قطرًا (د) قوسًا

٩ دائرة محيطها ٦ πسم فإن طول قطرها = ... سم. (سوهاج ٢٠٢٣)

(ا) ٦ (ب) ٣ (جـ) ١٢ (د) صفر

١٠ الدائرة التى مساحة سطحها يساوى π وحدة مربعة يكون طول قطرها .... وحدة طول. (الإسماعيلية ٢٠٢٤)

(ا) ١ (ب) ٢ (جـ) $\frac{٢٢}{٧}$ (د) $\pi^{٢}$

١١ إذا كان المستقيم ل مماسًا للدائرة التى طول قطرها ١٠ سم فإنه يبعد عن مركزها مسافة .... سم. (الجيزة ٢٠٢٤)

(ا) ٤ (ب) ٥ (جـ) ٦ (د) ٧

١٢ إذا كانت م دائرة طول قطرها ٧سم، ا نقطة فى مستواها، وكان م ا = ٤سم،
فإن النقطة ا تقع .... (الجيزة ٢٠٢٣)

(ا) داخل الدائرة (ب) خارج الدائرة (جـ) على الدائرة (د) غير ذلك

١٣ دائرة محيطها ٦ π سم والمستقيم ل يبعد عن مركزها ٣سم، فإن المستقيم ل يكون .... (الشرقية ٢٠٢٢)

(ا) مماسًا للدائرة (ب) قاطعًا للدائرة (جـ) خارج الدائرة (د) قطرًا للدائرة

١٤ م ، ىن دائرتان متقاطعتان طولا قطريهما ١٠ سم، ٤سم، فإن م ىن ∋ .... (كفر الشيخ ٢٠٢٤)

(ا)]٦ ، ١٤[(ب)]٣ ، ٧[(جـ) [٦ ، ١٤] (د) [٣ ، ٧]

١٥ إذا كانت الدائرة م ∩ الدائرة ىن = {ا ، ب} فإن الدائرتين م ، ىن .... (السويس ٢٠٢٢)

(ا) متباعدتان (ب) متحدتا المركز (جـ) متماستان من الخارج (د) متقاطعتان

١٦ دائرتان نصفا قطريهما ٥سم ، ٣ سم، فإذا كان م ، ىن مركزي الدائرتين، وكان م ىن = ٤سم،

فإن الدائرتين .... (الفيوم ٢٠٢٤)

(ا) متباعدتان (ب) متماستان من الداخل

(جـ) متماستان من الخارج (د) متقاطعتان

١٧ دائرة طول قطرها ١٤سم، المستقيم ل يبعد عن مركزها بمقدار ٣ $\sqrt{7}$ سم،

فإن المستقيم ل يكون .... (أسيوط ٢٠٢٤)

(ا) قاطعًا للدائرة (ب) خارج الدائرة (جـ) مماسًا للدائرة (د) محور تماثل للدائرة

١٨ دائرة طول قطرها (٢س + ٥)سم، المستقيم ل يبعد عن مركزها مسافة (س + ٢)سم،

فإن المستقيم ل يكون .... (الفيوم ٢٠٢٢)

(ا) مماسًا للدائرة (ب) قاطعًا للدائرة (جـ) قطرًا للدائرة (د) خارج الدائرة

١٩ الدائرتان م، ىن متماستان من الداخل، طول نصف قطر الدائرة ىن = ٣سم، وكان م ىن = ٥سم،

فإن طول نصف قطر الدائرة م = ... سم. (الأقصر ٢٠٢٢)

(ا) ٢ (ب) ٨ (جـ) ٥ (د) ٩

٢٠ الدائرتان م، ىن متماستان من الخارج، طولا نصفي قطريهما ٨سم، ٥سم ،

فإن: م ىن = ... سم. (شمال سيناء ٢٠٢٢)

(ا) ٣ (ب) ١٣ (جـ) ٨ (د) ٥

٢١ إذا كانت الدائرتان م، ىن متماستين من الخارج وطول نصف قطر إحداهما ٥سم، م ىن = ٩سم،

فإن طول نصف قطر الدائرة الأخرى يساوي .... سم. (بني سويف ٢٠٢٤)

(ا) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٧ (د) ١٤

٢٢ المماسان المرسومان من نهايتى قطر فى دائرة .... (بورسعيد ٢٠٢٢)

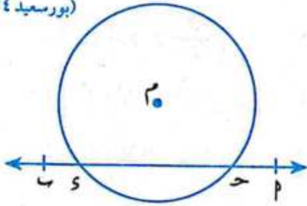
(ا) متعامدان (ب) منطبقان (جـ) متوازيان (د) متقاطعان

٢٣ إذا كان سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ں = {ٲ} فإن الدائرتين تكونان .... (شمال سيناء ٢٠٢٣)

(ا) متماستين من الداخل (ب) متماستين من الخارج

(جـ) متباعدتين (د) متحدتى المركز

٢٤ فى الشكل المقابل: (بورسعيد ٢٠٢٤)



$\overleftrightarrow{ٲب}$ ∩ سطح الدائرة م = ...

(ا) ∅ (ب) {حـ ، ء}

(جـ) $\overline{حـء}$ (د) $\overleftrightarrow{حـء}$

٢٥ إذا كانت النقطة ٲ تنتمى لسطح الدائرة م التى طول قطرها ٦ سم، فإن: مٲ ∈ .... (الدقهلية ٢٠٢١)

(ا)]-∞ ، ٦] (ب)]-∞ ، ٣] (جـ) [٠ ، ٣] (د)]٣ ، ∞[

٢٦ م ، ں دائرتان طولا نصفى قطريهما ٩سم، ٤سم، مں = ٥سم، فإن الدائرتين تكونان ....

(الإسكندرية ٢٠٢٤)

(ا) متقاطعتين (ب) متماستين من الداخل

(جـ) متماستين من الخارج (د) متباعدتين

٢٧ وتر طوله ٦ سم فى دائرة طول نصف قطرها ٥سم، فإنه يبعد عن مركزها .... سم. (البحيرة ٢٠٢٣)

(ا) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

٢٨ دائرتان طولا نصفى قطريهما ٣سم، ٧سم تكونان متماستين إذا كان البُعد بين مركزيهما ∈ ....

(الإسماعيلية ٢٠٢٣)

(ا)]٤ ، ١٠[(ب)]١٠ ، ∞[(جـ)]٠ ، ٤[(د) {٤ ، ١٠}

٢٩ دائرة مركزها م طول نصف قطرها نق ، ٲ نقطة فى المستوى وكان مٲ = $\frac{٣}{٢}$ نق

(الغربية ٢٠٢٤)

فإن ٲ تقع .... الدائرة.

(ا) على (ب) داخل (جـ) خارج (د) فى مركز

٣٠ عدد محاور تماثل دائرتين متطابقتين متماستين من الخارج يساوى .... (الدقهلية ٢٠١٦)

(ا) ٤ (ب) ٢ (جـ) ١ (د) عددًا لا نهائيًا

٣١ خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديًا على .... وينصفه. (الجيزة ٢٠١٨)

(ا) القطر (ب) الوتر (جـ) الوتر المشترك (د) المماس

٣٢ م ، ن دائرتان متباعدتان طولا نصفى قطريهما ٨سم ، ٦سم على الترتيب، فإن: م ن .... ١٤سم. (القاهرة ٢٠١٩)

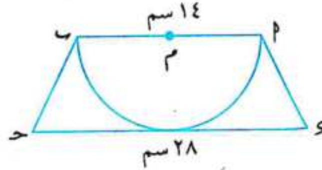
(أ) > (ب) < (جـ) = (د) ⩾

٣٣ فى الشكل المقابل: (قنا ٢٠١٩)

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{\text{جـ ء}}$ مماسة لها ، أ ب = ١٤سم، جـ ء = ٢٨سم

فإن مساحة الجزء المظلل ≃ .... سم^2.

حيث $\left(\pi \simeq \frac{22}{7}\right)$



(أ) ٧٠ (ب) ١٤٧

(جـ) ١٧٠ (د) ٢٢٤

٣٤ عدد الدوائر التى يمكن رسمها وتمر بطرفى القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$ يساوى .... (القليوبية ٢٠٢٢)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عددًا لا نهائيًّا

٣٥ عدد الدوائر المارة بثلاث نقاط على استقامة واحدة .... (الشرقية ٢٠٢٢)

(أ) عدد لا نهائى (ب) اثنان (جـ) واحد (د) صفر

٣٦ أصغر دائرة يمكن رسمها تمر بالنقطتين أ ، ب حيث أ ب = ٦سم،

يكون طول نصف قطرها = ... سم. (بنى سويف ٢٠٢٣)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٣٧ عدد الدوائر التى تمر بنقطة معلومة هو .... (الإسماعيلية ٢٠٢٢)

(أ) دائرة واحدة (ب) دائرتان (جـ) ثلاث دوائر (د) عدد لا نهائى

٣٨ عدد الدوائر التى مركزها (٧ ، ٤) وتمر بالنقطة (٣ ، ١) هو .... (سوهاج ٢٠٢٣)

(أ) ٢ (ب) ١ (جـ) ٥ (د) عدد لا نهائى

٣٩ لا يمكن رسم دائرة تمر برءوس .... (القاهرة ٢٠٢٤)

(أ) المربع (ب) متوازى الأضلاع

(جـ) المستطيل (د) شبه المنحرف المتساوى الساقين

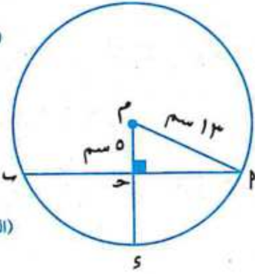
٤٠ مركز الدائرة الخارجة للمثلث هو نقطة تقاطع .... (الفيوم ٢٠١٩)

(أ) منصفات زواياه الداخلة (ب) منصفات زواياه الخارجة

(جـ) ارتفاعاته (د) محاور تماثل أضلاعه

٢ الأسئلة المقالية:

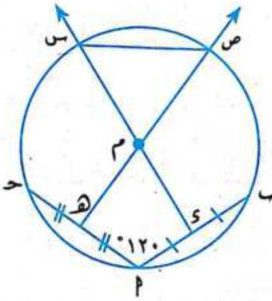
١ فى الشكل المقابل: (الجيزة ٢٠٢٢)



$\overline{مح} \perp \overline{ٲب}$ ، ٲم = ١٣ سم، مح = ٥ سم

أوجد: طول كل من: $\overline{ٲب}$ ، $\overline{حء}$

٢ فى الشكل المقابل: (القليوبية ٢٠٢٢)



$\overline{ٲب}$ ، $\overline{ٲح}$ وتران فى الدائرة م

يحصران زاوية قياسها ١٢٠°، ء ، هـ

منتصفا $\overline{ٲب}$ ، $\overline{ٲح}$ على الترتيب،

رُسم $\overleftarrow{ءم}$ ، $\overleftarrow{هم}$

فقطعا الدائرة فى س ، ص على الترتيب

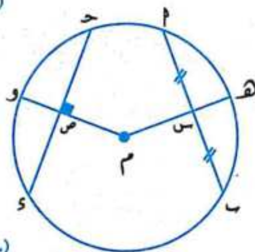
أثبت أن: Δ س ص م متساوى الأضلاع

٣ إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ١٣ سم ، $\overleftrightarrow{مٲ}$ ⊥ المستقيم ل حيث ٲ ∈ المستقيم ل

فحدد موضع المستقيم ل بالنسبة للدائرة م فى الحالات الآتية: (أسيوط ٢٠٢٣)

(١) مٲ = ١٣ سم (ب) مٲ = ١٠ سم (جـ) مٲ = ١٥ سم

٤ فى الشكل المقابل: (الغربية ٢٠٢٤)

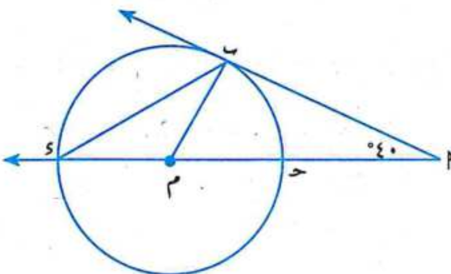


$\overline{ٲب}$ ، $\overline{حء}$ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م،

س منتصف $\overline{ٲب}$ ، $\overline{مص} \perp \overline{حء}$

أثبت أن: س هـ = ص و

٥ فى الشكل المقابل: (سوهاج ٢٠٢٤)



ٲ نقطة خارج الدائرة م ،

$\overleftarrow{ٲب}$ مماس للدائرة عند ب ،

$\overleftarrow{ٲم}$ قطع الدائرة م فى حـ ، ء على الترتيب ،

ق ($\angle$ ٲ) = ٤٠°

أوجد: ق ($\angle$ ب ء حـ)

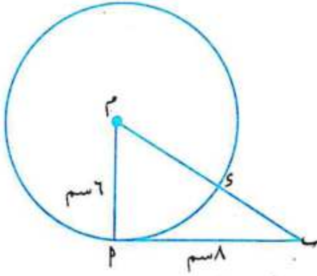
٦ في الشكل المقابل:

$\overline{أب}$ مماس للدائرة م عند أ

، م أ = ٦ سم ، أ ب = ٨ سم

أوجد بالبرهان: طول $\overline{ءب}$

(الإسكندرية ٢٠٢٤)



٧ في الشكل المقابل:

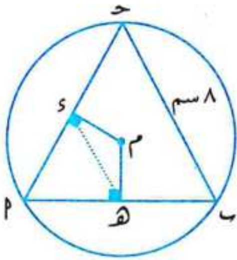
أ ب حـ $\triangle$ مرسوم داخل دائرة مركزها م ،

$\overline{مء} \perp \overline{أحـ}$ ، $\overline{مهـ} \perp \overline{أب}$ ، ب حـ = ٨سم

(أ) أثبت أن: $\overline{ءهـ} // \overline{بحـ}$

(ب) أوجد طول: $\overline{ءهـ}$

(البحيرة ٢٠١٧)



٨ في الشكل المقابل:

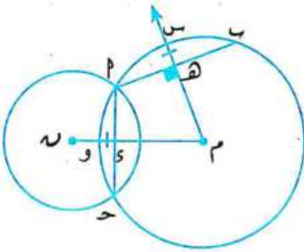
م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، حـ

حيث $\overrightarrow{مهـ} \perp \overline{أب}$

ويقطع الدائرة م في س، وكان هـ س = ء و

أثبت أن: أ ب = أ حـ

(القاهرة ٢٠٢٢)



٩ في الشكل المقابل:

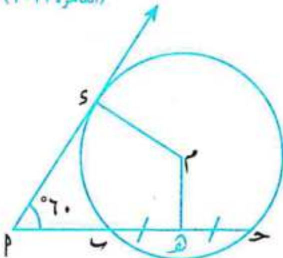
$\overrightarrow{أء}$ مماس للدائرة م عند ء ،

$\overline{أحـ}$ تقطع الدائرة م في ب ، حـ ، ق (∠ أ) = ٦٠°

، هـ منتصف $\overline{بحـ}$ ،

أوجد بالبرهان: ق (∠ ء م هـ)

(القاهرة ٢٠٢٢)



١٠ في الشكل المقابل: (القليوبية ٢٠٢٤)

دائرتان متحدتا المركز في م ،

$\overline{أ ب}$ وتر في الدائرة الكبرى

يقطع الصغرى في حـ ، ء ،

$\overline{م هـ} \perp \overline{أ ب}$ أثبت أن: أ حـ = ب ء

١١ في الشكل المقابل: (سوهاج ٢٠٢٤)

م ، ن دائرتان طولا نصفي قطريهما ١٠ سم، ٦ سم

على الترتيب ومتماستان من الداخل في أ ،

$\overleftrightarrow{أ ب}$ مماس مشترك لهما عند أ

إذا كانت مساحة Δ ب م ن = ٢٤ سم^٢

فأوجد: طول $\overline{أ ب}$

١٢ في الشكل المقابل: (كفر الشيخ ٢٠٢٢)

م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب ،

ق ($\angle$ س) = ٤٥° ، ق ($\angle$ هـ ن ص) = ١٣٥°

أثبت أن: $\overleftrightarrow{س ص}$ مماس للدائرة ن عند ص

١٣ في الشكل المقابل: (الشرقية ٢٠٢١)

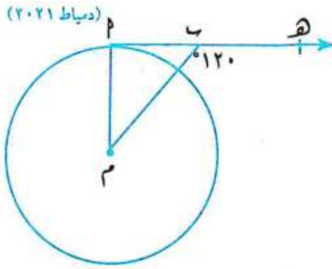
دائرتان متحدتا المركز في م ،

$\overline{أ حـ}$ ، $\overline{أ ب}$ قطعتان مماستان للدائرة الصغرى في هـ ، ء

ويقطعان الدائرة الكبرى في حـ ، ب على الترتيب

أثبت أن: أ حـ = أ ب

14 في الشكل المقابل:

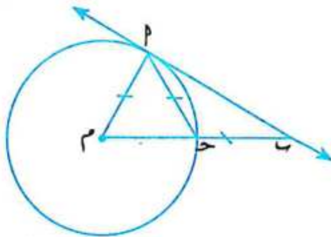


إذا كان: $\overleftrightarrow{أ ب}$ مماسًا للدائرة م عند أ ،

ق ($\angle$ م ب هـ) = ١٢٠°

فأوجد بالبرهان: ق ($\angle$ أ م ب)

15 في الشكل المقابل:

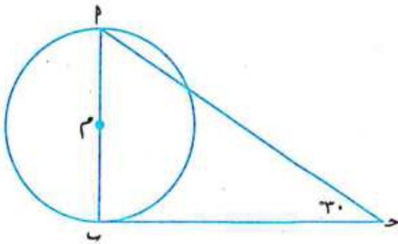


م دائرة ، أ م = أ حـ = ب حـ

أثبت أن:

$\overleftrightarrow{أ ب}$ مماس للدائرة م عند أ

16 في الشكل المقابل:



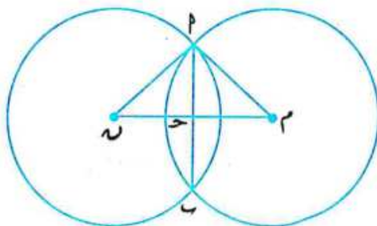
دائرة م محيطها ٤٤ سم، $\overline{أ ب}$ قطر فيها ،

$\overline{ب حـ}$ مماس للدائرة عند ب،

ق ($\angle$ حـ) = ٣٠°

أوجد طول: $\overline{أ حـ}$ (اعتبر $\pi \simeq \frac{٢٢}{٧}$)

17 في الشكل المقابل:



دائرتان م ، ن متطابقتان ومتقاطعتان فى أ ، ب،

فإذا كان: م أ = ١٠ سم، أ ب = ١٢ سم

فأوجد بالبرهان: طول $\overline{م ن}$

18 م ، ن دائرتان طولا نصفى قطريهما ٨سم، ٦سم على الترتيب بيّن وضع كل منهما بالنسبة للأخرى فى الحالات الآتية: (سوهاج ٢٠٢٣)

(أ) م ن = ٢سم (ب) م ن = ٦سم (جـ) م ن = صفر

19 في الشكل المقابل: (الدقهلية ٢٠٢٣)

دائرة م طول نصف قطرها ٥سم،

رُسم $\overleftrightarrow{أب}$ مماسًا لها عند أ،

ء منتصف $\overline{أحـ}$، أب = ١٢سم، م ء = ٣سم

أوجد: مساحة الشكل أ ب م ء

20 في الشكل المقابل: (قنا ٢٠١٧)

$\overline{أء}$ قطر في دائرة مركزها م، $\overleftrightarrow{حـ أ}$ ، $\overleftrightarrow{حـ ب}$

مماسان للدائرة عند النقطتين أ ، ب على الترتيب

أثبت أن:

ق(∠ ء م ب) = ق(∠ أ حـ ب)

21 في الشكل المقابل: (مطروح ٢٠١٨)

$\overline{أب}$ مماس للدائرة م عند أ ، م أ = ٨سم،

ق(∠ أ ب م) = ٣٠°،

$\overline{أحـ} \perp \overline{م ب}$

أوجد طول كل من: $\overline{أب}$، $\overline{أحـ}$

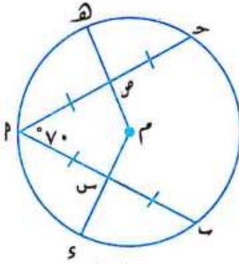
22 في الشكل المقابل: (الإسكندرية ٢٠٢٤)

أ ب = حـ ء ، $\overline{م س} \perp \overline{أب}$،

$\overline{م ص} \perp \overline{حـ ء}$

أثبت أن: هـ س = و ص

٢٣ في الشكل المقابل: (الفيوم ٢٠٢٢)



$\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ وتران متساويان في الطول في الدائرة م ،

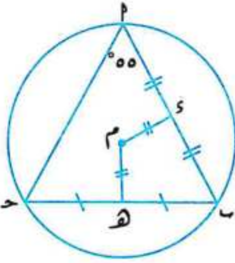
س منتصف $\overline{أب}$، ص منتصف $\overline{أحـ}$

ق ($\angle$ حـ أ ب) = ٧٠°

(أ) أوجد: ق ($\angle$ هـ م ء)

(ب) أثبت أن: س ء = ص هـ

٢٤ في الشكل المقابل: (الأقصر ٢٠١٧)



ء منتصف $\overline{أب}$ ، هـ منتصف $\overline{بحـ}$

ق ($\angle$ أ) = ٥٥°، م ء = م هـ

أوجد: ق ($\angle$ ب)

٢٥ باستخدام الأدوات الهندسية:

(القاهرة ٢٠٢٢)

ارسم مثلثًا متساوي الأضلاع، طول ضلعه ٥ سم.

ثم ارسم الدائرة المارة برءوسه.

٢٦ باستخدام الأدوات الهندسية:

ارسم $\overline{أب}$ طولها ٤ سم، ثم ارسم دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب وطول نصف قطرها ٣ سم.

كم عدد الحلول الممكنة؟ (لا تمح الأقواس) (القليوبية ٢٠٢٤)

٢٧ باستخدام الأدوات الهندسية: (كفر الشيخ ٢٠٢٤)

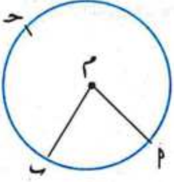
ارسم المثلث أ ب حـ الذي فيه أ ب = ٤ سم، ب حـ = ٥ سم، حـ أ = ٦ سم،

ثم ارسم الدائرة المارة برءوسه أ، ب، حـ.

ما نوع المثلث بالنسبة لزواياه؟

ملخص عام على الوحدة الخامسة

[١] الزاوية المركزية وقياس الأقواس:



• قياس أى قوس فى الدائرة هو قياس الزاوية المركزية المقابلة له.

فمثلًا: ق($\overset{\frown}{أب}$) = ق(∠ أ م ب)

• دائمًا يقصد بالقوس أ ب القوس الأصغر أ ب .

• مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول مركز الدائرة = ٣٦٠°

ملاحظة هامة

ق($\overset{\frown}{أب}$) + ق($\overset{\frown}{بحـ}$) = ق($\overset{\frown}{أبحـ}$)

• القوسان المتجاوران فى الدائرة هما قوسان مشتركان فى نقطة واحدة

مثلًا فى الشكل المقابل فى الدائرة م: $\overset{\frown}{أب}$ ، $\overset{\frown}{بحـ}$ هما قوسان متجاوران.

• قياس أى قوس فى الدائرة يساوى نسبة ما يمثله هذا القوس من الدائرة × ٣٦٠°

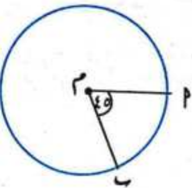
فمثلًا: قياس القوس الذى يمثل $\frac{١}{٦}$ قياس الدائرة = $\frac{١}{٦}$ × ٣٦٠° = ٦٠°

، قياس ربــع الدائرة = $\frac{١}{٤}$ × ٣٦٠° = ٩٠° ، قياس نصف الدائرة = $\frac{١}{٢}$ × ٣٦٠° = ١٨٠°

[٢] طــول القــوس:

• طول أى قوس من الدائـرة هو جزء من محيط الدائرة يتناسب مع قياسه.

فمثلًا: $\frac{\text{طول}(\overset{\frown}{أب})}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{\text{ق}(\overset{\frown}{أب})}{٣٦٠°}$



• فى الشكل المقابل: $\frac{\text{طول}(\overset{\frown}{أب})}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{٤٥}{٣٦٠} = \frac{١}{٨}$

أى أن: طول $\overset{\frown}{أب}$ = $\frac{١}{٨}$ محيط الدائرة.

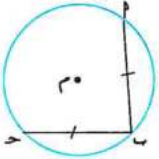
[٣] نتائــج هامــة:

نتيجــة ١

فى الدائرة الواحدة (أو فى الدوائر المتطابقة) الأقواس المتساوية فى القياس تكون متساوية فى الطول (والعكس صحيح)

نتيجـة [٢]

فى الدائرة الواحدة (أو الدوائر المتطابقة) الأقواس المتساوية فى القياس أوتارها متساوية فى الطول (والعكس صحيح)

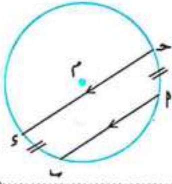


فمثلًا: ∵ ق(⌒ٮ ٮ) = ق(⌒ٮ حـ) ∴ ٮ ٮ = ٮ حـ

كذلك: ∵ ٮ ٮ = ٮ حـ ∴ ق(⌒ٮ ٮ) = ق(⌒ٮ حـ)

نتيجـة [٣]

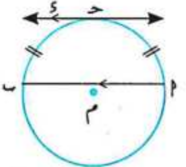
الوتران المتوازيان فى الدائرة يحصران قوسين متساويين فى القياس



فمثلًا: ∵ ٮ ٮ // حـ ى ∴ ق(⌒ٮ حـ) = ق(⌒ٮ ى)

نتيجـة [٤]

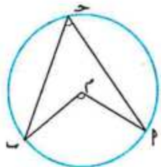
القوسان المحصوران بين وتر ومماس يوازيه فى الدائرة متساويان فى القياس



فمثلًا: ∵ $\overline{\text{ٮ ٮ}}$ // $\overline{\text{حـ ى}}$ ∴ ق(⌒ٮ حـ) = ق(⌒ٮ حـ)

[٤] العلاقة بين الزاويتين المحيطية والمركزية المشتركتين فى القوس:

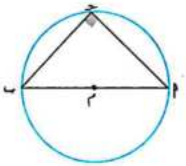
- قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس.



فمثلًا: ق(∠ ٮ حـ ٮ) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ ٮ م ٮ)

- قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس القوس المقابل لها.

أى أن: ق(∠ ٮ حـ ٮ) = $\frac{١}{٢}$ ق(⌒ٮ ٮ)



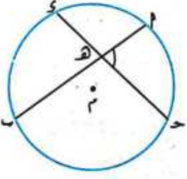
- الزاويـة المحيطيـة المرسومة فى نصف دائرة تكون قائمة.

فمثلًا: فى الشكل المقابل: $\overline{\text{ٮ ٮ}}$ قطر فى الدائرة (م)

∴ ق(∠ ٮ حـ ٮ) = ٩٠°

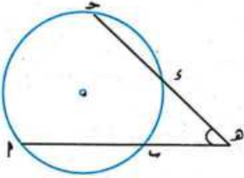
- الزاوية المحيطية الحـــادة: تقابل قوسًا طوله أصغر من نصف محيط الدائرة.

- الزاوية المحيطية المنفرجة: تقابل قوسًا طوله أكبر من نصف محيط الدائرة.



• إذا تقاطع وتران فى نقطة داخل الدائرة، فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف مجموع قياسى القوسين المقابلين لها.

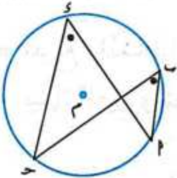
فمثلًا: من الشكل المقابل: ق($\angle$ ا هـ حـ) = $\frac{1}{2}$ [ق(ا حـ ⌒) + ق(ب ء ⌒)]



• إذا تقاطع شعاعان حاملان لوترين فى دائرة خارجها، فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى نصف قياس القوس الأكبر مطروحًا منه نصف قياس القوس الأصغر اللذين يحصرهما ضلعا هذه الزاوية.

فمثلًا: من الشكل المقابل: ق($\angle$ هـ) = $\frac{1}{2}$ [ق(ا حـ ⌒) - ق(ب ء ⌒)]

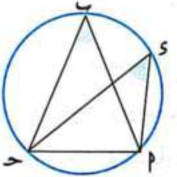
[٥] الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس:



• الزوايا المحيطية التى تحصر نفس القوس فى الدائرة الواحدة متساوية فى القياس.

فمثلًا: ∵ $\angle$ ا ب حـ ، $\angle$ ا ء حـ زاويتان محيطيتان تحصران نفس (ا حـ ⌒)

∴ ق ($\angle$ ا ب حـ) = ق ($\angle$ ا ء حـ)



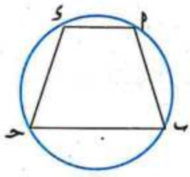
• إذا تساوى قياسا زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة، وفى جهة واحدة منها، فإنه تمر برأسيهما دائرة واحدة تكون هذه القاعدة وترًا فيها.

فمثلًا: ∵ ق ($\angle$ ا ء حـ) = ق ($\angle$ ا ب حـ)

وهما مرسومان على قاعدة واحدة هى $\overline{\text{ا حـ}}$

∴ النقط ا، ء، ب، حـ تمر بها دائرة واحدة، ويكون $\overline{\text{ا حـ}}$ وترًا فيها

[٦] الشكل الرباعى الدائرى:



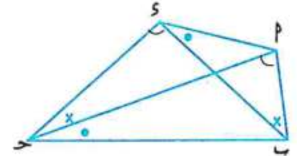
• **الشكل الرباعى الدائرى:** هو شكل رباعى لا بد أن تنتمى رءوسه الأربعة إلى دائرة واحدة.

فمثلًا: ا ب حـ ء تنتمى رءوسه ا، ب، حـ، ء إلى الدائرة

∴ ا ب حـ ء شكل رباعى دائرى.

إذا كان الشكل رباعيًا دائريًا فإن:

كل زاويتين مرسومتين على قاعدة واحدة وفى جهة واحدة منها متساويتان فى القياس



فمثلًا: ∵ أ ب حـ ء رباعى دائرى

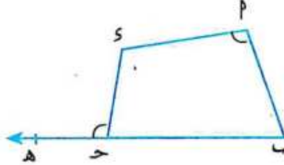
∴ ق(∠ ب أ حـ) = ق(∠ ب ء حـ)

، ق(∠ أ ء ب) = ق(∠ أ حـ ب)

، ق(∠ أ ب ء) = ق(∠ أ حـ ء)

.... وهكذا

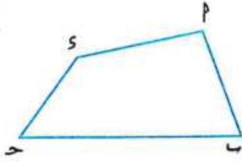
قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس من رءوسه يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها



∵ أ ب حـ ء رباعى دائرى

∴ ق(∠ ء حـ هـ) = ق(∠ أ)

كل زاويتين متقابلتين متكاملتان



∵ أ ب حـ ء رباعى دائرى

∴ ق(∠ أ) + ق(∠ حـ) = ١٨٠°

، ق(∠ ب) + ق(∠ ء) = ١٨٠°

- المربع والمستطيل وشبه المنحرف المتساوى الساقين هى أشكال رباعية دائرية.
- بينما: المعين ومتوازى الأضلاع وشبه المنحرف غير المتساوى الساقين هى أشكال رباعية غير دائرية.

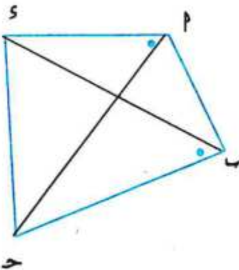
ملخص الحالات التى يكون فيها الشكل الرباعى دائريًا

إذا وجدت فيه:

(١) زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة فيه وفى جهة واحدة منها ومتساويتان فى القياس.

فمثلًا: ∵ ق(∠ ء أ حـ) = ق(∠ ء ب حـ) وهما مرسومتان على قاعدة واحدة ء حـ وفى جهة واحدة منها

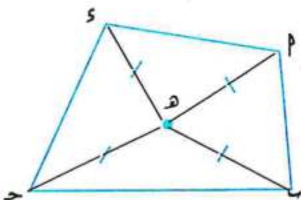
∴ الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى

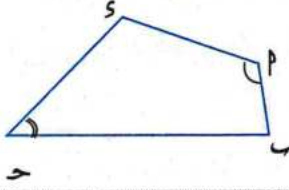


(٢) نقطة فى المستوى تبعد مسافات متساوية عن جميع رءوسه.

فمثلًا: ∵ هـ أ = هـ ب = هـ حـ = هـ ء

∴ الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى

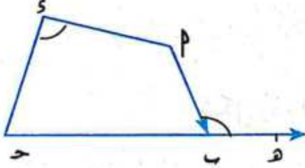




(٣) ← زاويتان متقابلتان متكاملتان.

فمثلًا: ∵ ق(∠ ٯ) + ق(∠ حـ) = ١٨٠°

∴ الشكل ٯ ب حـ ء رباعي دائري

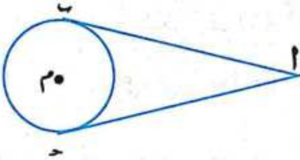


(٤) ← زاوية خارجة عند رأس من رءوسه تساوى فى القياس الزاوية الداخلة المقابلة لهذا الرأس.

فمثلًا: ∵ ق(∠ ٯ ب هـ) = ق(∠ ٯ ء حـ)

∴ الشكل ٯ ب حـ ء رباعي دائري

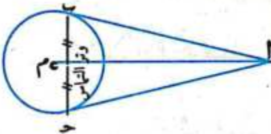
[٧] العلاقة بين مماسات الدائرة:



- القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج دائرة متساويتان فى الطول.

فمثلًا: ∵ $\overline{ٯب}$ ، $\overline{ٯحـ}$ قطعتان مماستان للدائرة (م) من النقطة ٯ

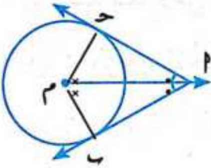
∴ ٯ ب = ٯ حـ



- المستقيم المارُّ بمركز الدائرة ونقطة تقاطع مماسين لها يكون محور تماثل لوتر التماس لهذين المماسين.

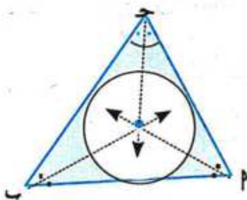
فمثلًا: ∵ $\overline{ٯب}$ ، $\overline{ٯحـ}$ قطعتان مماستان للدائرة (م)

∴ $\overline{ٯم}$ ⊥ $\overline{بحـ}$ وينصفه



- المســتقيم المارُّ بمركز الدائرة ونقطة تقاطع مماســين لها ينصف الزاوية بينهما وينصف الزاوية بين نصفى القطرين المارين بنقطتى التماس.

- الدائرة الداخلة لمضلع هى الدائرة التى تمس جميع أضلاع المضلع.



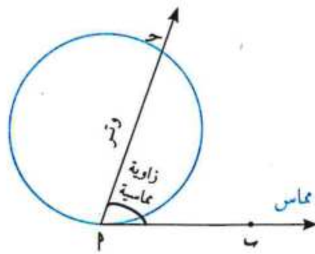
- مركز الدائرة الداخلة لأى مثلث هو نقطة تقاطع منصفات زواياه الداخلة.

فمثلًا: ∵ م هى مركز الدائرة للمثلث ٯ ب حـ

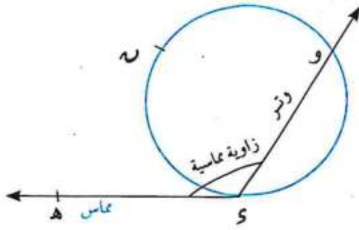
∴ $\overleftarrow{ٯم}$ ينصف ∠ ٯ ، $\overleftarrow{بم}$ ينصف ∠ ب ، $\overleftarrow{حـم}$ ينصف ∠ حـ

[٨] الزاويـــــة المماسيــــة:

- هى الزاوية الناتجة من اتحاد شعاعين، أحدهما مماس للدائرة والآخر يحمل وترًا.



شكل رقم (١)



شكل رقم (٢)

- قياس الزاوية المماسية يساوى نصف قياس القوس المحصور بين ضلعيها.

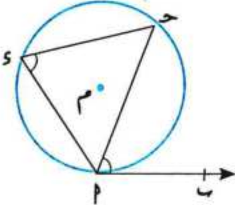
فمثلًا: ∵ فى شكل رقم (١) $\overleftrightarrow{أب}$ مماس، $\overline{أحـ}$ وتر

∴ ق (∠ ب أ حـ) = $\frac{1}{2}$ ق($\overset\frown{أحـ}$)

ومثلًا: ∵ فى شكل رقم (٢) $\overleftrightarrow{دهـ}$ مماس، $\overline{ود}$ وتر

∴ ق (∠ و د هـ) المماسية = $\frac{1}{2}$ ق($\overset\frown{دنو}$)

- قياس الزاوية المماسية يساوى قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى القوس.



فمثلًا: فى الشكل المقابل:

∵ ∠ ب أ حـ مماسية، ∠ أ د حـ محيطية مشتركتان فى ($\overset\frown{أحـ}$)

∴ ق (∠ ب أ حـ) = ق (∠ أ د حـ)

- إذا رسم شعاع من أحد طرفى وتر فى دائرة بحيث كان قياس الزاوية المحصورة بين هذا الشعاع والوتر يساوى قياس الزاوية المحيطية المرسومة على نفس الوتر من الجهة الأخرى، فإن هذا الشعاع يكون مماسًّا للدائرة.

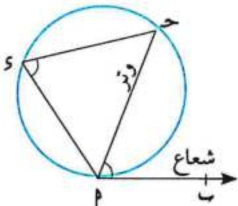
نتيجـة

قياس الزاوية المماسية يساوى نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس.

فمثلًا: فى الشكل المقابل:

∵ ق(∠ ب أ حـ) = ق(∠ د)

∴ $\overleftrightarrow{أب}$ يكون مماسًّا للدائرة.



أسئلة هامة على الوحدة الخامسة من امتحانات المحافظات السابقة

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ قياس القوس الذى يمثل $\frac{١}{٤}$ قياس الدائرة يساوى ....° (القليوبية ٢٠٢٢)

(أ) ٣٦٠ (ب) ٢٧٠ (جـ) ١٨٠ (د) ٩٠

٢ إذا كان: أ ب حـ ء هـ و مضلعًا سداسيًا منتظمًا مرسومًا داخل دائرة، فإن: ق($\overset{\frown}{أ ب}$) = ...° (الدقهلية ٢٠٢٢)

(أ) ٦٠ (ب) ٩٠ (جـ) ١٨٠ (د) ٣٦٠

٣ طول نصف محيط الدائرة يساوى .... (الدقهلية ٢٠٢٢)

(أ) ٢ π نق (ب) π نق (جـ) $\frac{١}{٢}$ π نق (د) $\frac{١}{٣}$ π نق

٤ قوس من دائرة طوله $\frac{١}{٣}$ π نق فإنه يقابل زاوية مركزية قياسها..........° (الدقهلية ٢٠٢١)

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ١٢٠ (د) ٢٤٠

٥ أ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع مرسوم داخل دائرة فإن: ق($\overset{\frown}{أ ب}$) = ...° (الفيوم ٢٠١٨)

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٩٠ (د) ١٢٠

٦ إذا كانت الزاوية المحيطية تقابل قوسًا أكبر من نصف الدائرة فإنها تكون .... (البحيرة ٢٠٢٣)

(أ) حادة (ب) قائمة (جـ) منفرجة (د) مستقيمة

٧ الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة تكون .... (الإسماعيلية ٢٠٢٤)

(أ) حادة (ب) منفرجة (جـ) مستقيمة (د) قائمة

٨ قياس الزاوية المحيطية المرسومة فى $\frac{١}{٣}$ دائرة يساوى ....° (الغربية ٢٠٢١)

(أ) ٢٤٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ٦٠ (د) ٣٠

٩ الزاوية المحيطية المرسومة فى ربع دائرة تكون .... (القليوبية ٢٠٢٣)

(أ) حادة (ب) قائمة (جـ) مستقيمة (د) منفرجة

١٠ النسبة بين قياس الزاوية المحيطية وقياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس تساوى .... (الدقهلية ٢٠٢٤)

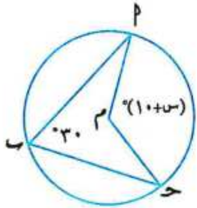
(أ) ٢ : ١ (ب) ١ : ٣ (جـ) ١ : ١ (د) ٢ : ٤

١١ قياس الزاوية المركزية = ... قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى نفس القوس. (بورسعيد ٢٠١٨)

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) ٢ (د) ١

١٢ إذا تقاطع وتران فى نقطة داخل الدائرة فإن قياس زاوية تقاطعهما يساوى .... قياسى القوسين المقابلين لها. (قنا ٢٠١٦)

(أ) نصف الفرق بين (ب) نصف مجموع (جـ) ضعف مجموع (د) ضعف الفرق بين

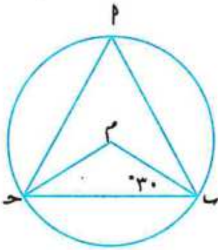


١٣ فى الشكل المقابل:

ق (∠ أ م حـ) = (س + ١٠)°، ق (∠ أ ب حـ) = ٣٠°

فإن قيمة س = ... (حيث م مركز الدائرة)

(أ) ١٣٠ (ب) ١٠٠ (جـ) ٥٠ (د) ٤٠ (الجيزة ٢٠٢٤)



١٤ فى الشكل المقابل:

Δ أ ب حـ مرسوم داخل الدائرة م

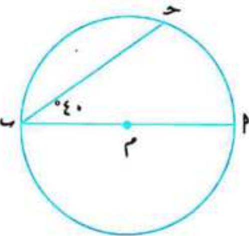
إذا كان ق (∠ م ب حـ) = ٣٠° فإن ق (∠ أ) = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠

(جـ) ٩٠ (د) ١٢٠

(بورسعيد ٢٠٢٤)

١٥ فى الشكل المقابل:



$\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م، ق (∠ أ ب حـ) = ٤٠°

فإن: ق ($\overset{\frown}{ب حـ}$) = ...°

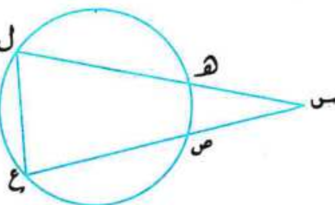
(أ) ٤٠ (ب) ٥٠

(جـ) ٨٠ (د) ١٠٠

(الوادى الجديد ٢٠٢٤)

(بورسعيد ٢٠٢٤)

١٦ فى الشكل المقابل: إذا كان ق ($\overset{\frown}{ل ع}$) = ٧٠°، ق ($\overset{\frown}{هـ ص}$) = ٣٠°



فإن ق (∠ س) = ...°

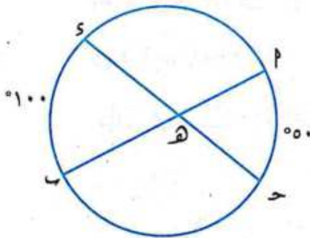
(أ) ١٠٠ (ب) ٥٠

(جـ) ٤٠ (د) ٢٠

١٧ فى الشكل المقابل: (السويس ٢٠١٨)

$\overline{أب} \cap \overline{حء} = \{هـ\}$ ، ق $(\overset{\frown}{أح}) = ٥٠°$ ، ق $(\overset{\frown}{ءب}) = ١٠٠°$

فإن: ق (∠ أهـ ح) = ... °



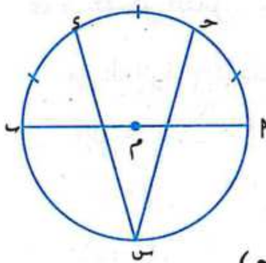
(أ) ٥٠ (ب) ١٠٠

(جـ) ١٦٠ (د) ٧٥

١٨ فى الشكل المقابل: (القاهرة ٢٠١٨)

$\overline{أب}$ قطر فى دائرة م ، ق $(\overset{\frown}{أح})$ = ق $(\overset{\frown}{حء})$ = ق $(\overset{\frown}{ءب})$

فإن: ق (∠ حسء) = ... °



(أ) ١٥ (ب) ٣٠

(جـ) ٤٥ (د) ٦٠

١٩ إذا كان: أ ب ح ء شكلًا رباعيًا دائريًا فيه: ق (∠ أ) = ٢ ق (∠ ح)

فإن: ق (∠ أ) = ...° (الغربية ٢٠٢٤)

(أ) ١٨٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٩٠ (د) ١٢٠

٢٠ أ ب ح ء شكل رباعى دائرى، ق (∠ أ) = ٦٠° ، فإن: ق (∠ ح) = ...° (الجيزة ٢٠٢٢)

(أ) ٦٠ (ب) ٣٠ (جـ) ٩٠ (د) ١٢٠

٢١ إذا كان: أ ب ح ء شكلًا رباعيًا دائريًا، فإن: ق (∠ أ) + ق (∠ ح) = ...° (القليوبية ٢٠٢٢)

(أ) ٩٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ١٨٠ (د) ٢٧٠

٢٢ أ ب ح ء شكل رباعى دائرى فيه: ق (∠ أ) = ٣ ق (∠ ح) (الإسكندرية ٢٠٢٤)

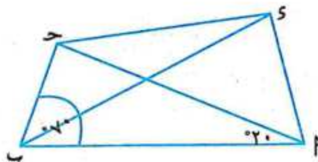
فإن: ق (∠ أ) = ...°

(أ) ٤٥ (ب) ٩٠ (جـ) ١٢٠ (د) ١٣٥

٢٣ فى الشكل المقابل: أ ب ح ء شكل رباعى دائرى (بورسعيد ٢٠٢٤)

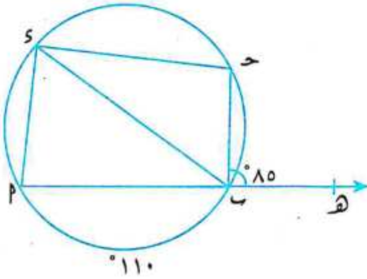
إذا كان ق (∠ ب أ ح) = ٢٠° ، ق (∠ أ ب ح) = ٧٠°

فإن ق (∠ أ ء ب) = ... °



(أ) ٢٠ (ب) ٧٠ (جـ) ٨٠ (د) ٩٠

[٢٤] فى الشكل المقابل:



إذا كانت: هـ ∈ ﺃب، ق (∠ هـ ب حـ) = ٨٥°،

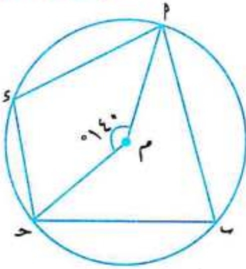
ق (ﺃب) = ١١٠°

فإن: ق (∠ ب ء حـ) = ...°

(ﺃ) ٣٠ (ب) ٥٥

(جـ) ٨٥ (د) ١١٠

[٢٥] فى الشكل المقابل:



فى الدائرة م إذا كان: ق (∠ حـ م ﺃ) = ١٤٠°،

فإن: ق (∠ حـ ء ﺃ) = ...°

(ﺃ) ٧٠ (ب) ١١٠

(جـ) ٤٠ (د) ١٤٠

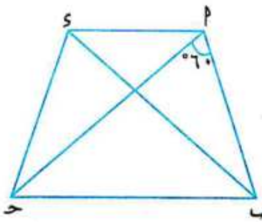
(بورسعيد ٢٠٢٤)

[٢٦] فى الشكل الرباعى الدائرى كل زاويتين متقابلتين فيه ....

(ﺃ) متساويتان فى القياس (ب) متتامتان

(جـ) متكاملتان (د) متبادلتان

[٢٧] فى الشكل المقابل:



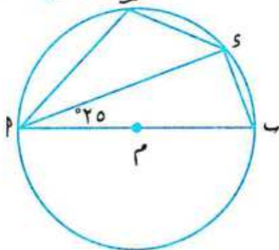
ﺃ ب حـ ء رباعى دائرى، ق (∠ ب ﺃ حـ) = ٦٠°،

فإن: ق (∠ ب ء حـ) = ...°

(ﺃ) ٣٠٠ (ب) ١٢٠

(جـ) ٦٠ (د) ٣٠

[٢٨] فى الشكل المقابل:



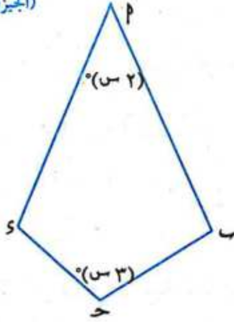
إذا كان: ق (∠ ب ﺃ ء) = ٢٥°،

فإن: ق (∠ ء حـ ﺃ) = ...°

(ﺃ) ٥٠ (ب) ١٠٠

(جـ) ١١٥ (د) ١٢٥

٢٩ في الشكل المقابل: (الجيزة ٢٠١٩)



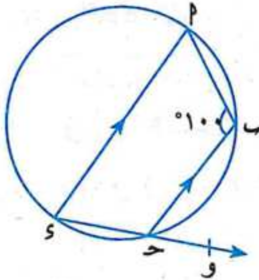
ٵ ب حـ ء شكل رباعى دائرى، ق (∠ ٵ) = (٢س) °،

ق (∠ حـ) = (٣س) °، فإن: قيمة س = ...

(أ) ٢٠ (ب) ٣٠

(جـ) ٣٢ (د) ٣٦

٣٠ في الشكل المقابل: (شمال سيناء ٢٠١٧)



إذا كان: ق (∠ ب) = ١٠٠°، $\overline{\text{ب حـ}}$ // $\overline{\text{ٵ ء}}$،

فإن: ق (∠ ب حـ و) = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠

(جـ) ٨٠ (د) ١٢٠

٣١ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الخارج .... (الشرقية ٢٠٢٢)

(أ) ٤ (ب) ٣ (جـ) ٢ (د) ١

٣٢ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين هو .... (بورسعيد ٢٠٢٤)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

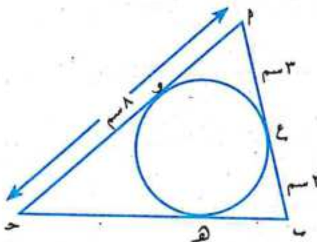
٣٣ عدد المماسات التى يمكن رسمها من نقطة تقع على دائرة يساوى .... (البحيرة ٢٠٢٤)

(أ) واحدًا (ب) اثنين (جـ) أربعة (د) عددًا لا نهائيًّا

٣٤ عدد الدوائر التى تمر بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة هو .... (المنوفية ٢٠٢٢)

(أ) صفر (ب) واحد (جـ) ثلاث (د) عدد لا نهائى

٣٥ في الشكل المقابل: (شمال سيناء ٢٠١٦)



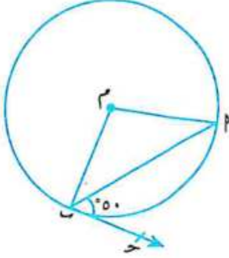
إذا كان: ٵ حـ = ٨سم، ٵ ع = ٣سم، ب ع = ٢سم،

فإن: ب حـ = ... سم.

(أ) ٥ (ب) ٧

(جـ) ١٠ (د) ١٣

٣٦ في الشكل المقابل: (القليوبية ٢٠٢٢)



$\overleftarrow{بحـ}$ مماس، ق (∠ ﺃ ب حـ) = ٥٠°،

فإن: ق (∠ ﺃ م ب) = ...°

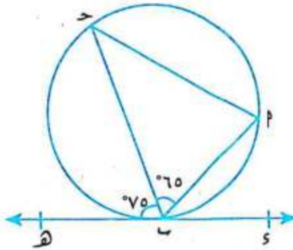
(ﺃ) ٦٠ (ب) ١٠٠

(جـ) ١٢٠ (د) ١٥٠

٣٧ الزاوية المماسية تكون محصورة بين .... (جنوب سيناء ٢٠٢١)

(ﺃ) وترين (ب) مماسين (جـ) وتر ومماس (د) وتر وقطر

٣٨ في الشكل المقابل: (الغربية ٢٠١٦)



$\overleftrightarrow{ءهـ}$ مماس للدائرة عند ب،

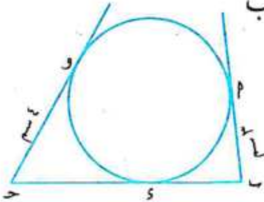
ق (∠ ﺃ ب حـ) = ٦٥°، ق (∠ حـ ب هـ) = ٧٥°

فإن: ق (∠ حـ) = ...°

(ﺃ) ٢٠ (ب) ٤٠

(جـ) ٥٠ (د) ٨٠

٣٩ في الشكل المقابل: (الإسماعيلية ٢٠٢٤)



إذا كانت $\overline{بحـ}$ ، $\overline{بﺃ}$ ، $\overline{حـو}$ تمس الدائرة عند ء ، ﺃ ، و على الترتيب

ب ﺃ = ٣سم ، حـ و = ٤سم، فإن ب حـ = ... سم.

(ﺃ) ٥ (ب) ٦

(جـ) ٧ (د) ٨

---

٢ الأسئلة المقالية:

١ في الشكل المقابل: (الفيوم ٢٠٢٢)

(٣س - ٢٥)° هـ م ب ﺃ ء حـ ١٠٠°

$\overline{ﺃب}$ قطر في الدائرة م، $\overline{ﺃب}$ // $\overline{حـء}$

إذا كان: ق ($\overset{\frown}{حـء}$) = ١٠٠°،

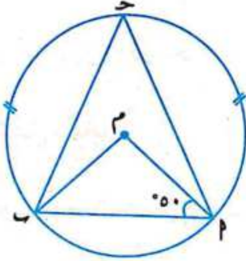
ق (∠ ﺃ هـ حـ) = (٣س - ٢٥)°

احسب: ق ($\overset{\frown}{بء}$) ، ثم أوجد: قيمة س

٢ أوجد قياس القوس الذى يمثل $\frac{1}{٤}$ الدائرة،

ثم احسب طول هذا القوس إذا كان طول نصف قطر الدائرة ١٤ سم. $\left(\pi \simeq \frac{٢٢}{٧}\right)$ (الفيوم ٢٠٢٢)

٣ فى الشكل المقابل: (الإسكندرية ٢٠٢٢)

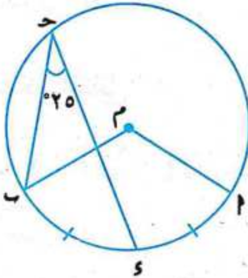


ق (أ ح⌒) = ق (ح ب⌒) ،

ق (∠ م أ ب) = ٥٠°

أوجد: ق (∠ ح أ م)

٤ فى الشكل المقابل: (السويس ٢٠٢٢)

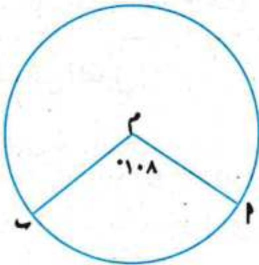


م دائرة، ء منتصف (أ ء ب⌒) ،

ق (∠ ح) = ٢٥°

أوجد بالبرهان: ق (∠ أ م ب)

٥ فى الشكل المقابل: (أسيوط ٢٠٢٤)



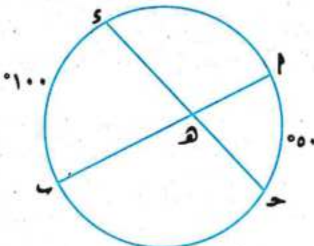
م دائرة طول نصف قطرها ٥ سم،

ق (أ ب⌒) = ١٠٨°

أوجد بالبرهان:

طول أ ب⌒ الأكبر لأقرب عدد صحيح علمًا بأن ($\pi \simeq$ ٣,١٤)

٦ فى الشكل المقابل: (الإسكندرية ٢٠١٩)



$\overline{أب} \cap \overline{حء}$ = {هـ}،

ق (أ ح⌒) = ٥٠°، ق (ب ء⌒) = ١٠٠°

أوجد بالبرهان: ق (∠ أ هـ ء)

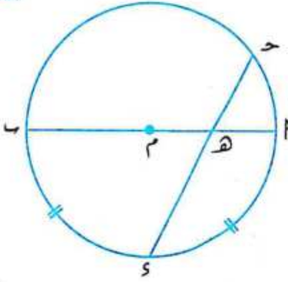
٧ في الشكل المقابل:

(الدقهلية ٢٠٢٢)

$\overline{أب}$ قطر في الدائرة م، $\overline{أب} \cap \overline{جـ د} = \{هـ\}$،

و ق($\widehat{أد}$) = ق($\widehat{ب د}$) = ٣ ق($\widehat{أجـ}$)

أوجد: ق($\angle$ أ هـ جـ)

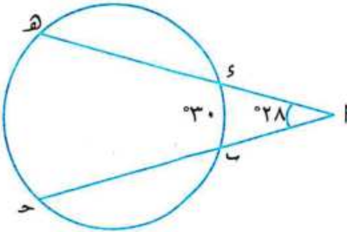


٨ في الشكل المقابل:

(الجيزة ٢٠٢٢)

ق($\angle$ أ) = ٢٨°، ق($\widehat{د ب}$) = ٣٠°

أوجد: ق($\widehat{هـ جـ}$)



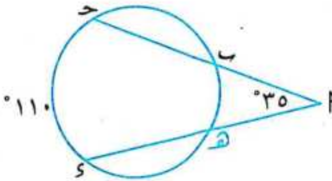
٩ في الشكل المقابل:

(الجيزة ٢٠٢٤)

$\overleftarrow{جـ ب} \cap \overleftarrow{د هـ} = \{أ\}$ ، ق($\angle$ أ) = ٣٥°

ق($\widehat{جـ د}$) = ١١٠°،

أوجد بالبرهان: ق($\widehat{ب هـ}$)



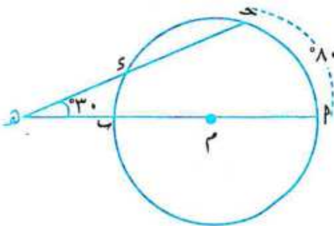
١٠ في الشكل المقابل:

(البحيرة ٢٠٢٤)

$\overline{أب}$ قطر في الدائرة م،

$\overleftarrow{أب} \cap \overleftarrow{جـ د} = \{هـ\}$، ق($\angle$ أ هـ جـ) = ٣٠°،

ق($\widehat{أجـ}$) = ٨٠°، أوجد ق($\widehat{جـ د}$)



١١ في الشكل المقابل:

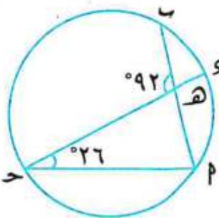
(المنوفية ٢٠٢٢)

إذا كانت: $\overline{أب} \cap \overline{د جـ} = \{هـ\}$،

ق($\angle$ أ جـ د) = ٢٦°، ق($\angle$ ب هـ جـ) = ٩٢°

فأوجد: (أ) ق($\widehat{أد}$)

(ب) ق($\widehat{ب جـ}$)

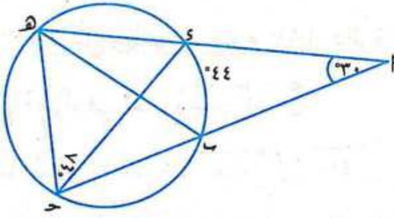


١٢ فى الشكل المقابل: (الفيوم ٢٠٢٢)

و (∠ أ) = ٣٠°، و (ب د⌒) = ٤٤°،

و (∠ د حـ هـ) = ٤٨°

أوجد: و (حـ هـ⌒)، و (حـ ب⌒)

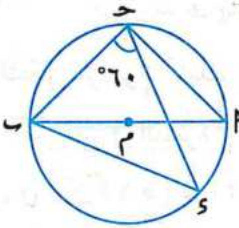


١٣ فى الشكل المقابل: (أسوان ٢٠٢١)

أ ب قطر فى الدائرة م،

و (∠ د حـ ب) = ٦٠°

أوجد: و (∠ أ ب د)

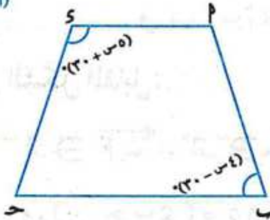


١٤ فى الشكل المقابل: (الفيوم ٢٠١٦)

أ ب حـ د شكل رباعى دائرى فيه:

و (∠ ب) = (٤ س − ٣٠)°، و (∠ د) = (٥ س + ٣٠)°

أوجد: قيمة س بالدرجات.

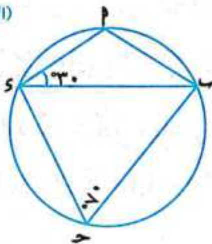


١٥ فى الشكل المقابل: (الإسماعيلية ٢٠٢٤)

و (∠ ب حـ د) = ٧٠°،

و (∠ أ د ب) = ٣٠°

أوجد بالبرهان: و (∠ أ ب د)

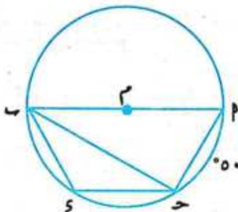


١٦ فى الشكل المقابل: (الشرقية ٢٠٢٢)

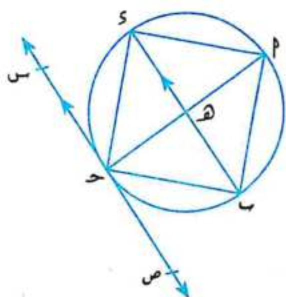
أ ب قطر فى الدائرة م،

و (أ حـ⌒) = ٥٠°

أوجد: و (∠ حـ د ب)



١٧ في الشكل المقابل: (أسيوط ٢٠٢٣)

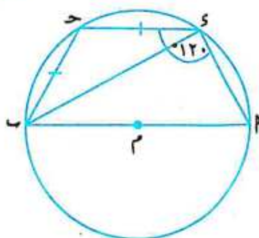


ا ب جـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة تقاطع قطراه فى هـ ، رُسم $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ مماسًا للدائرة عند جـ، $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب ء}}$

أثبت أن: (١) Δ ب ء جـ متساوى الساقين.

(ب) $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ يمس الدائرة المارة برءوس Δ ا ب هـ

١٨ في الشكل المرسوم أمامك: (الفيوم ٢٠٢٤)



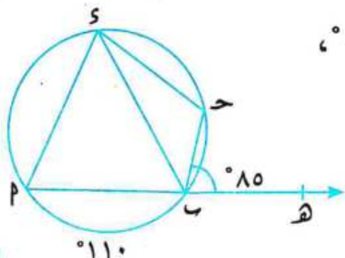
$\overline{\text{ا ب}}$ قطر فى الدائرة م ، جـ ء = جـ ب ،

، ق (∠ ا ء جـ) = ١٢٠°

أوجد: (١) ق (∠ ء ب جـ)

(٢) ق (∠ ب ا ء)

١٩ في الشكل المقابل: (كفر الشيخ ٢٠٢٤)

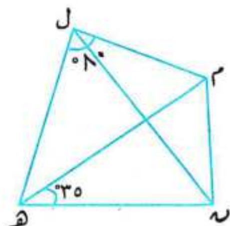


هـ ∈ $\overleftarrow{\text{ا ب}}$ ، هـ ∉ $\overline{\text{ا ب}}$ ، ق ($\overset{\frown}{\text{ا ب}}$) = ١١٠°،

ق (∠ جـ ب هـ) = ٨٥°

أوجد بالبرهان ق (∠ ب ء جـ)

٢٠ في الشكل المقابل: (دمياط ٢٠١٩)



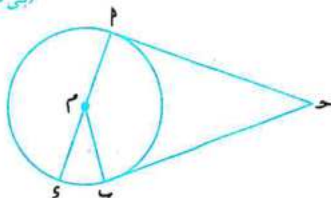
ل م ن هـ شكل رباعى دائرى فيه:

ق (∠ م هـ ن) = ٣٥°، ق (∠ م ل هـ) = ٨٠°

أوجد بالبرهان:

(١) ق (∠ م ل ن) (ب) ق (∠ هـ م ن)

٢١ في الشكل المقابل: (بنى سويف ٢٠١٧)

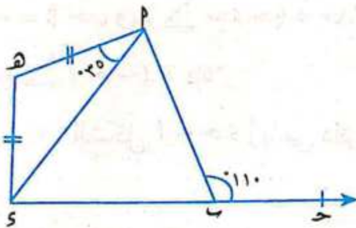


$\overline{\text{ا ء}}$ قطر فى دائرة مركزها م ،

$\overleftarrow{\text{جـ ا}}$ ، $\overleftarrow{\text{جـ ب}}$ مماسان للدائرة م عند ا ، ب

أثبت أن: ق (∠ ء م ب) = ق (∠ ا جـ ب)

٢٢ فى الشكل المقابل: (القاهرة ٢٠٢٢)



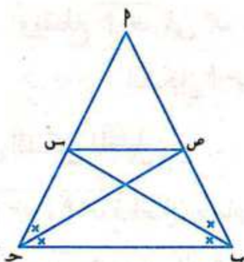
هـ أ = هـ ء ، ق (∠ ء أ هـ) = ٣٥° ،

ق (∠ أ ب جـ) = ١١٠°

(أ) أوجد بالبرهان: ق (∠ هـ)

(ب) أثبت أن: الشكل أ ب ء هـ رُباعى دائرى.

٢٣ فى الشكل المقابل: (القليوبية ٢٠٢٢)



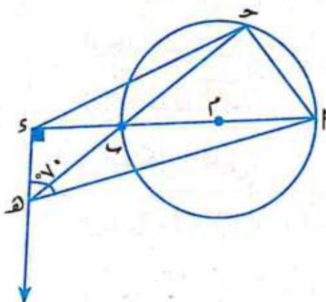
أ ب جـ Δ فيه: أ ب = أ جـ ،

ب س ينصف (∠ أ ب جـ) ويقطع أ جـ فى س ،

جـ ص ينصف (∠ أ جـ ب) ويقطع أ ب فى ص

أثبت أن: الشكل ب جـ س ص رباعى دائرى.

٢٤ فى الشكل المقابل:



أ ب قطر فى الدائرة م ، ء ∈ أ ب ، ء ∉ أ ب ،

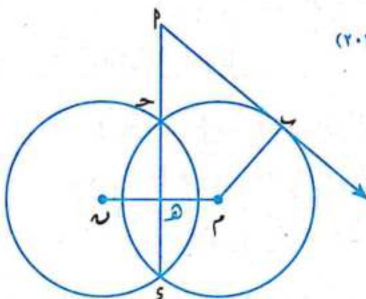
رسم ء هـ ⊥ أ ب ، جـ ∈ أ ب ،

جـ ب ∩ ء هـ = {هـ}، ق (∠ أ هـ ء) = ٧٠°

(أ) أثبت أن: الشكل أ جـ ء هـ رُباعى دائرى. (سوهاج ٢٠٢٤)

(ب) أوجد: ق (∠ ء جـ هـ) (الشرقية ٢٠٢٢)

٢٥ فى الشكل المقابل: (الإسكندرية ٢٠٢٤)

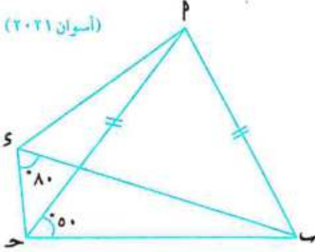


م ، ن دائرتان متقاطعتان فى جـ ، ء

، أ ب مماس للدائرة م عند ب

، م ن ∩ جـ ء = {هـ}

أثبت أن: الشكل أ ب م هـ رباعى دائرى.

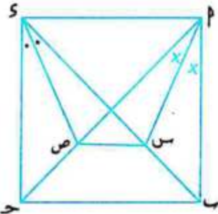


٢٦ فى الشكل المقابل:

أ ب = أ حـ ، ق (∠ ب ء حـ) = ٨٠°،

ق (∠ أ حـ ب) = ٥٠°

أثبت أن: الشكل أ ب حـ ء رُباعى دائرى.



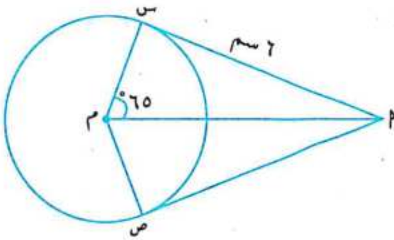
٢٧ فى الشكل المقابل: أ ب حـ ء مربع، $\overleftarrow{أ س}$ ينصف ∠ ب أ حـ،

ويقطع $\overline{ب ء}$ فى س ، $\overleftarrow{ء ص}$ ينصف ∠ حـ ء ب،

ويقطع $\overline{أ حـ}$ فى ص

أثبت أن: الشكل أ س ص ء رباعى دائرى.

٢٨ فى الشكل المقابل:



$\overline{أ س}$ ، $\overline{أ ص}$ قطعتان مماستان للدائرة م

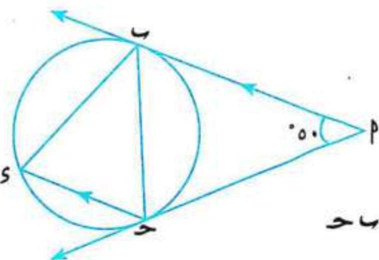
عند س ، ص على الترتيب،

ق (∠ أ م س) = ٦٥° ، أ س = ٦ سم

أوجد بالبرهان:

(ا) طول $\overline{أ ص}$ (ب) ق (∠ س أ ص)

٢٩ فى الشكل المقابل:



ق (∠ أ) = ٥٠° ، $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ حـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م

أوجد: (ا) ق (∠ أ ب حـ)

(ب) ق (∠ م حـ ب)

٣٠ فى الشكل المقابل:

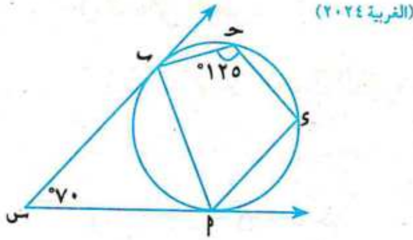
$\overleftarrow{أ حـ}$ ، $\overleftarrow{أ ب}$ مماسان للدائرة عند حـ ، ب،

ق (∠ أ) = ٥٠° ، $\overleftarrow{أ ب}$ // $\overline{حـ ء}$

(ا) أوجد ق (∠ حـ ء ب)

(ب) أثبت أن: $\overleftarrow{ب ء}$ مماس للدائرة المارة برءوس Δ أ ب حـ

٣١ فى الشكل المقابل: (الغربية ٢٠٢٤)



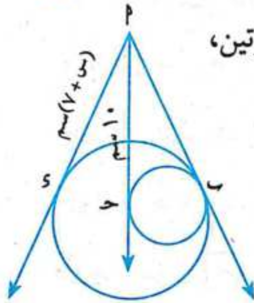
$\overleftarrow{\text{س أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{س ب}}$ مماسان للدائرة عند أ ، ب

ق (∠ أ س ب) = ٧٠° ، ق (∠ ء حـ ب) = ١٢٥°

أثبت أن: (١) $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ينصف (∠ ء أ س)

(٢) $\overline{\text{أ ء}}$ // $\overleftarrow{\text{س ب}}$

٣٢ فى الشكل المقابل: (القليوبية ٢٠٢٢)



دائرتان متماستان من الداخل فى نقطة ب ، $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ مماس مشترك للدائرتين،

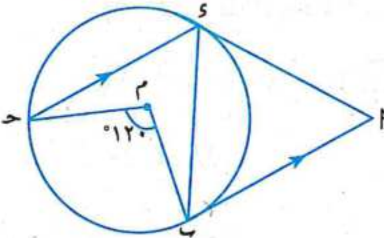
$\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ مماس للدائرة الصغرى،

$\overleftarrow{\text{أ ء}}$ مماس للدائرة الكبرى

فإذا كان: أ حـ = ١٠ سم، أ ء = (س + ٧)سم

فأوجد: قيمة س

٣٣ فى الشكل المقابل: (الشرقية ٢٠٢٢)

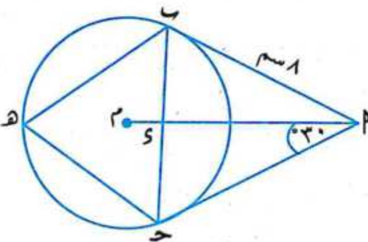


$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ ء}}$ قطعتان مماستان للدائرة م، $\overline{\text{أ ب}}$ // $\overline{\text{ء حـ}}$،

ق (∠ ب م حـ) = ١٢٠°

أثبت أن: Δ أ ب ء متساوى الأضلاع.

٣٤ فى الشكل المقابل: (الدقهلية ٢٠٢٢)



$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ قطعتان مماستان للدائرة م ، عند ب ، حـ ،

$\overline{\text{أ م}}$ ∩ $\overline{\text{ب حـ}}$ = {ء}، أ ب = ٨ سم،

ق (∠ حـ أ م) = ٣٠°

أوجد:

(أ) محيط Δ أ ب حـ (ب) ق (∠ هـ)

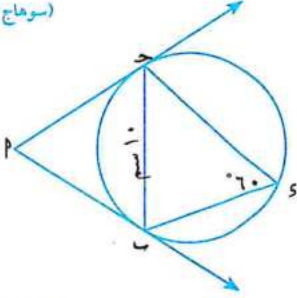
35 فى الشكل المقابل:

$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ مماسان للدائرة،

ق (∠ ء) = ٦٠° ، بحـ = ١٠ سم

أوجد: محيط Δ أ ب حـ

(سوهاج ٢٠٢٣)



36 فى الشكل المقابل:

Δ أ ب حـ يمس الدائرة م من الخارج

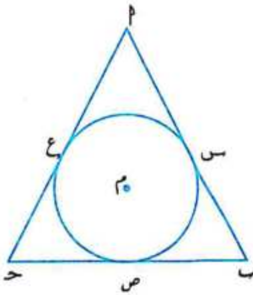
فى النقط س ، ص ، ع

فإذا كان محيط Δ أ ب حـ يساوى ٣٠ سم،

طول $\overline{بحـ}$ = ١٠ سم

فأوجد: طول $\overline{أس}$

(الدقهلية ٢٠٢٣)



37 فى الشكل المقابل:

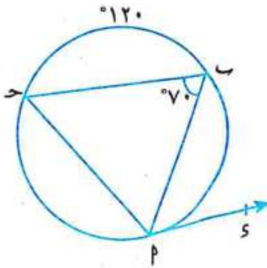
$\overleftrightarrow{أء}$ مماس للدائرة عند أ ،

ق (∠ ب) = ٧٠° ، ق ($\overset\frown{بحـ}$) = ١٢٠°

أوجد بالبرهان:

ق (∠ ءأب)

(الإسماعيلية ٢٠١٩)



38 فى الشكل المقابل:

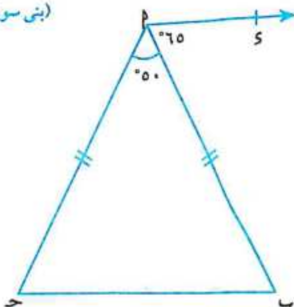
أ ب حـ مثلث فيه أ ب = أ حـ

، ق (∠ حـأب) = ٥٠° ، ق (∠ ءأب) = ٦٥°

برهن أن:

$\overleftrightarrow{أء}$ مماس للدائرة برءوس المثلث أ ب حـ

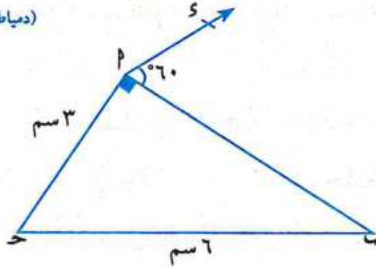
(بنى سويف ٢٠٢٤)



٣٩ ٩ ٮ حـ ٮ متوازى أضلاع فيه: ٩ حـ = ٮ حـ (المنوفية ٢٠٢٢)

أثبت أن: $\overleftrightarrow{\text{حـ ٮ}}$ مماس للدائرة المارة برءوس Δ ٩ ٮ حـ

٤٠ في الشكل المقابل: (دمياط ٢٠٢١)



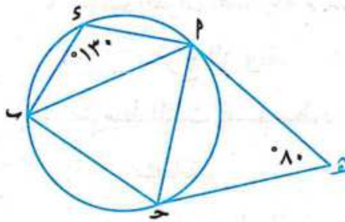
Δ ٩ ٮ حـ قائم الزاوية فى ٩ ،

٩ حـ = ٣سم ، ٮ حـ = ٦ سم،

ق (∠ ء ٩ ٮ) = ٦٠°

أثبت أن: $\overleftrightarrow{\text{٩ ء}}$ مماس للدائرة التى تمر برءوس Δ ٩ ٮ حـ

٤١ في الشكل المقابل: (الشرقية ٢٠٢٤)



$\overline{\text{هـ ٩}}$ ، $\overline{\text{هـ حـ}}$ قطعتان مماستان للدائرة عند ٩ ، حـ،

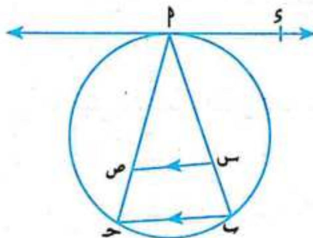
ق (∠ ٩ هـ حـ) = ٨٠° ، ق (∠ ٩ ء ٮ) = ١٣٠°

أثبت أن:

(١) ٩ ٮ = ٩ حـ

(٢) $\overline{\text{٩ ٮ}}$ مماس للدائرة المارة بالنقط ٩ ، حـ ، هـ

٤٢ في الشكل المقابل: (الغربية ٢٠٢٤)



Δ ٩ ٮ حـ مرسوم داخل دائرة ،

$\overleftrightarrow{\text{٩ ء}}$ مماس للدائرة عند ٩ ، س ∈ $\overline{\text{٩ ٮ}}$ ،

ص ∈ $\overline{\text{٩ حـ}}$ ، حيث $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ٮ حـ}}$

أثبت أن:

$\overleftrightarrow{\text{٩ ء}}$ مماس للدائرة المارة بالنقط ٩ ، س ، ص

مهارات تراكمية أساسية فى الهندسة

اختر الإجابة الصحيحة:

١ مربع طول قطره ٨ سم، فإن مساحة سطحه = ... سم^{٢}. (الإسماعيلية ٢٠٢٣)

(أ) ٨ (ب) ١٦ (جـ) ٣٢ (د) ٦٤

٢ أ ب حـ مثلث فيه (أ حـ)^{٢} > (أ ب)^{٢} + (ب حـ)^{٢} فإن (∠ ب أ حـ) تكون .... (الجيزة ٢٠٢٤)

(أ) منفرجة (ب) حادة (جـ) قائمة (د) مستقيمة

٣ المثلث يحتوى على زاويتين .... على الأقل. (كفر الشيخ ٢٠١٩)

(أ) حادتين (ب) منفرجتين (جـ) قائمتين (د) منعكستين

٤ إذا كان أ ب حـ ء معينًا فيه ق (∠ أ حـ ب) = ٣٢° فإن ق (∠ ء) = ... (كفر الشيخ ٢٠١٩)

(أ) ٣٢° (ب) ٦٤° (جـ) ١١٦° (د) ٣٦°

٥ مثلث أطوال أضلاعه ٥ سم، ٧ سم، ٨ سم يكون .... (كفر الشيخ ٢٠١٩)

(أ) منفرج الزاوية (ب) حاد الزوايا (جـ) قائم الزاوية (د) متساوى الأضلاع

٦ متوسط المثلث يقسم سطحه إلى سطحى مثلثين .... (أسيوط ٢٠٢٤)

(أ) متطابقين (ب) متساويين فى المساحة

(جـ) متساويى الساقين (د) قائمى الزاوية

٧ قياس أى زاوية داخلة فى المضلع السداسى المنتظم = ... (البحيرة ٢٠٢٤)

(أ) ٩٠° (ب) ١٠٨° (جـ) ١٢٠° (د) ١٣٥°

٨ طول مسقط قطعة مستقيمة على مستقيم معلوم .... طول القطعة المستقيمة. (دمياط ٢٠١٩)

(أ) < (ب) ≥ (جـ) ≤ (د) >

٩ مربع طول ضلعه يساوى ٤ سم، فإن مربع طول قطره = ... سم^{٢}. (الغربية ٢٠٢٣)

(أ) ٤ $\sqrt{٢}$ (ب) ١٦ (جـ) ٣٢ (د) ١٦ $\sqrt{٢}$

١٠ ميل المستقيم الذى معادلته: ٢س − ٣ص + ٥ = صفر هو .... (بنى سويف ٢٠٢٤)

(أ) $\frac{٢}{٣}$ (ب) $\frac{-٣}{٢}$ (جـ) $\frac{-٢}{٣}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

١١ إذا كان Δ س ص ع ~ Δ أ ب حـ، ق (∠ ص) = ٦٠°، ق (∠ حـ) = ٤٠° فإن ق (∠ س) = ...° (دمياط ٢٠١٩)

(أ) ٤٠ (ب) ٨٠ (جـ) ١٠٠ (د) ١٢٠

١٢ ٵ ب حـ مثلث فيه ٵ ب = ٵ حـ إذا كان ق (∠ ٵ) = ٨٠° فإن ق (∠ حـ) = ...° (الإسكندرية ٢٠٢٤)

(أ) ٨٠ (ب) ٢٥ (جـ) ٥٠ (د) ١٠٠

١٣ ٵ ب حـ Δ فيه (ٵ حـ)^2 = (ٵ ب)^2 + (ب حـ)^2 + ٥ فإن ∠ ب تكون .... (البحيرة ٢٠١٩)

(أ) حادة (ب) قائمة (جـ) منفرجة (د) مستقيمة

١٤ فى الشكل المقابل:

ٵ ء متوسط فى Δ ٵ ب حـ،

ومساحة المثلث ٵ ب ء = ٢٠ سم^2،

فإن مساحة Δ ٵ حـ ء = ... سم^2.

(أ) ٢٠ (ب) ٤٠ (جـ) ٦٠ (د) ٨٠

١٥ إذا كان حـ ∈ لمحور تماثل ٵ ب فإن حـ ٵ .... حـ ب (سوهاج ٢٠٢٤)

(أ) = (ب) ≡ (جـ) // (د) ⊥

١٦ مضلعان متشابهان، النسبة بين طولى ضلعين متناظرين فيهما ١ : ٣،

فإذا كان محيط المضلع الأصغر ٢٥ سم فإن محيط المضلع الأكبر = ... سم. (الوادى الجديد ٢٠٢١)

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (جـ) ٦٠ (د) ٧٥

١٧ Δ ٵ ب حـ قائم الزاوية فى ب ، ب ء ⊥ ٵ حـ فإن مسقط ب ء على ٵ حـ هو ....

(أ) {ٵ} (ب) {ب} (جـ) {حـ} (د) {ء}

١٨ فى الشكل المقابل:

ٵ ب حـ مثلث قائم الزاوية فى ٵ ،

ٵ ء ⊥ ب حـ ، ب ء = ١٦ سم، ء حـ = ⊥ سم.

فإن طول ٵ ب = ... سم.

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) ٢٠ (د) ٢٥

١٩ شبه منحرف طولا قاعدتيه المتوازيتين ٤سم، ١٢سم، وارتفاعه ٩سم،

فإن مساحته = ... سم^2. (الفيوم ٢٠١٩)

(أ) ٢٥ (ب) ٣٦ (جـ) ٧٢ (د) ١٤٤

٢٠ قياس الزاوية المنعكسة للزاوية التى قياسها ١٠٠° = ...° (القاهرة ٢٠٢١)

(أ) ٨٠ (ب) ٩٠ (جـ) ٢٠٠ (د) ٢٦٠

٢١ إذا كان قياس إحدى زاويتى القاعدة لمثلث متساوى الساقين ٤٠°، فإن قياس زاوية الرأس يساوى ....° (القاهرة ٢٠٢١)

(أ) ٤٠ (ب) ٨٠ (جـ) ١٠٠ (د) ١٤٠

٢٢ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كل متوسط بنسبة .... من جهة القاعدة. (الغربية ٢٠٢٤)

(أ) ١ : ٣ (ب) ٤ : ٦ (جـ) ٢ : ١ (د) ٥ : ١٠

٢٣ مربع مساحته ٥٠ سم² فإن طول قطره = ... سم (المنوفية ٢٠٢١)

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ١٥ (د) ٢٥

٢٤ (∠ أ) ، (∠ ب) زاويتان متتامتان، ق (∠ أ) = $\frac{١}{٢}$ ق (∠ ب) فإن ق (∠ أ) = ...° (المنوفية ٢٠٢١)

(أ) ٣٠ (ب) ٤٥ (جـ) ٦٠ (د) ٩٠

٢٥ مساحة المعين الذى طولا قطريه ٦ سم ، ٨ سم تساوى .... سم². (سوهاج ٢٠٢٤)

(أ) ٢ (ب) ١٤ (جـ) ٢٤ (د) ٤٨

٢٦ معين طولا قطريه ٨ سم ، ٦ سم، فإن محيطه = ... سم. (قنا ٢٠٢٤)

(أ) ١٤ (ب) ٢٨ (جـ) ٤٠ (د) ٢٠

٢٧ إذا كانت النسبة بين محيطى مربعين ١ :٢ فإن النسبة بين مساحتيهما = ... (الجيزة ٢٠١٩)

(أ) ١ : ٢ (ب) ٢ : ١ (جـ) ١ : ٤ (د) ٤ : ١

٢٨ مثلث له محور تماثل واحد فقط وأطوال أضلاعه هى ١٠سم، ٥سم، سسم، فإن س = ... سم. (القليوبية ٢٠٢٤)

(أ) ٥ (ب) ١٠ (جـ) ٨ (د) ١٢

٢٩ مثلث مساحته ٣٥سم² وارتفاعه ٧ سم ، فإن طول قاعدته = ... سم. (بنى سويف ٢٠٢١)

(أ) ٥ (ب) ٧ (جـ) ١٠ (د) ٢٠

٣٠ مجموع طولى أى ضلعين فى مثلث .... طول الضلع الثالث. (القاهرة ٢٠٢٢)

(أ) أصغر من (ب) يساوى (جـ) أكبر من (د) ضعف

٣١ مجموع قياسى الزاويتين المتكاملتين = ...° (قنا ٢٠٢٣)

(أ) ٩٠ (ب) ١٨٠ (جـ) ٢٧٠ (د) ٣٦٠

٣٢ صورة النقطة (−٣ ، ٤) بالانعكاس فى محور الصادات هى .... (دمياط ٢٠٢٢)

(أ) (٣ ، ٤) (ب) (٣ ، −٤) (جـ) (−٣ ، −٤) (د) (٤ ، −٣)

٣٣ عدد أقطار المثلث = ... (الأقصر ٢٠٢٣)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٣٤ عدد محاور تماثل المعين يساوى .... (المنوفية ٢٠٢٢)

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٤

٣٥ عدد ارتفاعات المثلث المتساوى الساقين يساوى .... (الغربية ٢٠٢٣)

(أ) صفرًا (ب) ١ (جـ) ٣ (د) عددًا لا نهائيًّا

٣٦ ﻫ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه ق (∠ﻫ) = ١٠٠°، فإن ق (∠ب) + ق (∠ء) = ... (أسوان ٢٠٢٤)

(أ) ٢٤٠° (ب) ٨٠° (جـ) ١٨٠° (د) ١٦٠°

٣٧ مستطيل عرضه ٥سم وطول قطره ١٣سم فإن طول المستطيل = ... سم. (قنا ٢٠٢٣)

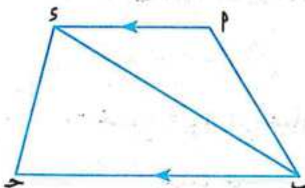
(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ١٢ (د) ١٠

٣٨ إذا كانت الأطوال ٢ سم، ٤ سم، س سم هى أطوال أضلاع مثلث،

فإن إحدى قيم س = ... سم. (الفيوم ٢٠٢٤)

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٤ (د) ٦

٣٩ فى الشكل المقابل: (الوادى الجديد ٢٠٢٣)



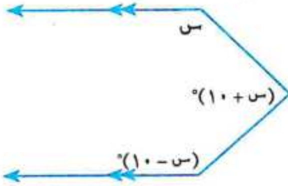
إذا كان ﻫ ء = $\frac{1}{2}$ حـ ب، فإن:

مساحة △ ﻫ ب ء : مساحة الشكل ﻫ ب حـ ء = ...

(أ) ١ : ٢ (ب) ١ : ٣

(جـ) ١ : ٤ (د) ٢ : ٣

٤٠ في الشكل المقابل: (الوادى الجديد ٢٠٢٣)



ظا $\left(\frac{س}{٢}\right)$ = ...

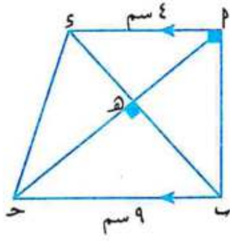
(أ) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ (ب) $\frac{١}{٢}$

(جـ) $\sqrt{٣}$ (د) ١

٤١ قياس الزاوية الخارجة عند أى رأس من رءوس المثلث المتساوى الأضلاع = ... (الأقصر ٢٠٢٣)

(أ) ٦٠° (ب) ٩٠° (جـ) ٣٦٠° (د) ١٢٠°

٤٢ في الشكل المقابل:



إذا كان $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب جـ}$،

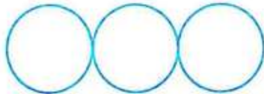
ق (∠ ب أ ء) = ق (∠ ب هـ جـ) = ٩٠°

أ ء = ٤ سم ، ب جـ = ٩ سم،

فإن مساحة شبه المنحرف أ ب جـ ء = ... سم².

(أ) ٢٦ (ب) ٣٩ (جـ) ٥٢ (د) ٦٥

٤٣ في الشكل المقابل:



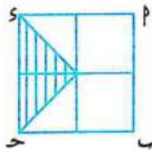
ثلاث دوائر متطابقة ومتماسة

فيكون عدد محاور تماثل الشكل ....

(أ) ١ (ب) ٢

(جـ) ٣ (د) عددًا لا نهائيًا

٤٤ في الشكل المقابل:

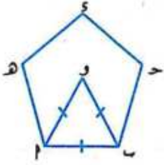


مربع أ ب جـ ء يتكون من مربعات صغيرة متطابقة

فإن مساحة الجزء المظلل = ... مساحة المربع أ ب جـ ء

(أ) $\frac{١}{٨}$ (ب) $\frac{١}{٤}$ (جـ) $\frac{٣}{٨}$ (د) $\frac{٣}{٤}$

٤٥ **فى الشكل المقابل:**



إذا كان أ ب حـ ء هـ خماسيًا منتظمًا، أ ب و مثلثًا متساوى الأضلاع،

فإن ق (∠ ب حـ و) = ...

(أ) ٤٥° (ب) ٥٤° (جـ) ٦٠° (د) ٦٦°

٤٦ يمثل الشكل المقابل دائرتين متحدتى المركز م

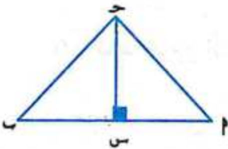
$\overline{\text{أ حـ}}$ يمس الدائرة الصغرى فى ب،

فإذا كان أ حـ = ١٤ سم

فإن مساحة سطح الجزء المظلل تساوى .... سم^{٢}.

(أ) ١٩٦ π (ب) ٤٩ π (جـ) $\frac{٤٩}{٤}$ π (د) $\frac{٤٩}{٢}$ π

٤٧ **فى الشكل المقابل:**

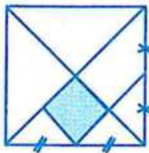


أ ب حـ مثلث فيه أ حـ = ب حـ، فإذا كان أ ب = ٢ حـ س،

فإن ق (∠ ب) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٧٥°

٤٨ **فى الشكل المقابل:**

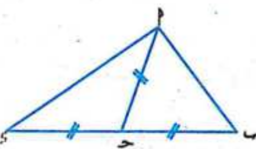


نسبة مساحة سطح المربع المظلل

إلى مساحة سطح المربع الأكبر تساوى ....

(أ) $\frac{١}{١٦}$ (ب) $\frac{١}{١٢}$ (جـ) $\frac{١}{٨}$ (د) $\frac{١}{٦}$

٤٩ **فى الشكل المقابل:**



إذا كان حـ ء = أ حـ = ب حـ، ق (∠ ب) = س°،

فإن ق (∠ ب أ ء) = ...

(أ) ٩٠° (ب) (٢ س)° (جـ) (٣ س)° (د) (١٨٠ − س)°

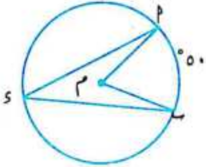
النموذج الأول

١ اختر الإجابة الصحيحة: (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة ....

(أ) حادة (ب) منفرجة (جـ) مستقيمة (د) قائمة

٢ فى الشكل المقابل:



دائرة مركزها م إذا كان ق (⌒أ ب) = ٥٠°

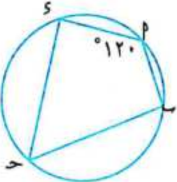
فإن ق (∠ أ ء ب) = ...°

(أ) ٢٥ (ب) ٥٠ (جـ) ١٠٠ (د) ١٥٠

٣ عدد محاور التماثل لأى دائرة هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى

٤ فى الشكل المقابل:



إذا كان ق (∠ أ) = ١٢٠°،

فإن ق (∠ حـ) = ...°

(أ) ٦٠ (ب) ٩٠ (جـ) ١٢٠ (د) ١٨٠

٥ إذا كان المستقيم مماسًا للدائرة التى قطرها ٨ سم، فإنه يبعد عن مركزها بمقدار يساوى .... سم.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

٦ سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = {أ}، وطول نصف قطر أحدهما ٣ سم، م ن = ٨ سم.

فإن طول نصف قطر الدائرة الأخرى= .... سم.

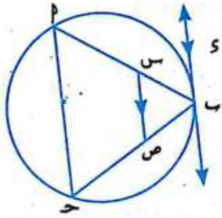
(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ١١ (د) ١٦

٢ (أ) أكمل مع البرهان: إذا كان الشكل الرباعى دائريًا، فإن كل زاويتين متقابلتين فيه ....

(ب) فى الشكل المقابل: ﻫ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة، $\overleftrightarrow{ب ى}$ مماس للدائرة عند ب، س ∈ $\overline{أ ب}$

ص ∈ $\overline{ب حـ}$ حيث $\overline{س ص}$ // $\overleftrightarrow{ب ى}$

أثبت أن: الشكل أ س ص حـ رباعى دائرى.

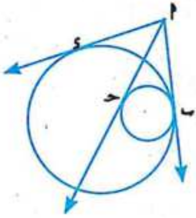


٣ (أ) فى الشكل المقابل: دائرتان متماستان من الداخل فى ب،

$\overrightarrow{أ ب}$ مماس مشترك للدائرتين، $\overrightarrow{أ حـ}$ مماس للصغرى،

$\overrightarrow{أ ى}$ مماس للكبرى، أ حـ = ١٥ سم، أ ب = (٢س − ٣)سم

أ ى = (ص−٢) سم، أوجد قيمة كلٍّ من: س ، ص



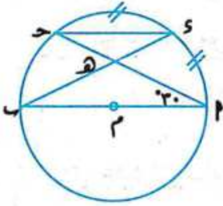
(ب) فى الشكل المقابل: $\overline{أ ب}$ قطر فى دائرة م، حـ ∈ للدائرة.

ق (∠ حـ أ ب) = ٣٠°، ى منتصف $\overset{\frown}{(أ حـ)}$،

$\overline{ى ب}$ ∩ $\overline{أ حـ}$ = {هـ}

١ أوجد: ق (∠ ب ى حـ)، ق $\overset{\frown}{(أ ى)}$

٢ أثبت أن: $\overline{حـ ى}$ // $\overline{أ ب}$

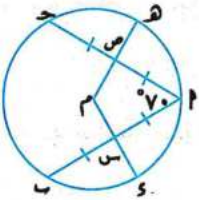


٤ (أ) فى الشكل المقابل:

$\overline{أ ب}$، $\overline{أ حـ}$ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م،

س منتصف $\overline{أ ب}$ ، ص منتصف $\overline{أ حـ}$ ، ق (∠ حـ أ ب) = ٧٠°

١ أوجد: ق (∠ ى م هـ) ٢ أثبت أن: س ى = ص هـ

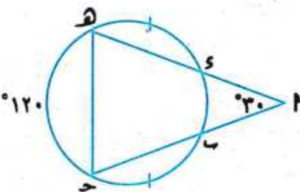


(ب) فى الشكل المقابل: ق (∠ أ) = ٣٠°

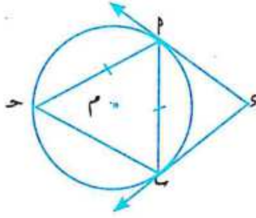
ق $\overset{\frown}{(هـ حـ)}$ = ١٢٠°، ق $\overset{\frown}{(ب حـ)}$ = ق $\overset{\frown}{(ى هـ)}$

١ أوجد: ق $\overset{\frown}{(ب ى)}$ الأصغر

٢ أثبت أن: أ ب = أ ى



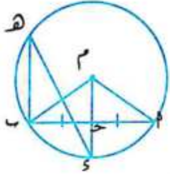
٥ (أ) فى الشكل المقابل:



إذا كان $\overleftrightarrow{\text{ءأ}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ءب}}$ مماسين للدائرة م، أ ب = أ حـ

فأثبت أن: $\overline{\text{أ حـ}}$ مماس للدائرة المارة برءوس المثلث أ ب ء

(ب) فى الشكل المقابل:



حـ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$

$\overrightarrow{\text{م حـ}}$ ∩ الدائرة م = {ء}، ق (∠م أ ب)= ٢٠°

أوجد: ق (∠ ب هـ ء) ، ق ($\overset{\frown}{\text{أ ء ب}}$)

النموذج الثانى

١ اختر الإجابة الصحيحة: (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ قياس القوس الذى يمثل نصف قياس الدائرة = ...

(أ) ٣٦٠° (ب) ١٨٠° (جـ) ١٢٠° (د) ٩٠°

٢ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الخارج = ...

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

٣ قياس الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة = ...

(أ) ٤٥° (ب) ٩٠° (جـ) ١٢٠° (د) ١٨٠°

٤ الزاوية المماسية هى زاوية محصورة بين ....

(أ) وترين (ب) مماسين (جـ) وتر ومماس (د) وتر وقطر

٥ أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى فيه ق (∠أ) = ٦٠° فإن ق (∠ حـ) = ...

(أ) ٦٠° (ب) ٣٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

٦ دائرتان م، ن متماستان من الداخل أنصاف أقطارهما ٥سم ، ٩سم فإن م ن = ... سم

(أ) ١٤ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٩

٢ (أ) فى الشكل المقابل:

$\overline{أب} = أ حـ$ ، $\overline{مء} \perp \overline{أب}$ ، $\overline{مهـ} \perp \overline{أحـ}$

أثبت أن: سء = صهـ

(ب) فى الشكل المقابل: أ ب حـ ء شكل رباعى فيه:

أب = أء، ق (∠أ ب ء) = ٣٠°

ق (∠حـ) = ٦٠°

أثبت أن الشكل: أ ب حـ ء رباعى دائرى.

---

٣ (أ) **اذكر** حالتين يكون فيهما الشكل الرباعى دائريًا.

(ب) فى الشكل المقابل:

$\overline{بحـ}$ مماس للدائرة عند ب،

هـ منتصف (ب و⌒) ، **أثبت أن:** أ ب حـ ء رباعى دائرى.

---

٤ (أ) فى الشكل المقابل:

المثلث أ ب حـ مرسوم خارج الدائرة م ، وتمس أضلاعه

$\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$ ، $\overline{أحـ}$ فى ء ، هـ ، و على الترتيب، فإذا كان

أء = ٥سم ، ب هـ = ٤سم ، حـ و = ٣سم،

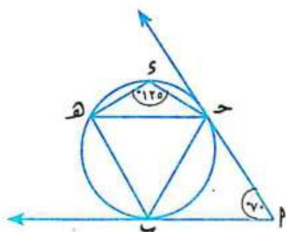
فأوجد: محيط المثلث أ ب حـ

(ب) فى الشكل المقابل:

$\overleftrightarrow{أو}$ مماس للدائرة عند أ ، $\overleftrightarrow{أو}$ // $\overline{ءهـ}$

برهن أن: الشكل ء هـ ب حـ رباعى دائرى.

٥ في الشكل المقابل:



$\overleftrightarrow{أب}$ ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ مماسان للدائرة عند ب ، حـ

ق (∠ أ) = ٧٠° ، ق (∠ حـ ء هـ) = ١٢٥°

أثبت أن: حـ ب = حـ هـ ، $\overleftrightarrow{أحـ}$ // $\overline{ب هـ}$

النموذج الثالث (لطلاب الدمج)

أجب عن جميع الأسئلة الآتية:

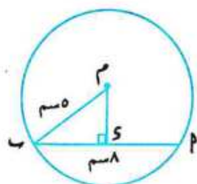
١ أكمل ما يأتي: (يسمح باستخدام الآلة الحاسبة)

١ أكبر الأوتار طولًا في الدائرة يسمى ....

٢ المستقيم المار بمركز الدائرة وبمنتصف أى وتر فيها يكون ....

٣ القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة .... في الطول.

٤ في الشكل المقابل:



طول $\overline{م ء}$ = ... سم

٥ يوجد للدائرة عدد .... من محاور التماثل.

٦ إذا كان $\overline{أحـ}$ قطرًا في الدائرة فإن ق ($\overset{\frown}{أحـ}$) = ...°

---

٢ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كانت النقطة أ ∈ للدائرة م التى طول قطرها ٦ سم، فإن م أ = ... سم

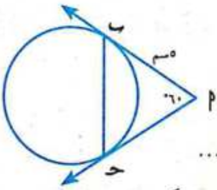
(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

٢ في الشكل المقابل: ق (∠ أ حـ ب) = ...°

(أ) ٤٠ (ب) ٨٠
(جـ) ٩٠ (د) ١٨٠

٣ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤



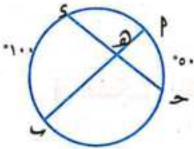
٤ فى الشكل المقابل: طول $\overline{\text{ب جـ}}$ = ... سم

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

٥ عدد الدوائر التى يمكن رسمها وتمر بطرفى القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$ يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) عددًا لا نهائيًا

٦ فى الشكل المقابل:



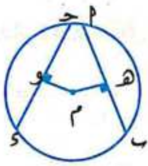
ق (∠ أ هـ جـ) = ...°

(أ) ٢٥ (ب) ٥٠ (جـ) ٧٥ (د) ١٠٠

٣ ضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة ، وعلامة (✗) أمام العبارة الخطأ:

١ م، ن دائرتان متماستان من الخارج، فإذا كان طولا نصفى قطريهما على الترتيب $نق_1$ = ٥سم، $نق_2$ = ٣سم، فإن م ن = ١٥ سم ( )

٢ فى الشكل المقابل: أ ب = جـ ء

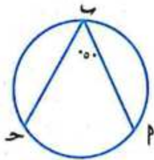


فإذا كان م هـ = ٣ سم ، فإن م و = ٣ سم ( )

٣ الشكل أ ب جـ ء يكون رباعيًا دائريًا إذا كان

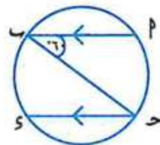
ق (∠ أ) + ق (∠ جـ) = ٩٠° ( )

٤ فى الشكل المقابل:



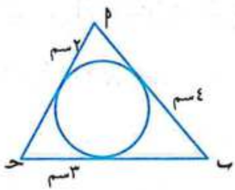
ق ($\overset{\frown}{\text{أ جـ}}$) = ١٠٠° ( )

٥ فى الشكل المقابل:



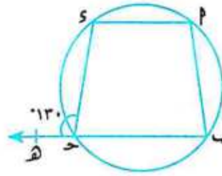
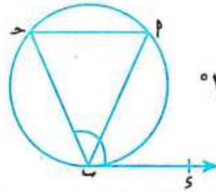
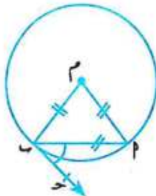
ق ($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) + ق ($\overset{\frown}{\text{جـ ء}}$) = ٣٠٠° ( )

٦ فى الشكل المقابل:



محيط Δ أ ب جـ = ٩سم ( )

٤ صل من العمود (أ) بما يناسبه من العمود (ب):

(أ)			(ب)
١ قياس الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة = ...	●	○	١٣٠°
٢ فى الشكل المقابل: ق(∠أ) = ... 	●	○	٩٠°
٣ فى الشكل المقابل: $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ مماس للدائرة عند ب، ق(∠ءبحـ) = ١٤٠° فإن ق(∠أ) = ... 	●	○	٣٠°
٤ طول نصف قطر الدائرة المارة برءوس مثلث قائم الزاوية طول وتره ١٠ سم يساوى .... سم	●	○	٥
٥ فى الشكل المقابل: Δ م أ ب متساوى الأضلاع، $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ مماس للدائرة عند ب فإن ق(∠أ ب حـ) = ... 	●	○	٤٠°
٦ النسبة بين قياسى الزاويتين المركزية والمحيطية المشتركتين فى نفس القوس فى دائرة واحدة هى	●	○	١:٢

امتحانات المحافظات على الهندسة المستوية ٢٠٢٤ /٢٠٢٥م

١ محافظة القاهرة

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان: أ ب حـ ء شكلًا رباعيًا دائريًا، فإن: ق(∠ أ) + ق(∠ حـ) − ١٢٠° = ...°

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ١٢٠ (د) ٢٤٠

٢ إذا كانت النقطة س تقع على الدائرة م ، م س = ٤ سم، فإن طول نصف قطر الدائرة م يساوى .... سم.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

٣ الزاويتان المتكاملتان المتساويتان فى القياس قياس كل منهما = ...°

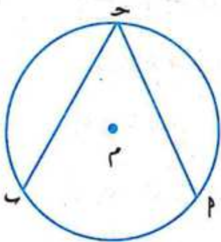
(أ) ٩٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٤٥ (د) ٣٠

٤ إذا كان: $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ وترين لدائرة، أ ب = ٥ سم ، أ حـ = ٣سم، فإن بُعد الوتر $\overline{أب}$ عن مركز الدائرة............ بُعد الوتر $\overline{أحـ}$ عن مركز الدائرة.

(أ) > (ب) ⩽ (جـ) = (د) <

٥ فى الشكل المقابل:

ق(∠ أ حـ ب) المحيطية المقابلة $\overset{\frown}{أب}$ الأصغر يمكن أن يساوى ....°



(أ) ١٠٠ (ب) ٩٥

(جـ) ٩٠ (د) ١٠

٦ إذا كان: أ ب = ١٠ سم، فإن محيط أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب يساوى .... سم.

(أ) ١٠ (ب) ٢٥ (جـ) ١٠π (د) ٢٥π

٧ قياس الزاوية المحيطية .... قياس القوس المقابل لها.

(أ) ضعف (ب) نصف (جـ) ثلث (د) يساوى

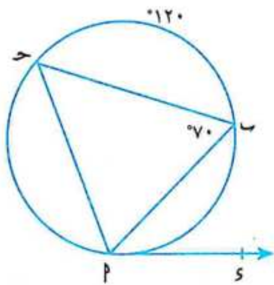
٨ مجموعة نقط الدائرة ∪ مجموعة النقط داخل الدائرة تسمى .... الدائرة.

(أ) محيط (ب) قطر (جـ) وتر (د) سطح

٩ فى المثلث أ ب حـ إذا كان: $(أحـ)^2 > (أب)^2 + (بحـ)^2$ فإن: ∠ ب تكون ....

(أ) قائمة (ب) منفرجة (جـ) حادة (د) مستقيمة

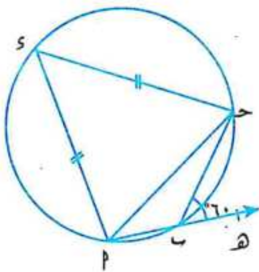
٢ أجب عن جميع الأسئلة الآتية موضحًا خطوات الحل:



١ فى الشكل المقابل:

$\overleftarrow{أ ء}$ مماس للدائرة عند أ ، ق(⌒حـ ب) = ١٢٠°

ق(∠ أ ب حـ) = ٧٠° ، أوجد: ق(∠ ب أ ء)



٢ فى الشكل المقابل:

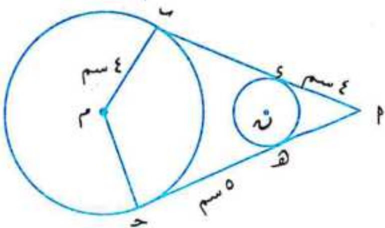
أ ب حـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة،

هـ ∈ $\overleftarrow{أ ب}$ ، ء حـ = ء أ ،

ق(∠ حـ ب هـ) = ٦٠° ،

أولًا: أوجد ق(∠ أ ء حـ)

ثانيًا: أثبت أن المثلث أ حـ ء متساوى الأضلاع.



٣ فى الشكل المقابل:

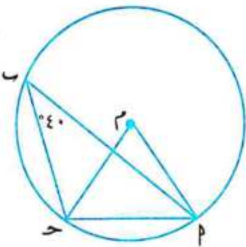
$\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ حـ}$ مماستان للدائرة ن عند ء ، هـ

، للدائرة م عند ب ، حـ ، هـ حـ = ٥سم

، أ ء = ب م = ٤سم

أوجد: **أولًا:** طول: $\overline{ء ب}$

ثانيًا: محيط الشكل الرباعى أ ب م حـ



٤ فى الشكل المقابل:

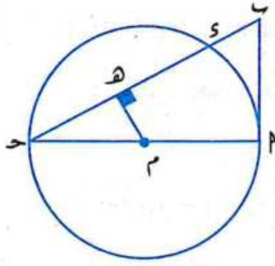
النقط أ ، ب ، حـ تقع على الدائرة م

ق(∠ أ ب حـ) = ٤٠°

أوجد: **أولًا:** ق(∠ أ م حـ)

ثانيًا: ق(∠ أ حـ م)

٥ في الشكل المقابل:



$\overline{\text{أ حـ}}$ قطر فى الدائرة م ، $\overline{\text{أ ب}}$ مماس لها عند أ ، $\overline{\text{ب حـ}}$

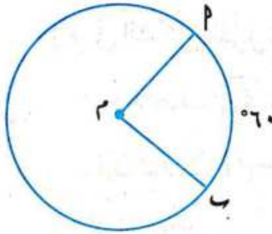
يقطع الدائرة فى ى ، $\overline{\text{هـ م}} \perp \overline{\text{ب حـ}}$،

أولًا: **أثبت** أن الشكل أ ب هـ م رباعى دائرى.

ثانيًا: إذا كان: ى حـ = ٧سم **فأوجد** طول $\overline{\text{ى هـ}}$

٦ م ، ن دائرتان طولا نصفى قطريهما على الترتيب ١٠ سم، ٥ سم، حدد وضع كل منهما بالنسبة للأخرى فى الحالتين الآتيتين: **أولًا:** م ن = ١٦ سم **ثانيًا:** م ن = ٢ سم

٧ في الشكل المقابل:



دائرة م طول نصف قطرها ٢١ سم، ق($\overset{\frown}{\text{أ ب}}$) = °٦٠

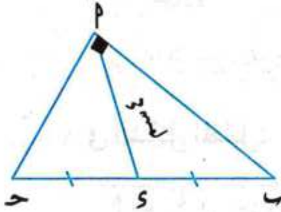
أوجد: **أولًا:** ق(∠ أ م ب)

ثانيًا: طول $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ (اعتبر $\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

٢ محافظة الجيزة

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ في الشكل المقابل:



Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى أ ، ى منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$،

حيث أ ى = ٤ سم، فإن ب حـ = ... سم.

(أ) ٤ (ب) ٦ (جـ) ٨ (د) ١٠

٢ قياس القوس الذى يمثل $\frac{١}{٣}$ قياس الدائرة = ... °

(أ) ٦٠ (ب) ٩٠ (جـ) ١٢٠ (د) ٢٤٠

٣ الزاوية التى قياسها °٥٠ تكمل زاوية قياسها .... °

(أ) ١٣٠ (ب) ٤٠ (جـ) ٣١٠ (د) ٦٠

٤ إذا كان أ ب حـ ى شكلًا رباعيًا دائريًا، فإن ق(∠ أ) + ق(∠ حـ) = °٨٠ + ... °

(أ) ١٨٠ (ب) ١٠٠ (جـ) ٩٠ (د) صفر

٥ دائرة م طول نصف قطرها ٨ سم تمس الدائرة ن من الداخل، فإذا كان م ن = ٣ سم، فإن طول نصف قطر الدائرة ن = ... سم.

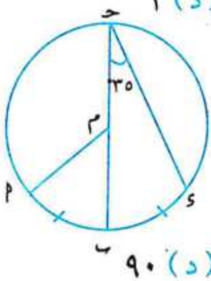
(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ١٣

٦ يمكن رسم دائرة تمر برءوس ....

(أ) معين (ب) مربع (جـ) متوازى أضلاع (د) شبه منحرف

٧ إذا كان المستقيم ل مماسًا للدائرة م عند أ بحيث كان: م أ = (٢ س + ٣) سم، طول قطر الدائرة = ١٤ سم، فإن س = ... سم.

(أ) ٥ (ب) ٣ (جـ) ١ (د) ٢



٨ فى الشكل المقابل:

ب منتصف $\overset{\frown}{أ ء}$ ، ق($\angle$ ب حـ ء) = ٣٥°

فإن ق($\angle$ أ م ب) = ... °

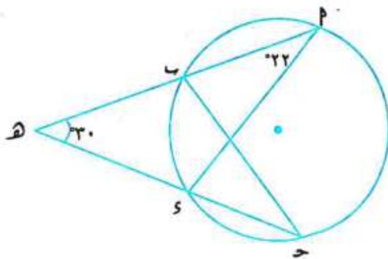
(أ) ٣٥ (ب) ٧٠ (جـ) ١٤٠ (د) ٩٠

٩ الزاوية المحيطية التى تقابل قوسًا أكبر فى الدائرة تكون ....

(أ) حادة (ب) قائمة (جـ) منفرجة (د) منعكسة

---

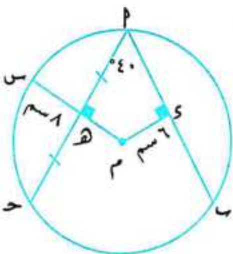
٢ أجب عن الأسئلة الآتية:



١ فى الشكل المقابل:

$\overleftrightarrow{أ ب} \cap \overleftrightarrow{حـ ء}$ = {هـ} ، ق($\angle$ هـ أ ء) = ٢٢°

ق($\angle$ أ هـ حـ) = ٣٠° ، أوجد: ق($\overset{\frown}{أ حـ}$)



٢ فى الشكل المقابل:

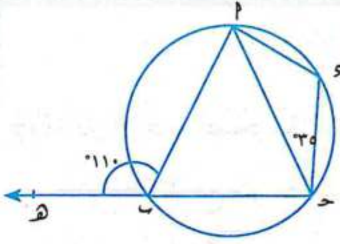
$\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ حـ}$ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م،

$\overline{م ء} \perp \overline{أ ب}$، هـ منتصف $\overline{أ حـ}$ فإذا كان م ء = ٦ سم،

هـ س = ٨ سم ، ق($\angle$ حـ أ ب) = ٤٠°

١) أوجد: ق($\angle$ هـ م ء) ٢) أوجد محيط الدائرة م (حيث $\pi \simeq \frac{٢٢}{٧}$)

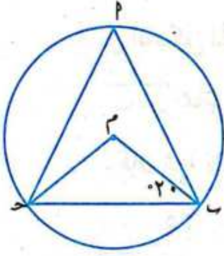
٣ فى الشكل المقابل:



هـ ∈ $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ ، ق(∠ أ ب هـ) = ١١٠°

ق(∠ أ حـ ء) = ٣٥° ، **أثبت أن:** ق($\overset{\frown}{\text{أ ء}}$) = ق($\overset{\frown}{\text{حـ ء}}$)

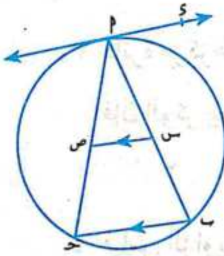
٤ فى الشكل المقابل:



Δ أ ب حـ مرسوم داخل الدائرة م،

ق(∠ م ب حـ) = ٢٠° **أوجد:** ق (∠ ب أ حـ)

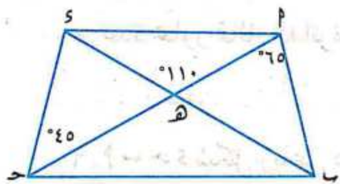
٥ فى الشكل المقابل:



$\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ مماس للدائرة م عند أ ، $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{\text{أ ء}}$ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، س ، ص

٦ فى الشكل المقابل:

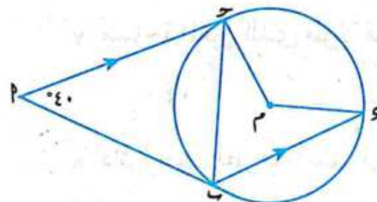


أ ب حـ ء شكل رباعى تقاطع قطراه فى هـ ،

ق(∠ أ حـ ء) = ٤٥°، ق(∠ أ هـ ء) = ١١٠°

ق(∠ ب أ حـ) = ٦٥° ، **أثبت أن:** أ ب حـ ء رباعى دائرى.

٧ فى الشكل المقابل:



$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ مماستان للدائرة م ،

ق(∠ ب أ حـ) = ٤٠°، $\overline{\text{أ حـ}}$ // $\overline{\text{ب ء}}$

١) **أثبت أن:** $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ينصف(∠ أ ب ء) ٢) **أوجد:** ق(∠ حـ م ء)

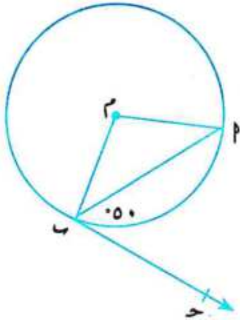
٣ محافظة الإسكندرية

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلًّا منها بنسبة .... من جهة الرأس.

(أ) ٢ : ٤ (ب) ٢ : ٤ (جـ) ١ : ٣ (د) ٣ : ١

٢ فى الشكل المقابل:



$\overleftarrow{بحـ}$ مماس للدائرة م، ق(∠ أ ب حـ) = ٥٠°

، فإن ق(∠ أ م ب) = ... °

(أ) ٢٥ (ب) ٥٠

(جـ) ٩٠ (د) ١٠٠

٣ دائرة مركزها م رسم فيها وتر طوله ١٦ سم ومحيط الدائرة ٢٠ π سم،

فإن الوتر يبعد عن مركزها .... سم.

(أ) ٢ (ب) ٦ (جـ) ١٠ (د) ٣٦

٤ قياس الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة = ...°

(أ) ١٨٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ٩٠ (د) ٤٥

٥ عدد محاور تماثل الدائرة ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى

٦ أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى فيه ق(∠ أ) = ٨٠°، فإن ق(∠ حـ) = ...°

(أ) ١٠٠ (ب) ١٨٠ (جـ) ٩٠ (د) ٨٠

٧ مساحة المعين الذى طولا قطريه ٦ سم، ٨سم تساوى ....سم^٢

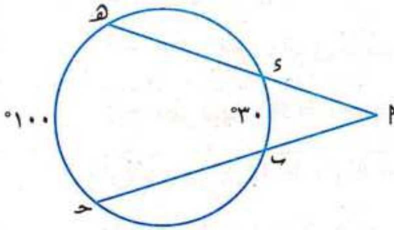
(أ) ١٤ (ب) ١٠ (جـ) ٢٤ (د) ٤٨

٨ دائرة طول قطرها ٨سم، فإذا كان المستقيم ل يبعد عن مركزها ٣سم،

فإن المستقيم ل يكون ....للدائرة.

(أ) مماسًّا (ب) قاطعًا (جـ) خارجًا (د) محورًا

[٩] فى الشكل المقابل:



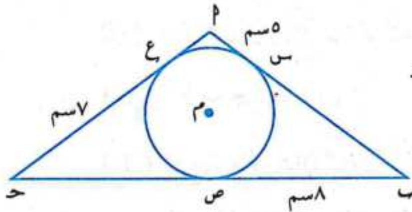
إذا كان ق(⌒هـ حـ) = ١٠٠°

، ق(⌒ء ب) = ٣٠° ، فإن ق(∠ أ) = ...°

(أ) ٣٥ (ب) ٦٥

(جـ) ٧٠ (د) ١٣٠

[٢] أجب عن الأسئلة الآتية:



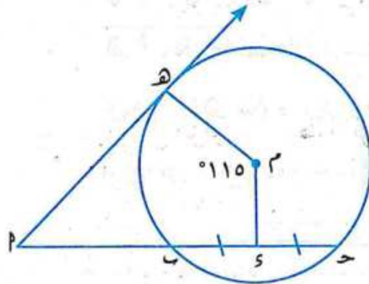
[١] فى الشكل المقابل: الدائرة م دائرة داخلة للمثلث أ ب حـ

تمس أضلاعه $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{حـ أ}}$

فى س، ص ، ع على الترتيب،

أ س = ٥سم، ب ص = ٨سم، حـ ع = ٧سم ، **أوجد** محيط المثلث أ ب حـ

[٢] فى الشكل المقابل:



دائرة مركزها م،

ق(∠ ء م هـ) = ١١٥°

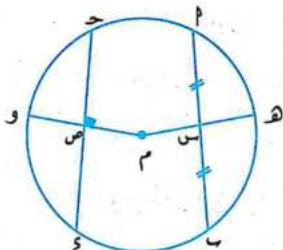
، ء منتصف $\overline{\text{حـ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ مماس للدائرة عند هـ

أوجد بالبرهان: ق(∠ هـ أ ء)

[٣] دائرة طول نصف قطرها ٢١سم، **أوجد** طول القوس المرسوم فيها، والذى قياسه يساوى

$\frac{٣}{٤}$ قياس الدائرة (حيث $\pi = \frac{٢٢}{٧}$).

[٤] فى الشكل المقابل:

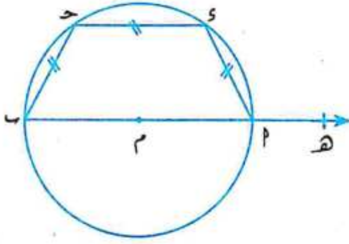


$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{حـ ء}}$ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م

س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{حـ ء}}$

أثبت أن: س هـ = ص و

٥ في الشكل المقابل:



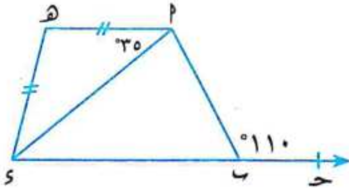
أ ب حـ ء رباعى دائرى مرسوم داخل الدائرة م ،

$\overline{أب}$ قطر فيها، أ ء = ء حـ = حـ ب

أولًا: برهن أن $\overline{ءحـ}$ // $\overline{أب}$

ثانيًا: أوجد ق(∠ هـ أ ء)

٦ في الشكل المقابل:



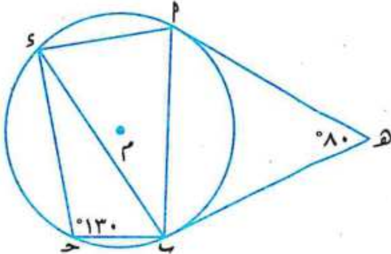
هـ أ = هـ ء ، ق(∠ ء أ هـ) = ٣٥° ،

ق(∠ أ ب حـ) = ١١٠°

(أ) أوجد بالبرهان ق(∠ هـ)

(ب) أثبت أن الشكل أ ب ء هـ رباعى دائرى.

٧ في الشكل المقابل:



$\overline{هـ أ}$ ، $\overline{هـ ب}$ قطعتان مماستان للدائرة م عند أ ، ب

ق(∠ أ هـ ب) = ٨٠° ، ق(∠ ء حـ ب) = ١٣٠°

أولًا: أثبت أن: ب أ = ب ء

ثانيًا: أثبت أن: $\overleftarrow{أب}$ ينصف (∠ هـ أ ء)

٤ محافظة القليوبية

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ أقل عدد من الزوايا الحادة في مثلث هو ....

(أ) صفر　　(ب) ١　　(جـ) ٢　　(د) ٣

٢ إذا كان أ ب حـ مثلثًا قائم الزاوية في ب ، ء منتصف $\overline{أحـ}$ ، ب ء = ٤ سم، فإن أ حـ = ... سم.

(أ) ٤　　(ب) ٦　　(جـ) ٨　　(د) ١٦

٣ أ نقطة داخل الدائرة م التى طول قطرها ٦ سم، فإن م أ ∈ ....

(أ) [٠ ، ٣]　　(ب)]٠ ، ٣[　　(جـ) [٠ ، ٣[　　(د) [٠ ، ٦[

٤ م ، ں دائرتان متماستان من الداخل طولا نصفى قطريهما ٣سم، ٨سم على الترتيب، فإن م ں = ... سم.

(أ) ٣ (ب) ٥ (جـ) ٨ (د) ١١

٥ أصغر دائرة يمكن رسمها تمر بالنقطتين أ ، ب حيث أ ب = ١٦سم يكون طول نصف قطرها = ... سم.

(أ) ٢ (ب) ٤ (جـ) ٨ (د) ١٦

٦ أطول وتر فى الدائرة هو ....

(أ) القطر (ب) المماس

(جـ) نصف القطر (د) العمودى على القطر

٧ فى الشكل المقابل:

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م ، ق(∠ أ ب حـ) = ٤٥°،

فإن ق($\overset{\frown}{\text{حـ ب}}$) = ... °

(أ) ٤٥ (ب) ٥٠

(جـ) ٩٠ (د) ١٠٠

٨ قياس الزاوية المركزية يساوى .... قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى نفس القوس.

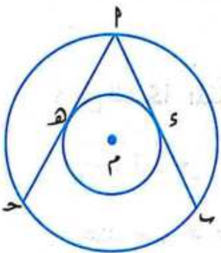
(أ) ربع (ب) نصف (جـ) ضعف (د) ثلاثة أضعاف

٩ أى المضلعات الآتية يمثل شكلًا رباعيًا دائريًا؟

(أ) متوازى الأضلاع (ب) شبه المنحرف (جـ) المعين (د) المربع

---

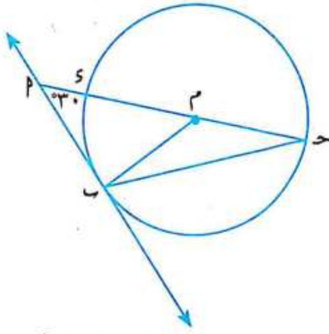
٢ أجب عن الأسئلة الآتية:



١ فى الشكل المقابل:

دائرتان متحدتا المركز فى م ، $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ وتران فى الدائرة الكبرى يمسان الدائرة الصغرى فى ء ، هـ على الترتيب،

أثبت أن: أ ب = أ حـ

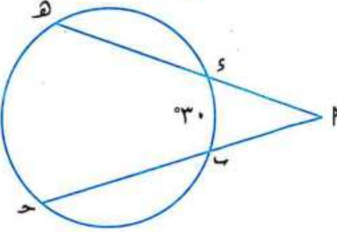


٢ في الشكل المقابل:

$\overleftrightarrow{ءب}$ مماس للدائرة م عند ب ، ء ∈ $\overleftrightarrow{جـم}$ ،

ق(∠ ب ء م) = ٣٠° ،

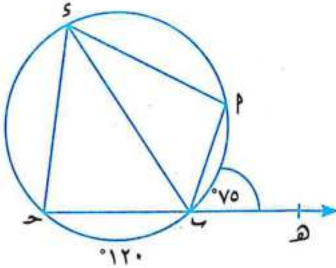
أوجد ق(∠ ب جـ ء)



٣ في الشكل المقابل:

ق($\overset{\frown}{جـ هـ}$) = ١٢٠° ، ق($\overset{\frown}{ب د}$) = ٣٠° ،

أوجد: ق(∠ ء)

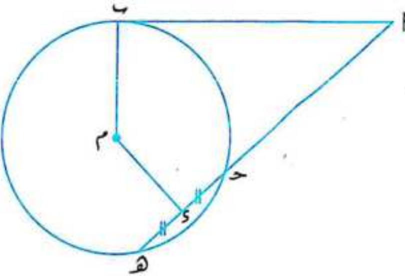


٤ في الشكل المقابل:

د هـ ∈ $\overleftrightarrow{جـ ب}$ حيث ق(∠ ء ب هـ) = ٧٥°

، ق($\overset{\frown}{ب جـ}$) = ١٢٠° ،

أوجد: ق(∠ ء د ب)

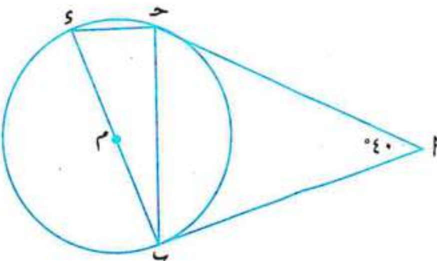


٥ في الشكل المقابل:

$\overline{ءب}$ قطعة مماسة للدائرة م عند ب ،

د منتصف $\overline{جـ هـ}$

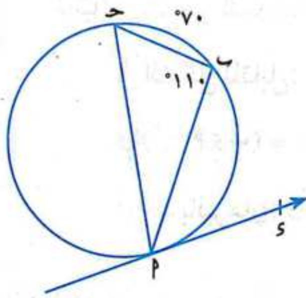
أثبت أن الشكل ء ب م د رباعى دائرى.



٦ في الشكل المقابل:

$\overline{ب د}$ قطر فى الدائرة م، $\overline{ءب}$ ، $\overline{ءجـ}$ مماسان للدائرة عند ب ، جـ على الترتيب.

ق(∠ ء) = ٤٠° ، أوجد: ق(∠ جـ ب د)



٧ في الشكل المقابل:

$\overleftarrow{ٵء}$ مماس للدائرة عند ٵ، ق($\overset{\frown}{ٵب}$) = ١١٠°

، ق($\overset{\frown}{بحـ}$) = ٧٠°،

أوجد: ق(∠ بٵء)

٥ محافظة المنوفية

١ أولًا: اختر الإجابة الصحيحة:

١ مربع طول قطره ١٠ سم فإن: مساحة سطحه تساوى .... سم^{٢}.

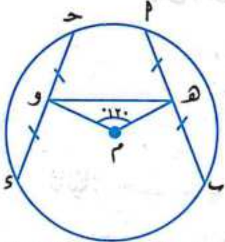
(ا) ١٠٠ (ب) ٢٥ (جـ) ٥٠ (د) ٢٠

٢ إذا كان ٵ ب حـ ء شكلًا رباعيًا دائريًا، فإن: ق(∠ ٵ) + ق(∠ حـ) − ٥٠° = ... °.

(ا) ١٨٠ (ب) ١٣٠ (جـ) ١٥٠ (د) ١٠٠

٣ Δ ٵ ب حـ قائم الزاوية، فيه طولا ضلعى القائمة ٦ سم، ٨سم، فإن مساحة الدائرة المارة برءوس Δ ٵ ب حـ = ... π سم^{٢}.

(ا) ٣٦ (ب) ٦٤ (جـ) ٢٥ (د) ١٠٠



ثانيًا: أجب عما يأتى: في الشكل المقابل:

ٵ ب = حـ ء، هـ ، و منتصفا $\overline{ٵب}$ ، $\overline{حـء}$ على الترتيب،

ق(∠ هـ م و) = ١٢٠°،

أوجد بالبرهان: ق(∠ هـ و م)

---

٢ أولًا: اختر الإجابة الصحيحة:

١ الأعداد ٥ ، ٤ ، .... تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث.

(ا) ٨ (ب) ١٢ (جـ) ١٠ (د) ٩

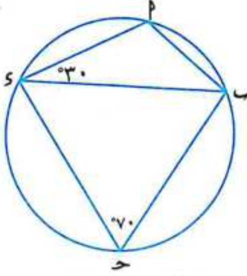
٢ إذا كانت: م دائرة طول قطرها ٧سم، ٵ نقطة فى مستواها وكان مٵ = ٤سم، فإن النقطة ٵ تقع ....

(ا) خارج الدائرة (ب) على الدائرة (جـ) داخل الدائرة (د) على مركز الدائرة

٣ قياس الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة تساوى ....°

(ا) ١٢٠ (ب) ١٨٠ (جـ) ١٠٨ (د) ٩٠

ثانيًا: أجب عن السؤال التالى:



فى الشكل المقابل: ء ب حـ ء شكل رباعى دائرى

ق(∠ ء ء ب) = ٣٠°، ق(∠ حـ) = ٧٠°

أوجد **بالبرهان:** ق(∠ ء ب ء)

---

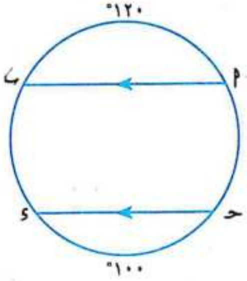
٣ أولًا: اختر الإجابة الصحيحة:

[١] دائرتان طولا نصفى قطريهما ٣سم، ٧سم تكونان متماستين إذا كان البعد بين مركزيهما ∈ ....

(أ)]٤ ، ١٠[(ب)]١٠ ، ∞[(جـ)]٠ ، ٤[(د) {٤ ، ١٠}

[٢] وتر طوله ٦ سم فى دائرة طول نصف قطرها ٥ سم، فإنه يبعد عن مركزها .... سم.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦



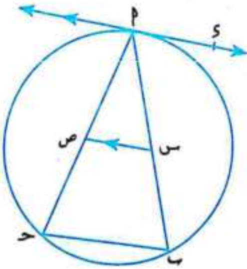
[٣] **فى الشكل المقابل:**

إذا كان: $\overline{ء ب}$ // $\overline{حـ ء}$، ق($\overset{\frown}{ء ب}$) = ١٢٠°

، ق($\overset{\frown}{حـ ء}$) = ١٠٠°، فإن: ق($\overset{\frown}{ء حـ}$) = ...°

(أ) ٥٠ (ب) ٦٠

(جـ) ٧٠ (د) ١٤٠



ثانيًا: أجب عما يأتى: **فى الشكل المقابل:**

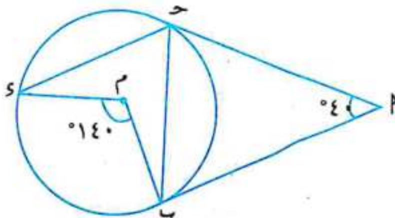
ء ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة،

إذا كان $\overleftrightarrow{ء ء}$ مماسًّا للدائرة عند ء، س ∈ $\overline{ء ب}$، ص ∈ $\overline{ء حـ}$،

وكان $\overline{ء ء}$ // $\overline{س ص}$، فأثبت أن: س ص حـ ب رباعى دائرى.

---

٤ (أ) فى الشكل المقابل:



$\overline{ء ب}$ ، $\overline{ء حـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م ،

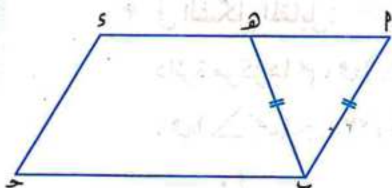
ق(∠ ء) = ٤٠°، ق(∠ ب م ء) = ١٤٠°

أثبت أن: $\overline{ء ب}$ // $\overline{حـ ء}$

(ب) فى الشكل المقابل: ٯ ٮ حـ ء متوازى أضلاع

فيه ٯ ٮ = ٮ هـ ،

أثبت أن: الشكل هـ ٮ حـ ء رباعى دائرى.



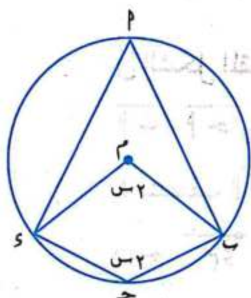
٥ (ا) فى الشكل المقابل:

$\overline{ٯٮ}$ ، $\overline{ٯء}$ وتران فى الدائرة م ، حـ ∈ (ٮء) ،

ق(∠ ٮ حـ ء) = ق (∠ ٮ م ء) = ٢ س

أوجد بالبرهان:

ق (∠ ٯ) بالدرجات.



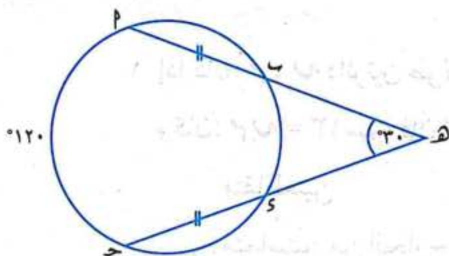
(ب) فى الشكل المقابل:

ٯ ٮ = حـ ء ، ق (∠ هـ) = ٣٠°

ق (ٯ حـ) = ١٢٠°

أوجد بالبرهان: (١) ق (ٮ ء)

(٢) ق (ٯ ٮ)



٦ محافظة الدقهلية

١ (ا) اختر الإجابة الصحيحة:

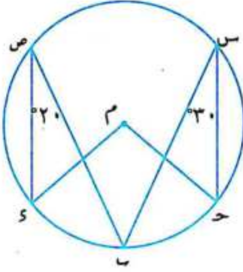
١ المماسان المرسومان من نهايتى قطر فى دائرة ....

(ا) متوازيان (ب) متقاطعان

(جـ) متعامدان (د) متساويان فى الطول

٢ الشكل الرباعى الذى يمكن رسم دائرة تمر برءوسه هو ....

(ا) المعين (ب) شبه المنحرف (جـ) المستطيل (د) متوازى الأضلاع



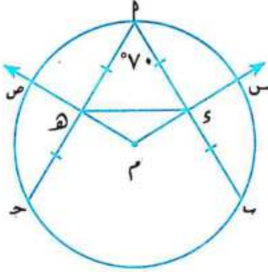
٣ فى الشكل المقابل:

دائرة مركزها م ، ق(∠ س) = ٣٠°

، ق(∠ ص) = ٢٠° ، فإن ق(∠ حـ م ء) = ... °

(أ) ٤٠ (ب) ٥٠

(جـ) ٦٠ (د) ١٠٠



(ب) فى الشكل المقابل:

أب ، أحـ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة م ،

ء منتصف أب ، هـ منتصف أحـ،

رسم م ء ، م هـ فقطعا الدائرة فى س ، ص على الترتيب.

(١) أوجد: ق(∠ ء م هـ) (٢) أثبت أن: ء س = هـ ص

---

٢ (أ) اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان: م ، ن دائرتين طولا نصفى قطريهما ٨سم، ٥سم على الترتيب،

وكان: م ن = ١٣سم، فإن الدائرتين م ، ن تكونان ....

(أ) متقاطعتين (ب) متماستين من الداخل

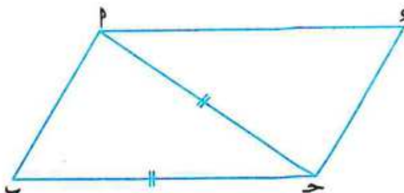
(جـ) متماستين من الخارج (د) متباعدتين

٢ إذا كانت: أ ، ب نقطتين تنتميان للدائرة م، وكان: ق(⌒أب) = ٤٥°، فإن: ظا(∠ أ م ب)= ....

(أ) ١ (ب) $\frac{\sqrt{٢}}{٢}$ (جـ) $\sqrt{٣}$ (د) $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

٣ دائرة مركزها نقطة الأصل وطول نصف قطرها ٥ وحدات طول، أى النقط التالية لا تنتمى للدائرة؟

(أ) (-٥ ، ٠) (ب) (٠ ، ٥) (جـ) (٥ ، ٠) (د) (٥ ، ٥)



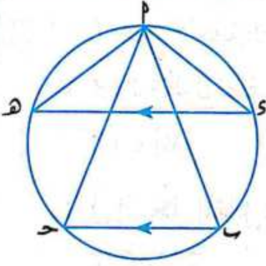
(ب) فى الشكل المقابل:

أ ب حـ ء متوازى أضلاع فيه: أ حـ = ب حـ

أثبت أن:

أب مماسة للدائرة المارة برءوس المثلث أ حـ ء

٣ (أ) فى الشكل المقابل:

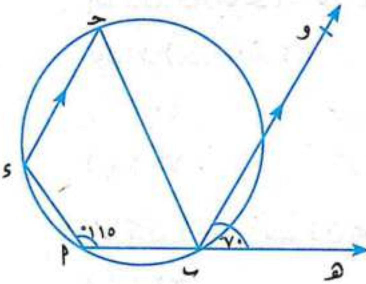


أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة،

$\overline{ء هـ} // \overline{ب حـ}$

أثبت أن: ق(∠ ء أ حـ) = ق(∠ هـ أ ب)

(ب) فى الشكل المقابل:



أ ب حـ ء شكل رباعى مرسوم داخل دائرة،

فيه: ق(∠ أ) = ١١٥°، هـ ∈ $\overleftrightarrow{أ ب}$

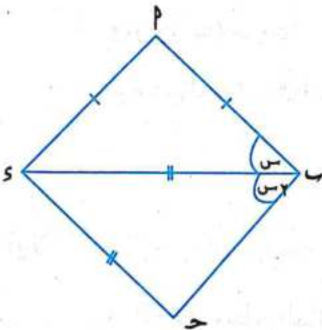
، $\overleftrightarrow{ب و} // \overleftrightarrow{ء حـ}$

فإذا كان: ق(∠ هـ ب و) = ٧٠°

فأوجد بالبرهان: ق(∠ ء)

---

٤ (أ) فى الشكل المقابل:



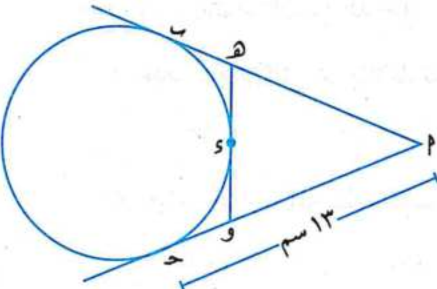
أ ب = أ ء، ء ب = ء حـ

ق(∠ أ ب ء) = (س)°،

ق(∠ ء ب حـ) = (٢ س)°

أثبت أن: الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى.

(ب) فى الشكل المقابل:



$\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ حـ}$ قطعتان مماستان للدائرة عند

ب ، حـ على الترتيب، $\overline{هـ و}$ مماسة للدائرة عند ء

فإذا كان: أ حـ = ١٣ سم،

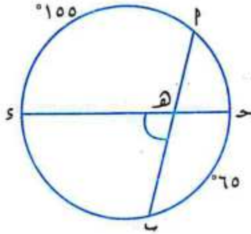
فاحسب محيط Δ أ هـ و

٥ (أ) اختر الإجابة الصحيحة:

١ م دائرة طول نصف قطرها ٧سم، وكانت أ نقطة فى مستويها تقع خارج الدائرة م، فإن: م أ ∈ ....

(أ) {٧}　　(ب) [٠ ، ٧[　　(جـ)]٧ ، ∞[　　(د)]١٤ ، ∞[

٢ فى الشكل المقابل:



أ ب ، حـ ء وتران فى دائرة متقاطعان فى هـ ،

إذا كان: ق(ب حـ) = ٦٥°، ق(أ ء) = ١٥٥°

فإن: ق(∠ ب هـ ء)= .... °

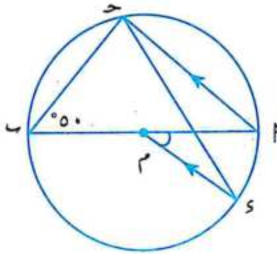
(أ) ٤٠　　(ب) ٥٠

(جـ) ٧٠　　(د) ١١٠

٣ إذا كان أ ب = ٦سم فإن محيط أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ ، ب يساوى .... سم.

(أ) ٣ π　　(ب) ٦ π　　(جـ) ٩ π　　(د) ١٢ π

(ب) فى الشكل المقابل:



أ ب قطر فى الدائرة م ، أ حـ // ء م،

ق(∠ ب) = ٥٠°

أوجد بالبرهان: ق(∠ أ حـ ء)

٧ محافظة بورسعيد

أولًا: اختر الإجابة الصحيحة:

١ إذا كان سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = {أ} فإن الدائرتين م ، ن ....

(أ) متباعدتان　　(ب) متقاطعتان

(جـ) متماستان من الداخل　　(د) متماستان من الخارج

٢ عدد الدوائر التى تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة هو ....

(أ) ١　　(ب) صفر　　(جـ) ٢　　(د) عدد لا نهائى

٣ قياس الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة = ...°

(أ) ٦٠　　(ب) ٩٠　　(جـ) ١٢٠　　(د) ١٨٠

٤ إذا كان ﻫ ب حـ ء مربعًا مرسومًا داخل دائرة فإن ق(⌒ﻫ ب) = ...°

(ا) ١٨٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ٩٠ (د) ٦٠

٥ دائرة طول قطرها ٨سم يكون محيطها = ...سم.

(ا) ٤ π (ب) ٨ π (جـ) ٢ π (د) π

٦ عدد محاور تماثل الدائرة هو ....

(ا) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى

٧ إذا كانت ﻫ تقع على الدائرة م التى طول قطرها ٦ سم، فإن: ﻫ م = ... سم.

(ا) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

٨ فى الشكل الرباعى الدائرى كل زاويتين متقابلتين ....

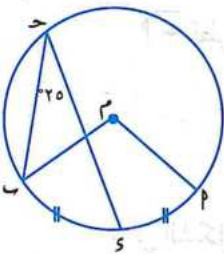
(ا) متساويتان فى القياس (ب) متكاملتان

(جـ) متتامتان (د) متبادلتان

٩ عدد الزوايا الحادة فى أى مثلث لا يقل عن ....

(ا) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

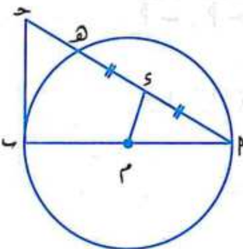
ثانيًا: أجب عن الأسئلة الآتية:



١ فى الشكل المقابل:

ق(∠ ء حـ ب) = ٢٥°، ق(⌒ﻫ ء) = ق(⌒ء ب)

أوجد: ق(∠ ﻫ م ب)

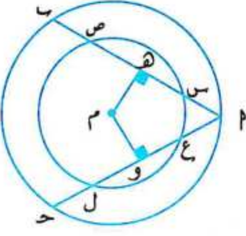


٢ فى الشكل المقابل:

ء منتصف $\overline{ﻫ هـ}$ ، $\overline{ﻫ ب}$ قطر

$\overline{ب حـ}$ قطعة مماسة للدائرة م

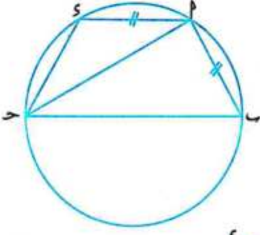
أثبت أن: الشكل م ب حـ ء رباعى دائرى.



٣ فى الشكل المقابل:

س ص = ع ل

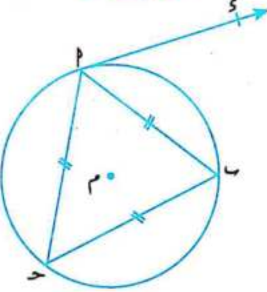
أثبت أن: أ ب = أ حـ



٤ فى الشكل المقابل:

أ ب = أ ء

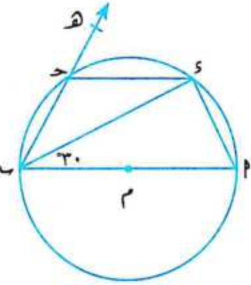
أثبت أن: ق(∠ أ حـ ب) = ق(∠ أ حـ ء)



٥ فى الشكل المقابل:

Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع، ق(∠ ب أ ء) = ٦٠°

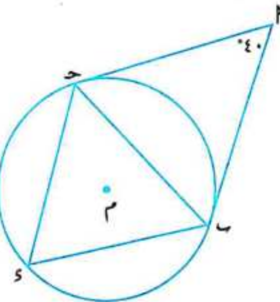
أثبت أن: $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ مماس للدائرة م



٦ فى الشكل المقابل:

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م ، ق(∠ أ ب ء) = ٣٠°

أوجد: ق(∠ ء حـ هـ)



٧ فى الشكل المقابل:

$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ حـ}}$ قطعتان مماستان للدائرة م ،

ق(∠ أ) = ٤٠°

أوجد: ق(∠ ب ء حـ)

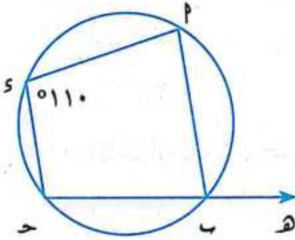
٨ محافظة شمال سيناء

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ قياس الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة يساوى ....

(أ) ٣٠° (ب) ٤٥° (جـ) ٦٠° (د) ٩٠°

٢ فى الشكل المقابل:



أ ب جـ ء شكل رباعى دائرى، ق(∠ أ ء جـ) = ١١٠°،

فإن ق (∠ أ ب هـ) = ...

(أ) ٥٥° (ب) ٧٠°

(جـ) ١١٠° (د) ١٨٠°

٣ الزاوية التى قياسها ٤٠° تكمل الزاوية التى قياسها ....

(أ) ٥٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٤٠° (د) ٢٧٠°

٤ المماسان المرسومان من نهايتى قطر فى الدائرة ....

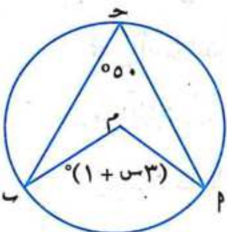
(أ) متساويان فى الطول (ب) متوازيان

(جـ) متقاطعان (د) متعامدان

٥ إذا كان المستقيم ل مماسًا للدائرة التى طول قطرها ١٠ سم، فإنه يبعد عن مركزها بمقدار .... سم.

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ١٠ (د) ١٥

٦ فى الشكل المقابل:



الدائرة م، ق(∠ جـ) = ٧٠°، ق(∠ أ م ب) = (٣س + ١)°

فإن قيمة س = ...

(أ) ١١ (ب) ٢٤

(جـ) ٣٣ (د) ٤٥

٧ فى الشكل المقابل:

دائرة م، فيها ق($\angle$ أ) = ٤٠°، $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{أ حـ}}$

م س = م ص أوجد: ق($\angle$ حـ) = ...

(أ) ٤٠°　　(ب) ٦٠°

(جـ) ٧٠°　　(د) ١٤٠°

٨ إذا كانت م، ن دائرتين متماستين من الخارج، طولا نصفى قطريهما ٥سم، ٣سم، فإن م ن = ... سم.

(أ) ٢　　(ب) ٣　　(جـ) ٦　　(د) ٨

٩ الأعداد ٤ ، ٦ ، س يمكن أن تكون أضلاع مثلث إذا كانت إحدى قيم س تساوى ....

(أ) ١　　(ب) ٢　　(جـ) ٧　　(د) ١٠

٢ الأسئلة المقالية:

١ فى الشكل المقابل:

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م، $\overline{\text{هـ ء}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

(أ) أثبت أن: هـ ء ب حـ شكل رباعى دائرى.

(ب) أثبت أن: ق($\angle$ أ هـ ء) = $\frac{1}{2}$ ق ($\overset{\frown}{\text{أ حـ}}$)

٢ فى الشكل المقابل: م دائرة

ق ($\overset{\frown}{\text{ص حـ}}$) = ١٠٠°، ق($\angle$ أ) = ٣٥°

أوجد مع البرهان: ق ($\overset{\frown}{\text{ب س}}$)

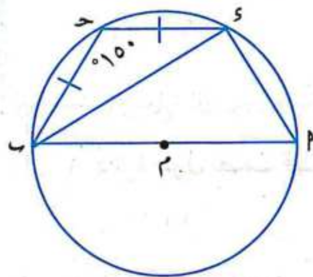
٣ فى الشكل المقابل: $\triangle$ أ ب حـ مرسوم خارج دائرة م

تمس أضلاعه $\overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{ب حـ}}$، $\overline{\text{أ حـ}}$ فى ء، هـ، و

على الترتيب، أ ء = ٣ سم، ب هـ = ٢ سم، حـ و = ٤ سم

أوجد محيط $\triangle$ أ ب حـ

٤ فى الشكل المقابل:



ا ب حـ ء شكل رباعى دائرى

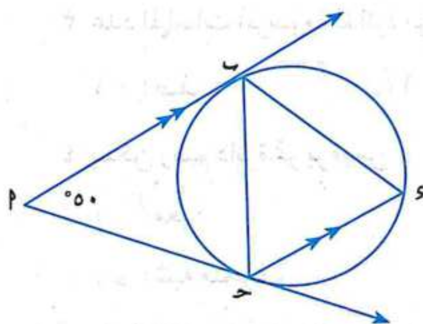
$\overline{ا ب}$ قطر فى الدائرة م ، حـ ء = حـ ب

ق(∠ ء حـ ب) = ١٥٠°

أوجد: (١) ق(∠ ا)

(ب) ق(∠ ا ء حـ)

٥ فى الشكل المقابل:



$\overleftrightarrow{ا ب}$ ، $\overleftrightarrow{ا حـ}$ مماسان للدائرة

عند ب ، حـ ، $\overline{ا ب}$ // $\overline{حـ ء}$

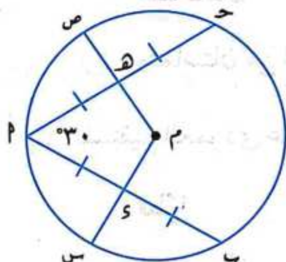
ق(∠ ا) = ٥٠°

(١) أوجد ق(∠ ب ء حـ)

(ب) أثبت أن $\overline{ب ء}$ مماسة للدائرة المارة برءوس

المثلث ا ب حـ

٦ فى الشكل المقابل: دائرة مركزها م ،



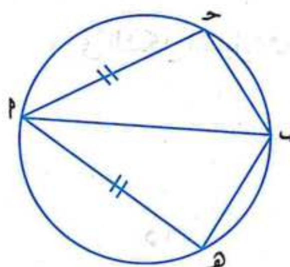
ا ب = ا حـ ، ء منتصف $\overline{ا ب}$ ،

هـ منتصف $\overline{ا حـ}$ ، ق(∠ ب ا حـ) = ٣٠°

(١) احسب ق(∠ س م ص)

(ب) أثبت أن ء س = هـ ص

٧ فى الشكل المقابل:



ا هـ = ا حـ ، ب ∈ ($\overset{\frown}{هـ حـ}$) ،

أثبت أن: $\overrightarrow{ب ا}$ ينُصف ∠ حـ ب هـ

٩ محافظة الوادى الجديد

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ دائرة طول نصف قطرها ٥سم، فإن مساحتها = ... سم^{٢}.

(ا) ١٠ (ب) ٢٥ (جـ) ١٠π (د) ٢٥π

٢ الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة ....

(ا) حادة (ب) قائمة (جـ) منفرجة (د) مستقيمة

٣ عدد المماسات المرسومة لدائرة من نقطة خارج الدائرة هو ....

(ا) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لانهائى

٤ يمكن رسم دائرة تمر برءوس ....

(ا) معين (ب) مستطيل

(جـ) شبه منحرف (د) متوازى أضلاع

٥ دائرتان م ، ن طولا نصفى قطريهما ٩سم، ٤سم، على الترتيب، فإذا كان م ن = ١٠ سم، فإن الدائرتين ....

(ا) متقاطعتان (ب) متباعدتان

(جـ) متماستان من الداخل (د) متماستان من الخارج

٦ المستقيم العمودى على أى وتر فى الدائرة من منتصفه يكون .... لها.

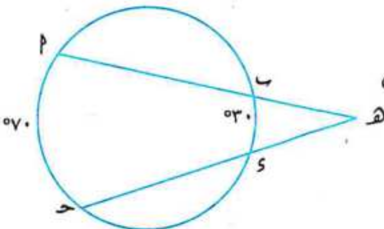
(ا) قطرًا (ب) وترًا (جـ) مماسًا (د) محور تماثل

---

٢ الأسئلة المقالية:

١ فى الشكل المقابل: ق ($\overset{\frown}{ب ء}$) = ٣٠°، ق ($\overset{\frown}{أ حـ}$) = ٧٠°،

فإن ق(∠ هـ) = ...°

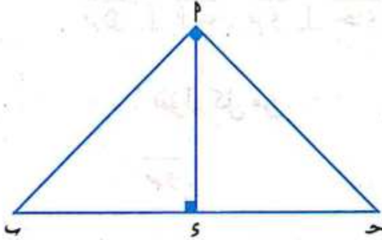


(ا) ١٥ (ب) ٢٠ (جـ) ٣٥ (د) ٥٠

٢ إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٧سم، المستقيم ل مماس لها عند أ ،

فإذا كان م أ = (٣س − ٥)سم ، فإن س = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤



٣ فى الشكل المقابل: △ أ ب حـ فيه $\overline{أء} \perp \overline{ب حـ}$ ،

ق(∠ حـ أ ب) = ٩٠° ، فإذا (أ ء)^2 = ...

(أ) ء ب × ء حـ (ب) ب ء × ب حـ

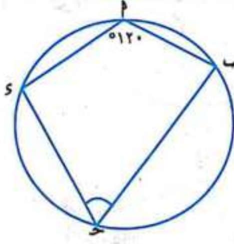
(جـ) حـ ء × حـ ب (د) أ ب × أ حـ

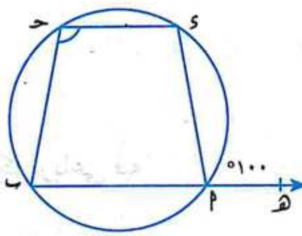
---

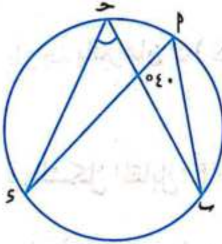
٣ الأسئلة المقالية:

١ أوجد ق(∠ حـ) فى كل من الأشكال التالية:

ق(∠ أ) = ١٢٠° ، ق(∠ هـ أ ء) = ١٠٠° ، ق(∠ أ) = ٤٠°







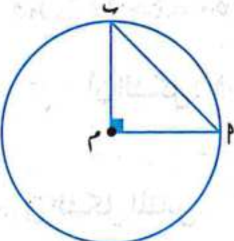
ق(∠ حـ) = ... ، ق(∠ حـ) = ... ، ق(∠ حـ) = ...

٢ فى الشكل المقابل:

م دائرة طول نصف قطرها ٧ سم، ق(∠ أ م ب) = ٩٠° ،

أوجد: أولًا: ق ($\overset{\frown}{أ ب}$)

ثانيـًا: طـول ($\overset{\frown}{أ ب}$) (علمًا بأن $\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

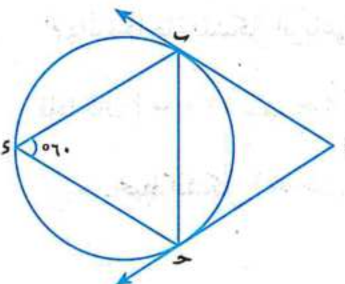


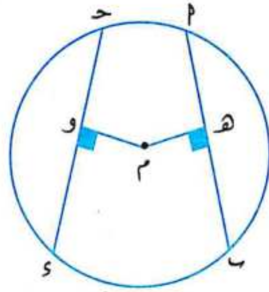
٣ فى الشكل المقابل: $\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{أ حـ}$ ،

مماسان للدائرة م عند ب ، حـ على الترتيب

ق(∠ ب ء حـ) = ٦٠° ،

أثبت أن المثلث أ ب حـ متساوى الأضلاع.





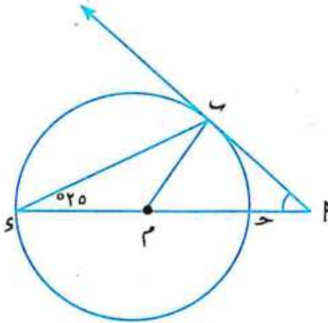
٤ فى الشكل المقابل:

م دائرة فيها ٯ ٮ = حـ ء ،

$\overline{مهـ} \perp \overline{ٯٮ}$ ، $\overline{مو} \perp \overline{حـء}$ ، م هـ = ٦سم، ٯ ٮ = ١٦سم

أوجد طول كل من:

(أ) $\overline{مو}$ (ب) $\overline{حـو}$ (جـ) $\overline{حـم}$

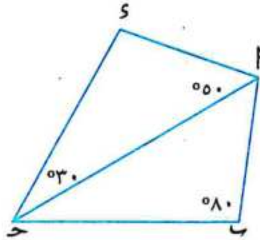


٥ فى الشكل المقابل:

ٯ نقطة خارج الدائرة م ،

$\overleftarrow{ٯٮ}$ ، مماس للدائرة عند ٮ ، ق(∠ ٯ ء ٮ) = °٢٥

أوجد بالبرهان ق(∠ ٯ)

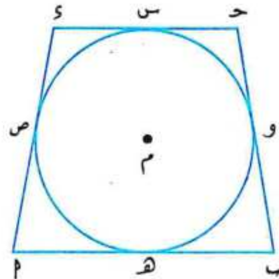


٦ فى الشكل المقابل: ٯ ٮ حـ ء شكل رباعى فيه

ق(∠ ٮ) = °٨٠، ق(∠ ٯ حـ ء) = °٣٠

ق(∠ ء ٯ حـ) = °٥٠

أثبت أن الشكل: ٯ ٮ حـ ء رباعى دائرى.



٧ فى الشكل المقابل:

م دائرة داخلة للشكل الرباعى ٯ ٮ حـ ء،

فإذا كان ٯ ٮ = ١٢سم، حـ ء = ٩سم ،

فأوجد محيط الشكل ٯ ٮ حـ ء.

١٠ محافظة الفيوم

١ (أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة فى كل مما يأتى:

١ دائرة م طول قطرها ١٠سم، $\overline{أب}$ وتر فيها طوله ٨سم، فإن بُعد الوتر $\overline{أب}$ عن مركز الدائرة = ... سم.

(أ) ٣　　(ب) ٤　　(جـ) ٥　　(د) ٨

٢ أ ب جـ د شكل رباعى دائرى فيه: ق(∠ أ) = ٣ ق(∠ جـ)،

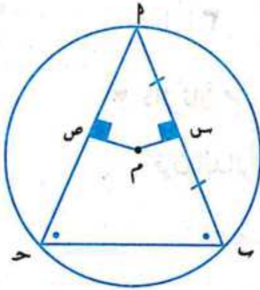
فإن: ق(∠ أ) = ... °

(أ) ٤٥　　(ب) ٦٠　　(جـ) ١٢٠　　(د) ١٣٥

٣ الزاوية المحيطية المرسومة فى ربع دائرة تكون ....

(أ) حادة　　(ب) قائمة　　(جـ) منفرجة　　(د) مستقيمة

(ب) فى الشكل المقابل:



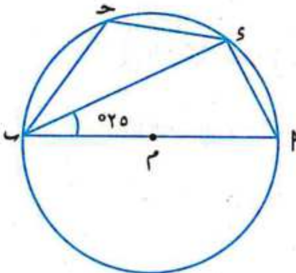
أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة م

فيه ق(∠ ب) = ق(∠ جـ) ، س منتصف $\overline{أب}$

$\overline{مص}$ ⊥ $\overline{أجـ}$ أثبت أن: م س = م ص

---

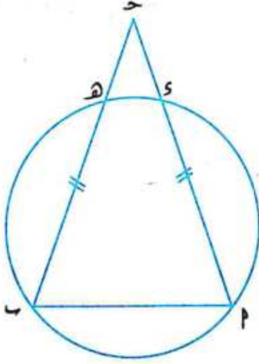
٢ (أ) فى الشكل المقابل:



$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م ، ق(∠ د ب أ) = ٢٥°

أوجد: ق(∠ جـ)

(ب) فى الشكل المقابل:



ٲ ء ، ب هـ وتران متساويان فى الطول فى الدائرة

، $\overleftrightarrow{ٲء} \cap \overleftrightarrow{بهـ} = \{حـ\}$

أثبت أن: حـ ء = حـ هـ

---

٣ (ا) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة فى كل مما يأتى:

١ سـ ص ع مثلث قائم الزاوية فى ص ، فإن مركز الدائرة الخارجة للمثلث يقع فى منتصف ....

(ا) $\overline{سـ ص}$ (ب) $\overline{ص ع}$ (جـ) $\overline{سـ ع}$ (د) المثلث

٢ مثلث متساوى الساقين أطوال أضلاعه ٣سم، سـسم، ٧سم: فإن سـ = ... سم.

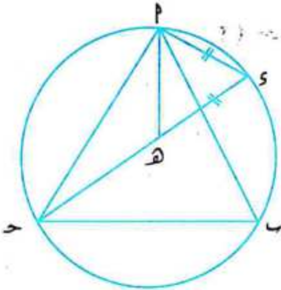
(ا) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٧

٣ دائرتان م ، ں طولا نصفى قطريهما ٩سم، ٤سم، وكان م ں = ١٣سم ، فإن الدائرتين تكونان ....

(ا) متماستين من الخارج (ب) متماستين من الداخل

(جـ) متقاطعتين (د) متباعدتين

(ب) فى الشكل المقابل:



Δ ٲ ب حـ متساوى الأضلاع، ٲ ء = ء هـ

أثبت أن: Δ ٲ ء هـ متساوى الأضلاع.

٤ (أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة فى كل مما يأتى:

١ قياس القوس الذى يمثل ثُلث قياس الدائرة = ...°.

(أ) ٣٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٩٠ (د) ١٢٠

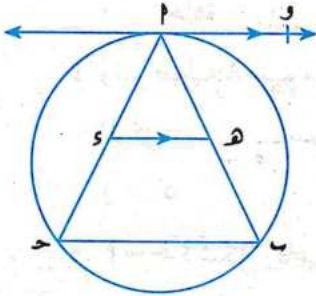
٢ مساحة سطح المربع الذى طول ضلعه ٦ سم .... مساحة سطح المربع الذى طول قطره ٨سم.

(أ) < (ب) > (جـ) = (د) ⩽

٣ النسبة بين قياس الزاوية المركزية إلى قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى نفس القوس كنسبة ....

(أ) ٢ : ١ (ب) ١ : ٢ (جـ) ١ : ١ (د) ١ : ٣

(ب) فى الشكل المقابل:



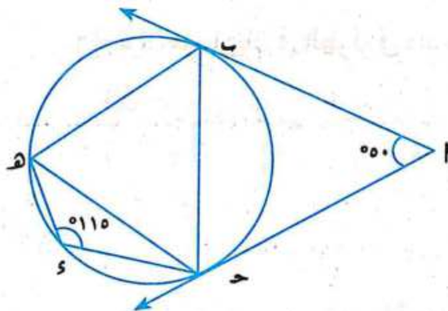
$\overleftrightarrow{\text{أ و}}$ مماس للدائرة عند أ

، $\overleftrightarrow{\text{أ و}}$ // $\overline{\text{هـ ء}}$

برهن أن: الشكل ء هـ ب جـ رباعى دائرى.

---

٥ (أ) فى الشكل المقابل:



$\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ مماسان للدائرة عند ب ، جـ

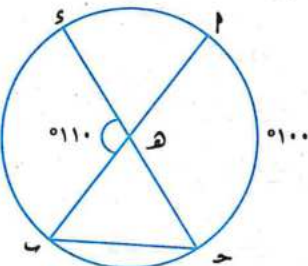
ق(∠ أ) = ٥٠°، ق(∠ جـ ء هـ) = ١١٥°

أثبت أن: ١) $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ينصف (∠ أ ب هـ)

٢) جـ ب = جـ هـ

٣) $\overline{\text{أ جـ}}$ // $\overline{\text{ب هـ}}$

(ب) فى الشكل المقابل:



ق(∠ ء هـ ب) = ١١٠°، ق($\widehat{\text{أ جـ}}$) = ١٠٠°

أوجد: ق(∠ ء جـ ب)

١١ محافظة بنى سويف

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ عدد أقطار المربع = ...

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٢ إذا كان م ، ن دائرتين متباعدتين طولا نصفى قطريهما $نق_1$ ، $نق_2$ فإن ....

(أ) م ن = صفر (ب) م ن < ($نق_1$ + $نق_2$)

(جـ) م ن = $نق_1$ + $نق_2$ (د) م ن > ($نق_1$ + $نق_2$)

٣ الزاوية المحيطية التى تقابل قوسًا أصغر فى الدائرة تكون ....

(أ) حادة (ب) قائمة (جـ) منفرجة (د) منعكسة

٤ وتر طوله ٨ سم مرسوم داخل دائرة طول قطرها ١٠ سم، فإن بُعد هذا الوتر عن المركز = ...سم.

(أ) ٥ (ب) ٤ (جـ) ٣ (د) ٢

٥ أ ب جـ د شكل رباعى دائرى، ق(∠ أ) = ٢ ق(∠ جـ) ، فإن ق(∠ جـ) = ...°.

(أ) ٤٥ (ب) ٦٠ (جـ) ١٢٠ (د) ١٣٥

٦ وتران متساويان فى الطول فى دائرة بعداهما عن المركز ٥سم ، (٣س − ١) سم ، فإن س = ...

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

---

٢ (أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ فى △ أ ب جـ إذا كان $\frac{(أب)^2 + (ب جـ)^2}{(أ جـ)^2} = ١$ ، فإن زاوية ب تكون ....

(أ) حادة (ب) قائمة (جـ) منفرجة (د) مستقيمة

٢ إذا كان طول $\overline{أب}$ = ٦ سم، فإن عدد الدوائر التى طول نصف قطر كل منها ٥سم، وتمر بالنقطتين أ ، ب يساوى ....

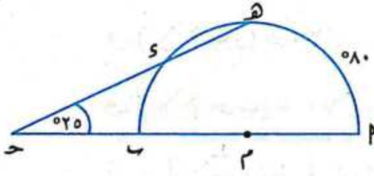
(أ) صفرًا (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عددًا لانهائيًّا

٣ في الشكل المقابل: $\overline{أب}$ ، قطر في الدائرة م ،

$\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{هـ ء} = \{ح\}$ ،

ق(∠ ح) = ٢٥° ، ق($\widehat{أهـ}$) = ٨٠°

فإن ق ($\widehat{هـ ء}$) = ...°



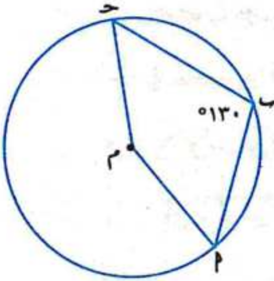
(أ) ٥٠ (ب) ٦٠ (جـ) ٧٠ (د) ٨٠

(ب) في الشكل المقابل:

دائرة مركزها م ،

ق(∠ أ ب ح) = ١٣٠°

أوجد: ق (∠ أ م ح)



---

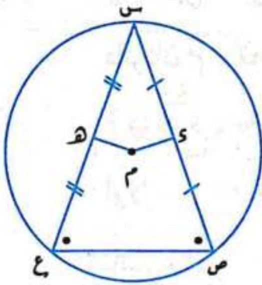
٣ (أ) في الشكل المقابل:

△ س ص ع مرسوم داخل الدائرة م ،

ء منتصف $\overline{س ص}$ ، هـ منتصف $\overline{س ع}$ ،

ق(∠ ص) = ق(∠ ع)

أثبت أن: م ء = م هـ



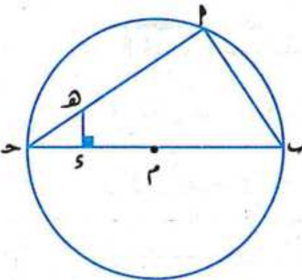
(ب) في الشكل المقابل:

$\overline{ب ح}$ قطر في الدائرة م ،

$\overline{هـ ء} \perp \overline{ب ح}$ ،

أثبت أن: ١) الشكل أ ب ء هـ رباعي دائري.

٢) ق(∠ ء هـ ح) = $\frac{1}{2}$ ق($\widehat{أ ح}$)



٤ (أ) فى الشكل المقابل:

ق(∠ أ ب ء) = ٢٠°،

ق(∠ أ حـ ب) = ٧٠°،

أثبت أن: $\overline{\text{ب ء}}$ قطر فى الدائرة.

(ب) فى الشكل المقابل:

Δ س ص ع قائم الزاوية فى س ،

س ع = ٥سم، ص ع = ١٠سم ،

ق(∠ و س ص) = ٦٠°

أثبت أن: $\overleftrightarrow{\text{و س}}$ مماس للدائرة المارة برءوس Δ س ص ع .

---

٥ (أ) فى الشكل المقابل:

دائرتان م ، ن متقاطعتان فى أ ، ب

أ ∈ $\overline{\text{هـ ء}}$ ، ب ∈ $\overline{\text{و حـ}}$ ، ق(∠ حـ) = ٧٠°

أولًا: أوجد ق(∠ و)

ثانيًا: أثبت أن: $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ // $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$

(ب) فى الشكل المقابل:

$\overleftarrow{\text{أ ء}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ هـ}}$ مماسان للدائرة

فى حـ ، ب : ق(∠ ء حـ و) = ٦٠° ،

ق(∠ هـ ب و) = ٧٠°

أوجد بالبرهان: ١) ق(∠ و)

٢) ق(∠ أ)

١٢ محافظة المنيا

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ المستقيمان الموازيان لثالث ....

(أ) متعامدان (ب) متوازيان (جـ) متقاطعان (د) متخالفان

٢ م دائرة نصف قطرها نق سم، فإن نصف محيط الدائرة = ... سم.

(أ) ٢ π نق (ب) $\frac{1}{4}$ π نق (جـ) $\frac{1}{2}$ π نق (د) π نق

٣ م دائرة طول قطرها ٦ سم، أ ∈ $\overleftrightarrow{ل}$ حيث $\overline{مأ}$ ⊥ $\overleftrightarrow{ل}$ ، فإذا كان م أ = ٣سم، فإن المستقيم ل يكون .... للدائرة.

(أ) مماسًا (ب) قاطعًا (جـ) خارجًا (د) قطرًا

٤ عدد محاور التماثل للدائرة ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى

٥ إذا كانت $\overline{أب}$ قطعة مستقيمة طولها ٤سم، فإن طول نصف قطر أصغر دائرة تمر بالنقطتين أ، ب = ... سم.

(أ) ٢ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) ٥

٦ م ، ن دائرتان متقاطعتان، وطولا نصفى قطريهما ٣سم، ٥سم، فإن م ن ∈ ....

(أ)]٠ ، ٢[(ب)]٢ ، ٨[(جـ)]٨ ، ∞[(د)]٣ ، ∞[

---

٢ (أ) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ قياس الزاوية المحيطية يساوى .... قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس.

(أ) ضعف (ب) ثلث (جـ) نصف (د) ربع

٢ أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى، فإذا كان ق(∠ أ): ق(∠ حـ) = ١ : ٢،

فإن ق(∠ أ) = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

٣ في الشكل المقابل:

$\overline{أب} // \overline{حـ ء}$ ، ق $(\overset{\frown}{أ حـ}) = ٥٠°$ ،

ق $(\angle$ ب هـ ء$) = (٣س - ٥٠)°$

فإن س = ...

(أ) ٥٠° (ب) ١٥° (جـ) ١٠° (د) ٤٥°

(ب) أجب عن السؤال الآتى:

في الشكل المقابل:

$\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ وتران في الدائرة م

$\overline{مس} \perp \overline{أب}$ ، ص منتصف $\overline{أحـ}$ ،

ق $(\angle$ أ ب حـ$) = ٧٥°$ ،

م س = م ص ، أوجد ق $(\angle$ ب أ حـ$)$

---

٣ (أ) في الشكل المقابل:

أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة م ،

ق $(\angle$ أ$) = ٥٠°$ ، أوجد:

١) ق $(\angle$ ب م حـ$)$

٢) ق $(\angle$ م ب حـ$)$

(ب) أوجد قياس القوس الذى يمثل $\frac{٣}{٥}$ قياس الدائرة، وإذا كان طول نصف قطر الدائرة ٧سم، فأوجد طول هذا القوس. $(\pi = \frac{٢٢}{٧})$

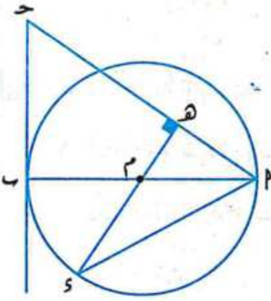
٤ (أ) فى الشكل المقابل:

$\overline{أ ب}$ قطر فى الدائرة م ، $\overleftrightarrow{حـ ب}$ مماس للدائرة عند ب

، $\overline{م هـ} \perp \overline{أ حـ}$ أثبت أن:

١) الشكل هـ م ب حـ رباعى دائرى.

٢) ق(∠ حـ) = ٢ق(∠ ء أ ب)



(ب) فى الشكل المقابل:

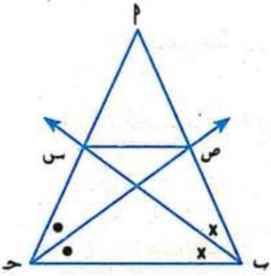
أ ب حـ مثلث فيه أ ب = أ حـ ،

، $\overrightarrow{ب س}$ ينصف (∠ أ ب حـ)، ويقطع $\overline{أ حـ}$ فى س

، $\overrightarrow{حـ ص}$ ينصف (∠ أ حـ ب)

ويقطع $\overline{أ ب}$ فى ص

أثبت أن: الشكل ب حـ س ص رباعى دائرى.



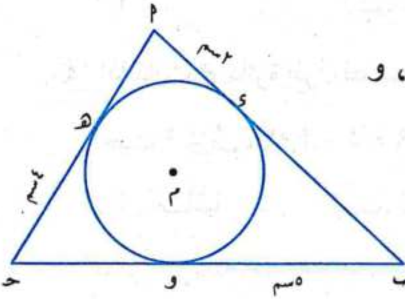
٥ (أ) فى الشكل المقابل:

Δ أ ب حـ يمس الدائرة م من الخارج فى النقط ء ، هـ ، و

بحيث أ ء = ٢سم ،

ب و = ٥سم، حـ هـ = ٤سم ،

أوجد محيط المثلث أ ب حـ



(ب) فى الشكل المقابل:

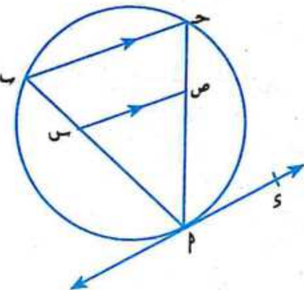
أ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة

، $\overleftrightarrow{أ ء}$ مماس للدائرة عند أ

س ∈ $\overline{أ ب}$ ، ص ∈ $\overline{أ حـ}$

بحيث $\overline{س ص}$ // $\overline{ب حـ}$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{أ ء}$ مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، س ، ص



١٣ محافظة أسيوط

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ ﻫ ب حـ ء شكل رباعى دائرى، ﻫ ∈ $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$ ، ق(∠ ﻫ) = ١٠٠°،

فإن ق(∠ ء حـ ﻫ) = ...°.

(أ) ٨٠ (ب) ١٨٠ (جـ) ١٠٠ (د) ٩٠

٢ ﻫ ب حـ مثلث فيه (ﻫ ب)^{٢} = (ﻫ حـ)^{٢} − (ب حـ)^{٢} ، فإن (∠ ب) تكون ....

(أ) منفرجة (ب) حادة (جـ) مستقيمة (د) قائمة

٣ إذا كانت م ، ن دائرتين، طولا نصفى قطريهما ٣سم، ٤سم، م ن = ٥سم ، فإن الدائرتين تكونان ....

(أ) متباعدتين (ب) متقاطعتين (جـ) متماستين (د) متداخلتين

٤ وتر طوله ٨ سم فى دائرة طول نصف قطرها ٥سم، فإنه يبعد عن مركزها .... سم.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ١٠

٥ إذا كانت م دائرة طول نصف قطرها ٧سم، ل مستقيم فى مستواها، $\overline{\text{م ﻫ}}$ ⊥ ل ،

حيث ﻫ ∈ ل ، ٢م ﻫ − ٥ = ٩ ، فإن ل يكون .... للدائرة.

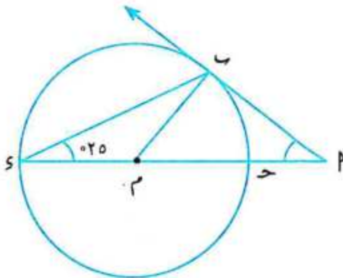
(أ) مماسًا (ب) قاطعًا (جـ) خارجًا (د) قطرًا

٦ قوس من دائرة قياسه ١٠٨°، طول نصف قطر الدائرة يساوى ٥سم، فإن طول هذا القوس يساوى .... سم.

(أ) ٢ π (ب) ٣ π (جـ) ٥ π (د) ١٠ π

---

٢ (أ) فى الشكل المقابل:



ﻫ نقطة خارج الدائرة م ، $\overleftarrow{\text{ﻫ ب}}$ مماس للدائرة عند ب ،

رسم $\overleftarrow{\text{ﻫ م}}$ فقطع الدائرة م عند حـ ، ء على الترتيب،

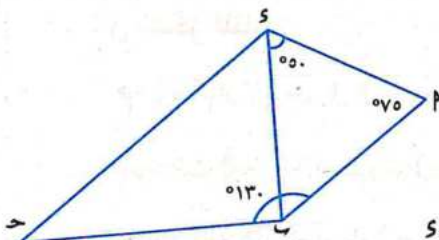
ق(∠ ب ء حـ) = ٢٥° ، أوجد بالبرهان: ق(∠ ﻫ)

(ب) ﺃ ب ﺣ ﺀ شكل رباعى فيه ، ق(∠ ﺃ ﺀ ب) = ٥٠°

ق(∠ ﺃ) = ٧٥°،

ق(∠ ﺃ ب ﺣ) = ١٣٠°،

أثبت أن: ب ﺣ مماسة للدائرة المارة بالنقطة ﺃ ، ب ، ﺀ

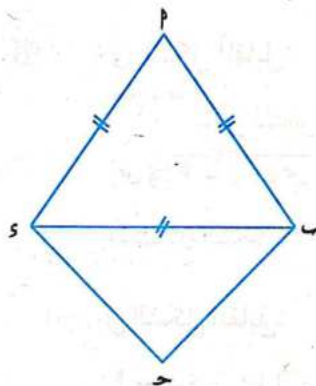


٣ (ا) فى الشكل المقابل:

ﺃ ب ﺣ ﺀ شكل رباعى دائرى ،

Δ ﺃ ب ﺀ متساوى الأضلاع

أوجد بالبرهان: ق(∠ ﺣ)



(ب) فى الشكل المقابل:

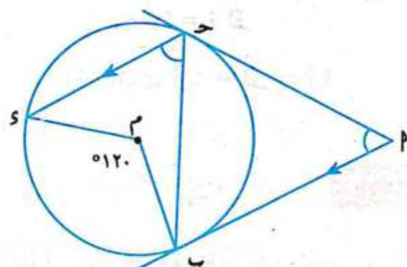
ﺃ ب ، ﺃ ﺣ قطعتان مماستان للدائرة م،

ﺃ ب // ﺣ ﺀ،

ق(∠ ب م ﺀ) = ١٢٠°

١) أوجد بالبرهان: ق(∠ ب ﺣ ﺀ)

٢) ق(∠ ﺃ)



٤ (ا) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ عدد الدوائر التى تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة يساوى ....

(ا) صفرًا (ب) ١ (جـ) ٢ (د) ٣

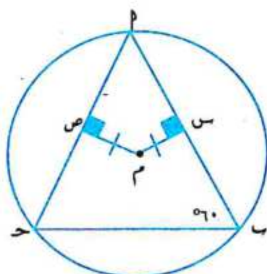
٢ عدد أقطار الشكل الرباعى يساوى ....

(ا) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٣ ﺃ ب ﺣ ﺀ مربع مرسوم داخل دائرة، فإن ق(⌒ ﺃ ب) = ...° .

(ا) ٤٥ (ب) ٩٠ (جـ) ١٨٠ (د) ٣٦٠

(ب) فى الشكل المقابل:



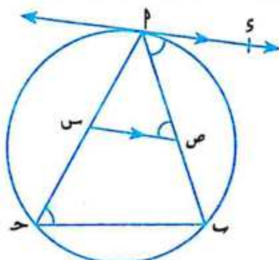
م س = م ص ، $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{ٵ ب}}$ ، $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{ٵ حـ}}$ ،

فإن كانت ٵ ب = ١١ سم، ق($\angle$ ب) = ٦٠°،

فأوجد بالبرهان محيط Δ ٵ ب حـ

---

٥ (ا) فى الشكل المقابل:

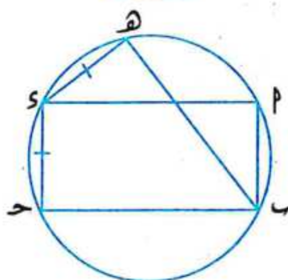


$\overleftrightarrow{\text{ٵ ء}}$ مماس للدائرة عند ٵ ، س $\in \overline{\text{ٵ حـ}}$ ،

ص $\in \overline{\text{ٵ ب}}$ ، $\overline{\text{س ص}} \parallel \overline{\text{ٵ ء}}$

أثبت أن الشكل: س حـ ب ص رباعى دائرى.

(ب) فى الشكل المقابل:



ٵ ب حـ ء مستطيل مرسوم داخل دائرة

، حـ ء = ء هـ

أثبت أن: ب هـ = ٵ ء

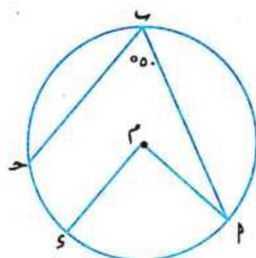
١٤ محافظة قنا

١ (ا) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ عدد محاور التماثل لنصف الدائرة هو ....

(ا) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لا نهائى

٢ فى الشكل المقابل:



ق($\angle$ ٵ م ء) .... ١٠٠°.

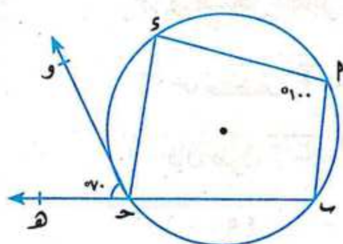
(ا) $<$ (ب) $>$

(جـ) $=$ (د) $\leqslant$

٣ قياس الزاوية الخارجة عن المثلث المتساوى الأضلاع = ...

(ا) ٦٠° (ب) ٨٠° (جـ) ٩٠° (د) ١٢٠°

(ب) فى الشكل المقابل:



م ب حـ ء شكل رباعى دائرى، ق(∠م) = ١٠٠°

، هـ ∈ $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$، $\overleftarrow{\text{حـ و}}$ مماس للدائرة عند حـ

، ق(∠هـ حـ و) = ٧٠°

أوجد: (∠ء حـ و)

---

٢ (ا) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ إذا كان م ب حـ ء رباعيًا دائريًا، وكانت (∠ء) قائمة، فإن (∠ب) تكون ....

(ا) حادة (ب) قائمة (جـ) منفرجة (د) مستقيمة

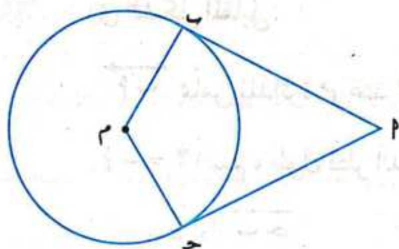
٢ إذا كان المثلث م ب حـ قائم الزاوية فى ب وكان م ب = ٨سم، ب حـ = ٦سم، فإن طول قطر الدائرة المارة برءوس المثلث م ب حـ = ... سم.

(ا) ١٠ (ب) ٨ (جـ) ٦ (د) ٥

٣ الزاوية المحيطية المرسومة فى ثلث دائرة تكون ....

(ا) حادة (ب) قائمة (جـ) منفرجة (د) مستقيمة

(ب) فى الشكل المقابل:



$\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م حـ}}$ مماسان للدائرة م

عند ب ، حـ

برهن أن: م ب م حـ شكل رباعى دائرى.

---

٣ (ا) اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ معين طول ضلعه ٧سم، فإن محيطه .... سم.

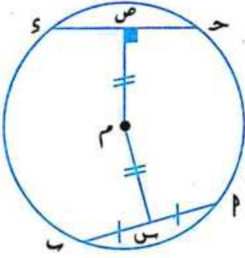
(ا) ١٤ (ب) ٢٨ (جـ) ٤٩ (د) ٧٠

٢ إذا كان سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ن = {م} فإن الدائرتين م، ن تكونان ....

(ا) متباعدتين (ب) متقاطعتين

(جـ) متماستين من الخارج (د) متماستين من الداخل

٣ فى الشكل المقابل:



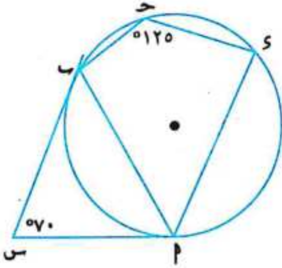
س منتصف $\overline{أب}$ ، $\overline{مص} \perp \overline{حـء}$ ، فإذا كان ص ء = ٧ سم،

فإن طول $\overline{أب}$ = ... سم.

(أ) ٤٩ (ب) ١٤

(جـ) ٧ (د) ٣,٥

(ب) فى الشكل المقابل:



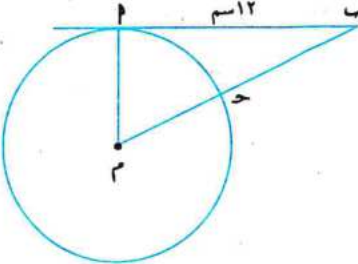
$\overleftarrow{سأ}$ ، $\overleftarrow{سب}$ مماسان للدائرة عند أ ، ب

، أ ب حـ ء رباعى دائرى فيه:

ق(∠ ب حـ ء) = °١٢٥

أثبت أن: $\overline{أء}$ // $\overline{سب}$

٤ (أ) فى الشكل المقابل:

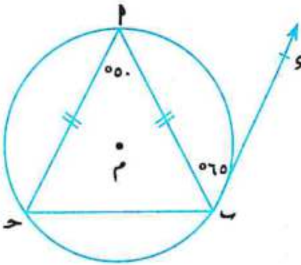


$\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة م عند أ ،

أ ب = ١٢سم ، طول قطر الدائرة م = ١٠سم،

أوجد طول: $\overline{بحـ}$

(ب) فى الشكل المقابل:



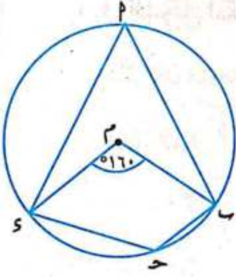
المثلث أ ب حـ فيه أ ب = أ حـ والدائرة م تمر

برءوس المثلث أ ب حـ ، ق(∠ أ) = °٥٠

، ق(∠ أ ب ء) = °٦٥

برهن أن: $\overleftarrow{بء}$ مماس للدائرة م.

٥ (أ) فى الشكل المقابل:

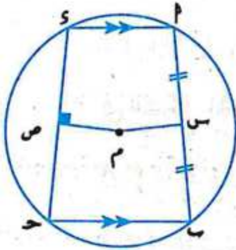


أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى ،

ق (∠ ب م ء) = ١٦٠°

أوجد ق (∠ حـ)

(ب) فى الشكل المقابل:



أ ب حـ ء شكل رباعى مرسوم داخل الدائرة م ،

أء // ب حـ ، س منتصف أ ب ،

م ص ⊥ حـ ء

أثبت أن: م س = م ص

١٥ محافظة سوهاج

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

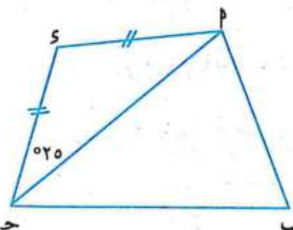
١ إذا كان قياس الزاوية المماسية يساوى ٧٠°، فإن قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس يساوى ....

(أ) ٣٥°　　(ب) ٧٠°　　(جـ) ١٤٠°　　(د) ١٠٥°

٢ مثلث له محور تماثل واحد وفيه طولا ضلعين ٨سم، ٤سم، فإن محيطه = ... سم.

(أ) ١٦　　(ب) ٣٢　　(جـ) ١٢　　(د) ٢٠

٣ فى الشكل المقابل:



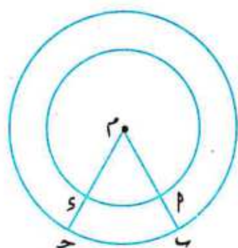
إذا كان أ ب حـ ء شكلًا رباعيًا دائريًا، ق (∠ أ حـ ء) = ٢٥°

، أ ء = ء حـ، فإن: ق (∠ ب) = ...

(أ) ١٣٠°　　(ب) ٦٥°

(جـ) ٥٠°　　(د) ٢٥°

٤ فى الشكل المقابل:



دائرتان متحدتا المركز م، ق ($\frown$ ب حـ) = ٨٠°

فإن: ق ($\frown$ أ ء) = ...

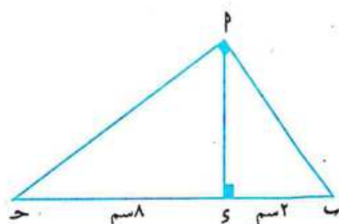
(أ) ٢٠°　　(ب) ٤٠°

(جـ) ٦٠°　　(د) ٨٠°

٥ أصغر دائرة يمكن رسمها تمر بالنقطتين أ ، ب حيث أ ب = ٦ سم، يكون طول نصف قطرها = ... سم.

(أ) ١　　(ب) ٢　　(جـ) ٣　　(د) ٤

٦ فى الشكل المقابل:



Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى أ، $\overline{أء} \perp \overline{ب حـ}$ ، ب ء = ٢ سم،

ء حـ = ٨سم، فإن: أ ء = ... سم.

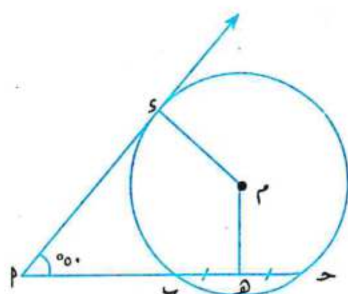
(أ) ٤　　(ب) ١٦

(جـ) ٨　　(د) ٢

٧ الدائرتان م ، ن متماستان، طولا نصفى قطريهما ٢ سم، ٥ سم، فإن م ن $\in$ ....

(أ)]٣ ، ٧[　　(ب)]٧ ، ∞[　　(جـ)]٠ ، ٣[　　(د) {٣ ، ٧}

٨ فى الشكل المقابل:



$\overleftarrow{أء}$ مماس للدائرة م، $\overleftarrow{أحـ}$ يقطع الدائرة م فى ب ، حـ

ق($\angle$ أ) = ٥٠°، هـ منتصف $\overline{ب حـ}$

فإن: ق($\angle$ ء م هـ) = ...

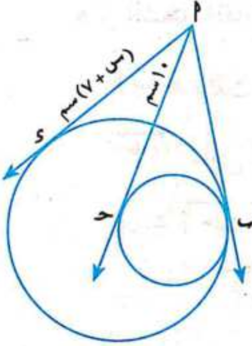
(أ) ٥٠°　　(ب) ٤٠°

(جـ) ١٣٠°　　(د) ١١٠°

٩ محور تماثل الوتر المشترك $\overline{أب}$ لدائرتين متقاطعتين م ، ن هو ....

(أ) $\overline{م ن}$　　(ب) $\overleftrightarrow{م أ}$　　(جـ) $\overleftrightarrow{م ن}$　　(د) $\overleftrightarrow{م ب}$

٢ أجب عن الأسئلة الآتية:



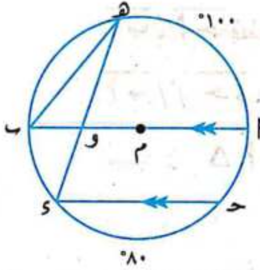
١ فى الشكل المقابل: دائرتان متماستان من الداخل فى نقطة ب

$\overleftrightarrow{\text{ﻫ ب}}$ مماس مشترك للدائرتين،

$\overleftrightarrow{\text{ﻫ ح}}$ مماس للدائرة الصغرى

$\overleftrightarrow{\text{ﻫ ء}}$ مماس للدائرة الكبرى، فإذا كان: ﻫ ح = ١٠سم،

ﻫ ء = (س + ٧) سم، فأوجد: قيمة س



٢ فى الشكل المقابل:

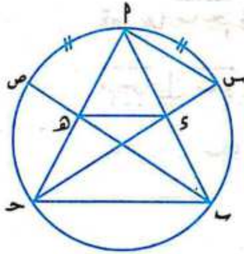
$\overline{\text{ﻫ ب}}$ قطر فى الدائرة م، $\overline{\text{ﻫ ب}}$ // $\overline{\text{ح ء}}$،

ق($\widehat{\text{ح ء}}$) = ٨٠°، ق($\widehat{\text{ﻫ ﻫ}}$) = ١٠٠°،

أوجد بالبرهان: ١) ق(∠ ءﻫ ب)

٢) ق(∠ ﻫ وﻫ)

٣ فى الشكل المقابل:



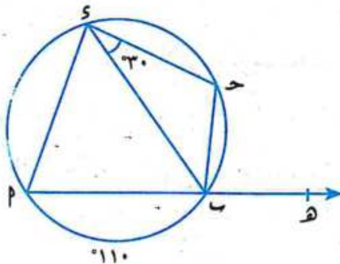
ﻫ ب ح مثلث مرسوم داخل دائرة، س ∈ ($\widehat{\text{ﻫ ب}}$)،

ص ∈ ($\widehat{\text{ﻫ ح}}$)، بحيث ق($\widehat{\text{ﻫ س}}$) = ق($\widehat{\text{ﻫ ص}}$)،

$\overline{\text{ح س}}$ ∩ $\overline{\text{ﻫ ب}}$ = {ء}، $\overline{\text{ب ص}}$ ∩ $\overline{\text{ﻫ ح}}$ = {ﻫ}،

أثبت أن: ١) الشكل ب ح ﻫ ء رباعى دائرى.

٢) ق(∠ ء ﻫ ب) = ق(∠ س ﻫ ب)



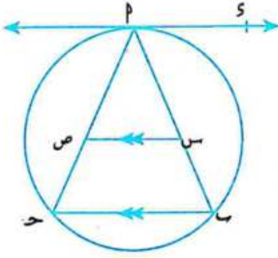
٤ فى الشكل المقابل:

ﻫ ∈ $\overleftrightarrow{\text{ﻫ ب}}$ ، ﻫ ∉ $\overline{\text{ﻫ ب}}$، ق($\widehat{\text{ﻫ ب}}$) = ١١٠°

ق(∠ ب ء ح) = ٣٠°

أوجد بالبرهان: ق(∠ ﻫ ب ح)

٥ في الشكل المقابل:



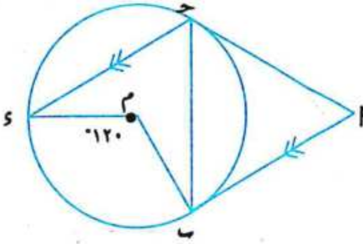
ﺃ ب ﺣ مثلث مرسوم داخل دائرة.

$\overleftrightarrow{ﺃء}$ مماس للدائرة عند ﺃ ، س ∈ $\overline{ﺃب}$ ،

ص ∈ $\overline{ﺃﺣ}$ ، $\overline{سص}$ // $\overline{بﺣ}$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{ﺃء}$ مماس للدائرة المارة بالنقط ﺃ ، س ، ص

٦ في الشكل المقابل:

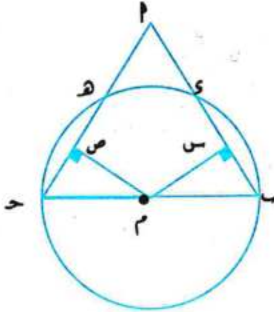


$\overline{ﺃب}$ ، $\overline{ﺃﺣ}$ قطعتان مماستان للدائرة م ،

$\overline{ﺃب}$ // $\overline{ﺣء}$ ، ق(∠ ب م ء) = °١٢٠

أثبت أن: Δ ﺃ ب ﺣ متساوى الأضلاع.

٧ في الشكل المقابل:



ﺃ ب ﺣ مثلث فيه ﺃ ب = ﺃ ﺣ ، رُسمت دائرة م

قطرها $\overline{بﺣ}$ فقطعت $\overline{ﺃب}$ في ء ، $\overline{ﺃﺣ}$ في ﻫ ،

$\overline{مس}$ ⊥ $\overline{بء}$ ، $\overline{مص}$ ⊥ $\overline{ﺣء}$

أثبت أن: ب ء = ﺣ ﻫ

١٦ محافظة الأقصر

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ نقطة تلاقى متوسطات المثلث تقسم كل منها بنسبة .... من جهة القاعدة.

(أ) ١ : ٣ (ب) ٤ : ٦ (جـ) ٢ : ١ (د) ١ : ٢

٢ المماس لدائرة طول قطرها ١٠ سم، يكون على بُعد .... من مركزها.

(أ) ٢٠سم (ب) ١٠سم (جـ) ٥ سم (د) ٤ سم

٣ إذا كان سطح الدائرة م ∩ سطح الدائرة ں = {أ} ، وطول نصف قطر إحداهما ٧ سم،
م ں = ١٢ سم، فإن: طول نصف قطر الدائرة الأخرى = ...

(أ) ٥سم (ب) ١٧سم (جـ) ٧سم (د) ١٢سم

٤ لا يمكن رسم دائرة تمر برءوس ....

(أ) المربع (ب) المثلث (جـ) المستطيل (د) المعين

٥ مساحة المعين الذى طولا قطريه ١٠سم، ١٤سم = ...سم^{٢} .

(أ) ٧٠ (ب) ٣٥ (جـ) ١٤٠ (د) ١٠٥

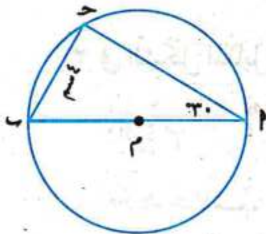
٦ أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى ى(∠أ): ى(∠حـ) = ٢ : ٣ ، فإن ى(∠أ) = ...

(أ) ١٠٨° (ب) ٧٢° (جـ) ٨٠° (د) ١٠٠°

٧ Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع مرسوم داخل دائرة، فإن ى($\overset{\frown}{أب}$) الأصغر = ...

(أ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ١٢٠° (د) ٢٤٠°

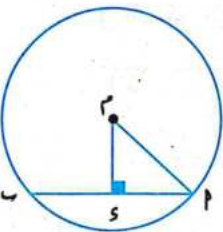
٨ فى الشكل المقابل:



$\overline{أب}$ قطر فى الدائرة م،
ى(∠ب أ حـ) = ٣٠°، ب حـ = ٤سم
فإن أ ب = ...

(أ) ٨سم (ب) ٤سم (جـ) ٢سم (د) ٤ $\sqrt{٣}$

٩ فى الشكل المقابل:



$\overline{أب}$ وتر فى الدائرة م، $\overline{مء}$ ⊥ $\overline{أب}$
م ء = ٣سم، ىق = ٥سم،
فإن: أ ب = ...

(أ) ٤ (ب) ٨ (جـ) ١٠ (د) ٦

٢ أجب عن الأسئلة الآتية:

١ فى الشكل المقابل:

أ ب حـ ء شكل رباعى،

أ ب = أ ء ، ق(∠ أ ب ء) = ٤٠°،

ق(∠ حـ) = ٨٠°

أثبت أن الشكل: أ ب حـ ء رباعى دائرى.

٢ فى الشكل المقابل:

$\overline{أء}$ قطر فى الدائرة م

هـ ∈ $\overleftarrow{أء}$ ، ق(∠ حـ ب أ) = ١٢٠°،

أوجد: ق(∠ حـ ء هـ) ، ق(∠ حـ أ ء)

٣ فى الشكل المقابل:

دائرة م

ب حـ = ٧سم، ق(∠ أ) = ٣٠°،

أوجد: محيط الدائرة.

٤ فى الشكل المقابل:

$\overline{أب}$ ، $\overline{بحـ}$ وتران فى الدائرة م ،

س منتصف $\overline{أب}$، ص منتصف $\overline{بحـ}$

إذا كان هـ س = ص ء

فأثبت أن: أ ب = ب حـ

٥ في الشكل المقابل:

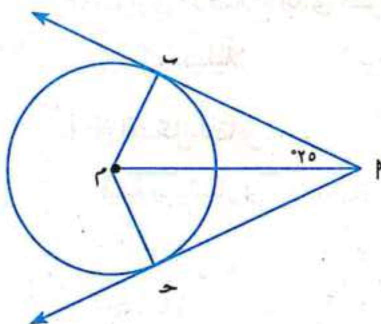
$\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أحـ}$ مماسان للدائرة م ،

يمسانها عند ب، حـ على الترتيب

ق(∠ ب أ م) = ٢٥°

١) أثبت أن: $\overleftarrow{م أ}$ ينصف ∠ ب م حـ

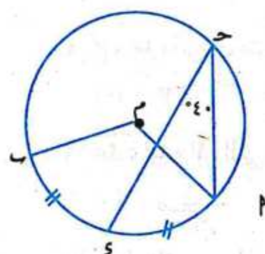
٢) أوجد: ق(∠ ب م حـ)



٦ في الشكل المقابل:

م دائرة ، ء منتصف ($\overset{\frown}{أب}$)، ق(∠ أ حـ ء) = ٤٠°،

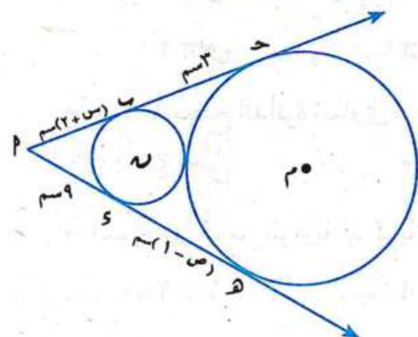
أوجد: ق(∠ أ م ب)



٧ في الشكل المقابل:

$\overleftrightarrow{أحـ}$ ، $\overleftrightarrow{أهـ}$ مماسان للدائرتين ن ، م

أوجد: قيمة كل من س ، ص



١٧ محافظة أسوان

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

١ أ ب حـ ء شكل رباعي دائري ق(∠ ب) = ٧٠°، فإن ق(∠ ء) = ...

(أ) ٧٠° (ب) ٩٠° (جـ) ١٨٠° (د) ١١٠°

٢ إذا كان طول قطر الدائرة ١٠ سم والمستقيم ل يبعد عن مركزها ٦ سم، فإن المستقيم ل ....

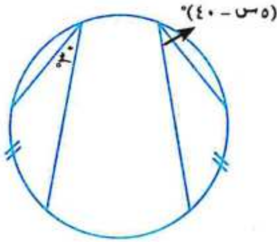
(أ) مماس للدائرة (ب) قاطع للدائرة

(جـ) خارج الدائرة (د) محور تماثل للدائرة

٣ متوازى الأضلاع الذى قطراه متعامدان وغير متساويين فى الطول يكون ....

(أ) مستطيلًا (ب) معينًا (جـ) مربعًا (د) شبه منحرف

٤ فى الشكل المقابل:



قيمة س تساوى ....°.

(أ) ١٠ (ب) ١٢

(جـ) ١٤ (د) ٣٠

٥ م ، ىه دائرتان متماستان من الداخل، طولا نصفى قطريهما ٧سم، ٤سم، فإن: م ىه = ...سم .

(أ) ١٣ (ب) ٢ (جـ) ١١ (د) ٣

٦ عدد الدوائر التى تمر بثلاث نقاط على استقامة واحدة هو ....

(أ) صفر (ب) ١ (جـ) ٢ (د) عدد لانهائى

٧ طول القوس الذى يمثل $\frac{1}{٤}$ محيط الدائرة يساوى ....

(أ) ٢ π نق (ب) π نق (جـ) ٤ π نق (د) $\frac{1}{٢}$ π نق

٨ مساحة سطح الدائرة تساوى .... وحدة مربعة.

(أ) ٤ π نق (ب) ٢ π نق (جـ) π نق^{٢} (د) π نق

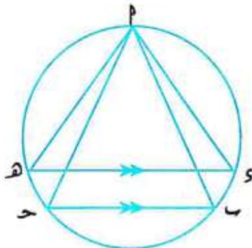
٩ النسبة بين قياس الزاوية المركزية والمحيطية المشتركة معها فى القوس هى ....

(أ) ٢ : ١ (ب) ١ : ٢ (جـ) ٣ : ١ (د) ١ : ٣

---

٢ أجب عن الأسئلة الآتية:

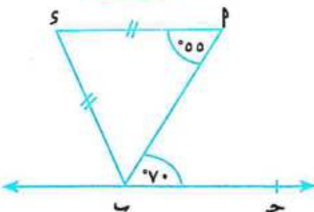
١ فى الشكل المقابل:



$\overline{ءهـ}$ // $\overline{بحـ}$ ،

أثبت أن: ق(∠ ء أ حـ) = ق(∠ ب أ هـ)

٢ فى الشكل المقابل: أ ء = ء ب



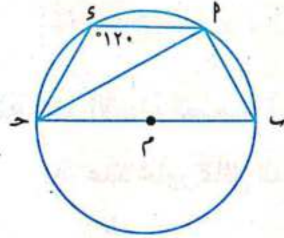
ق(∠ ء أ ب) = ٥٥°، ق(∠ أ ب حـ) = ٧٠°

أثبت أن: $\overleftrightarrow{بحـ}$ مماس للدائرة المارة برءوس Δ أ ب ء

٣ $\overline{\text{ب حـ}}$ قطر فى الدائرة م ،

ق(∠ ء) = ١٢٠°

أوجد بالبرهان: ق(∠ أ حـ ب)

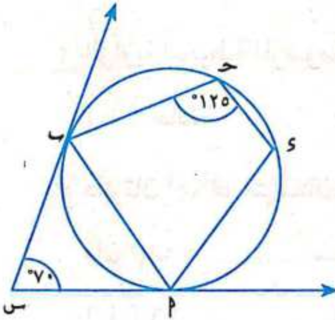


٤ فى الشكل المقابل:

$\overleftarrow{\text{س أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{س ب}}$ مماسان للدائرة أ ، ب

ق(∠ أ س ب) = ٧٠°، ق(∠ حـ) = ١٢٥°

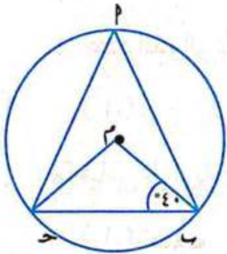
أثبت أن: $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ينصف ق(∠ ء أ س)



٥ فى الشكل المقابل:

م دائرة ، ق(∠ م ب حـ) = ٤٠°

أوجد بالبرهان: ق(∠ ب أ حـ)

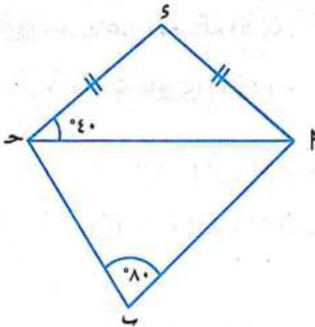


٦ فى الشكل المقابل:

أ ء = ء حـ ،

ق(∠ ء حـ أ) = ٤٠°، ق(∠ ب) = ٨٠°

أثبت أن: الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى.

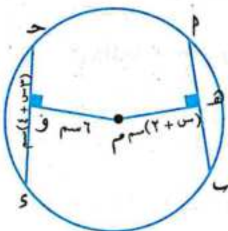


٧ فى الشكل المقابل:

أ ب = حـ ء ، م هـ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ ، م و ⊥ $\overline{\text{حـ ء}}$

(ا) **أوجد:** قيمة س.

(ب) طول $\overline{\text{حـ ء}}$.



١٨ الأزهر الإسكندرية

١ اختر الإجابة الصحيحة فيما يلى:

١ عدد محاور تماثل الدائرة هو ....

(أ) ١ (ب) ٣ (جـ) ٤ (د) عدد لا نهائى

٢ الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة تكون ....

(أ) حادة (ب) قائمة (جـ) منفرجة (د) مستقيمة

٣ دائرتان م ، ں متماستان من الداخل، طولا نصفى قطريهما ٥سم ، ١١سم،

فإن م ں = ... سم.

(أ) ١٦ (ب) ٥ (جـ) ١ (د) ١١

٤ عدد الدوائر التى يمكن رسمها تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة هو ....

(أ) ١ (ب) صفر (جـ) عدد لا نهائى (د) ٣

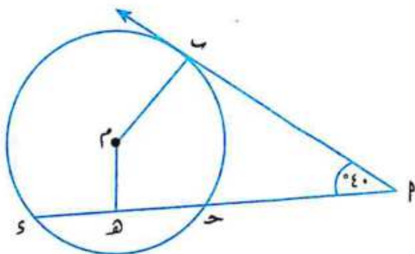
٥ قياس الزاوية المركزية يساوى ....قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها فى القوس .

(أ) نصف (ب) ضعف (جـ) ثلث (د) ثلاثة أمثال

---

٢ أجب عن الأسئلة الآتية:

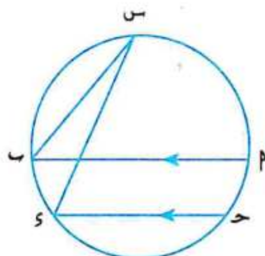
(أ) فى الشكل المقابل:



م دائرة $\overleftarrow{أب}$ مماس ، هـ منتصف $\overline{حـ ء}$

ق($\angle$ أ) = ٤٠° أوجد ق($\angle$ ب م هـ)

(ب) فى الشكل المقابل:



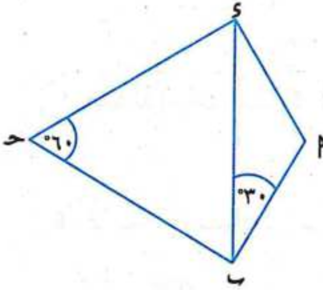
م دائرة $\overline{أب}$ // $\overline{حـ ء}$ ، ق($\widehat{أ حـ}$) = ٦٠°

أوجد ق($\angle$ ء س ب)

(جـ) أوجد: قياس القوس الذى يمثل $\frac{١}{٣}$ قياس الدائرة.

٣ أجب عن الأسئلة الآتية:

(أ) فى الشكل المقابل:



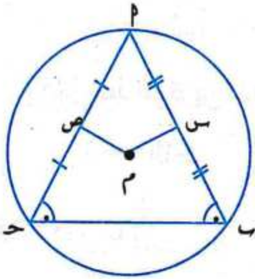
أ ب حـ ء شكل رباعى

أ ب = أ ء ، ق(∠ أ ب ء) = ٣٠° ،

ق(∠ حـ) = ٦٠°

أثبت أن: أ ب حـ ء رباعى دائرى.

(ب) فى الشكل المقابل:



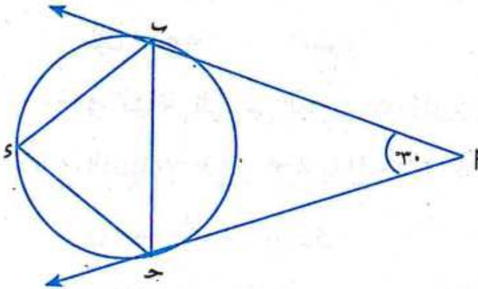
أ ب حـ مثلث مرسوم داخل الدائرة م

ق(∠ ب) = ق(∠ حـ) ،

س ، ص منتصفا $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ حـ}$

أثبت أن: م س = م ص

(جـ) فى الشكل المقابل:



$\overleftarrow{أ ب}$ ، $\overleftarrow{أ حـ}$ مماسان فى الدائرة م

ق(∠ أ) = ٣٠°،

أوجد: ق(∠ ب ء حـ)

١٩ أزهر الشرقية

١ اختر الإجابة الصحيحة مما بين القوسين فيما يلى:

١ المماسان المرسومان من نهايتى قطر فى دائرة ....

(أ) متقاطعان (ب) متوازيان

(جـ) متساويان فى الطول (د) متعامدان

٢ إذا كان المستقيم ل مماسًا للدائرة م التى طول قطرها ١٤ سم، فإنه يبعد عن مركزها بمقدار .... سم .

(أ) ٥ (ب) ٦ (جـ) ٧ (د) ٨

٣ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متماستين من الخارج يساوى ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٤ لا يمكن رسم دائرة تمر برءوس ....

(أ) مربع (ب) مستطيل

(جـ) مثلث (د) متوازى الأضلاع

٥ خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عموديًا على ....وينصفه .

(أ) القطر (ب) الوتر (جـ) الوتر المشترك (د) المماس

---

٢ أكمل ما يأتى:

١ عدد الدوائر التى يمكن رسمها تمر بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة هو ....

٢ دائرتان م ، ن متماستان من الداخل، طولا نصفى قطريهما ٧سم، ٣سم على الترتيب، فإن م ن = ... سم .

٣ فى الشكل الرباعى الدائرى كل زاويتين متقابلتين ....

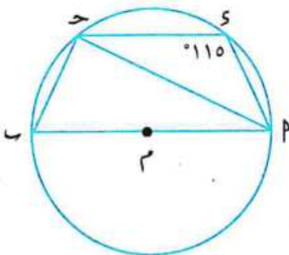
٤ النسبة بين قياس الزاوية المحيطية: قياس الزاوية المركزية المشتركة معها فى نفس القوس تساوى .... : ....

٥ القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة ....

---

٣ أجب عن الأسئلة الآتية:

(أ) فى الشكل المقابل:

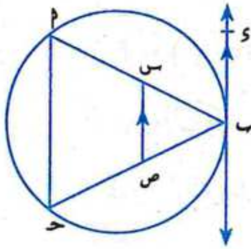


$\overline{\text{أ ب}}$ قطر فى الدائرة م ،

ق(∠ أ ء حـ) = ١١٥°

أوجد بالبرهان: ق(∠ ب أ حـ)

(ب) فى الشكل المقابل:



ٮ ب حـ مثلث مرسوم داخل دائرة

$\overleftrightarrow{بء}$ مماس للدائرة عند ب ،

س ∈ $\overline{ٮب}$ ، ص ∈ $\overline{بحـ}$

بحيث $\overline{سص}$ // $\overleftrightarrow{بء}$ ،

أثبت أن: الشكل ٮ س ص حـ رباعى دائرى.

٢٠ أزهر قنا

١ اختر الإجابة الصحيحة:

١ الزاوية المحيطية المرسومة فى نصف دائرة ....

(ا) حادة (ب) منفرجة (جـ) قائمة (د) مستقيمة

٢ إذا كان المستقيم مماسًا للدائرة التى طول قطرها ٨سم، فإنه يبعد عن مركزها بمقدار ....سم.

(ا) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٦ (د) ٨

٣ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين ....

(ا) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

٤ ٮ ب حـ ء شكل رباعى دائرى فيه ق(∠ ٮ) = ٨٠°، فإن ق(∠ حـ) = ...°

(ا) ٨٠ (ب) ١٠٠ (جـ) ١٨٠ (د) ٩٠

٥ الدائرتان م ، ں متماستان من الخارج أنصاف أقطارهما ٥سم، ٩سم، فإن م ں = ... سم.

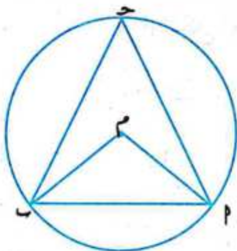
(ا) ١٤ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٩

٦ قياس القوس الذى يمثل نصف دائرة = ...°

(ا) ٩٠ (ب) ١٢٠ (جـ) ١٨٠ (د) ٣٦٠

---

٢ (ا) فى الشكل المقابل:



دائرة م ، ق(∠ م ٮ ب) = ٥٠°

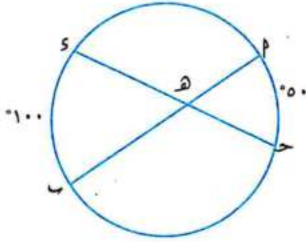
، أوجد: ق(∠ حـ)

(ب) فى الشكل المقابل:

$\overline{أ ب} \cap \overline{ء حـ} = \{هـ\}$ ، ق$(\widehat{أ حـ}) = ٥٠°$

، ق$(\widehat{ب ء}) = ١٠٠°$

أوجد بالبرهان: ق$(\angle$ أ هـ حـ$)$



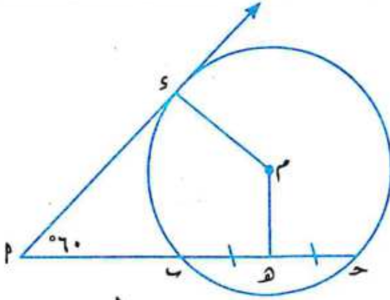
---

٣ (أ) فى الشكل المقابل:

$\overleftrightarrow{أ ء}$ مماس للدائرة م عند ء ، ق$(\angle$ أ$) = ٦٠°$

هـ منتصف $\overline{ب حـ}$

أوجد: ق$(\angle$ ء م هـ$)$

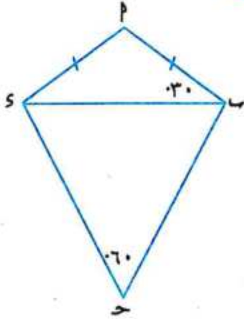


(ب) فى الشكل المقابل:

أ ب = أ ء ، ق$(\angle$ أ ب ء$) = ٣٠°$

، ق$(\angle$ حـ$) = ٦٠°$

أثبت أن: الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى.



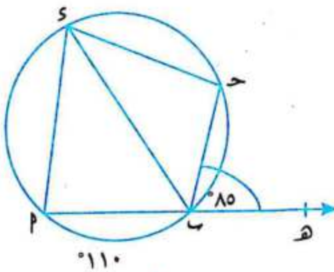
---

٤ (أ) فى الشكل المقابل:

هـ $\in \overleftrightarrow{أ ب}$ ، ق$(\angle$ هـ ب حـ$) = ٨٥°$

، ق$(\widehat{أ ب}) = ١١٠°$

، أوجد: ق$(\angle$ ب ء حـ$)$

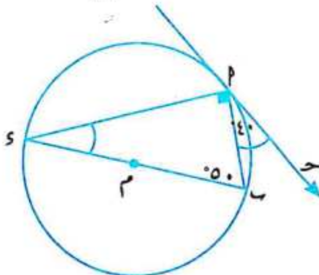


(ب) فى الشكل المقابل:

$\overline{ب ء}$ قطر فى الدائرة م ، ق$(\angle$ ب أ حـ$) = ٤٠°$

، ق$(\angle$ ب$) = ٥٠°$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{أ حـ}$ مماس للدائرة م عند النقطة أ



٢١ أسوان (دمج)

١ اختر الإجابة الصحيحة من بين البدائل المعطاة:

١ إذا كانت النقطة أ تنمى إلى الدائرة م التى طول قطرها ١٠ سم، فإن أم تساوى .... سم.

(أ) ٣ (ب) ٤ (جـ) ٥ (د) ٦

٢ الزاوية المماسية هى زاوية محصورة بين ....

(أ) وترين (ب) مماسين (جـ) وتر ومماس (د) وترو قطر

٣ لا يمكن رسم دائرة تمر برءوس ....

(أ) المعين (ب) المربع (جـ) المستطيل (د) المثلث

٤ عدد الدوائر التى تمر بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة ....

(أ) لا نهائى (ب) واحدة (جـ) اثنتان (د) صفر

٥ عدد المماسات المشتركة لدائرتين متباعدتين هو ....

(أ) ١ (ب) ٢ (جـ) ٣ (د) ٤

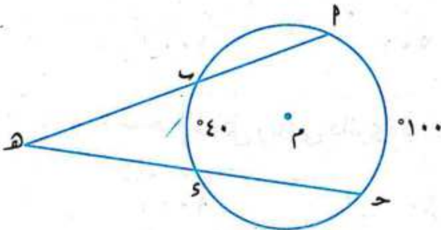
---

٢ أكمل ما يأتى:

١ أكبر الأوتار طولًا يسمى ....

٢ مجموع قياسى الزاويتين المتقابلتين فى الشكل الرباعى الدائرى يساوى ....°.

٣ القطعتان المماستان المرسومتان من نقطة خارج الدائرة .... فى الطول.

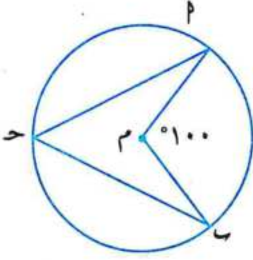


٤ فى الشكل المقابل:

ق($\angle$ هـ) = ...°.

٥ قياس القوس الذى يمثل $\frac{1}{4}$ قياس الدائرة يساوى ....° .

٣ اختر الإجابة الصحيحة من بين البدائل المعطاة:



١ فى الشكل المقابل:

(∠م) ، (∠ حـ) مشتركتان فى القوس ﺃ ب،

فإن ق(∠ حـ) = ... °.

(ﺃ) ٤٠ (ب) ٣٠

(جـ) ١٠٠ (د) ٥٠

٢ عدد محاور التماثل للدائرة ....

(ﺃ) ١ (ب) عدد لا نهائى

(جـ) ٢ (د) صفر

٣ مجموعة نقط الدائرة ∩ مجموعة النقط داخل الدائرة = ...

(ﺃ) سطح الدائرة (ب) ∅

(جـ) محيط الدائرة (د) الدائرة

٤ الزاوية المحيطة المرسومة فى نصف دائرة قياسها .... °.

(ﺃ) ١٨٠ (ب) ٣٦٠

(جـ) ١٠٠ (د) ٩٠

٥ ﺃ ب حـ ء شكل رباعى دائرى فيه ق(∠ ﺃ) = ١٠٠°، فإن: ق(∠ حـ) = ... °.

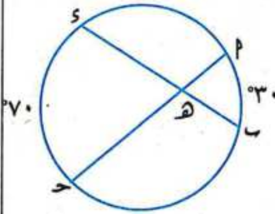
(ﺃ) ١٠٠ (ب) ١٨٠

(جـ) ٨٠ (د) ٩٠

٤ صل من العمود (أ) بما يناسبه من العمود (ب) :

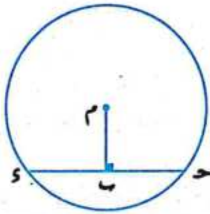
(أ)

١ في الشكل المقابل:



ق(∠ أ هـ ب) = ... °

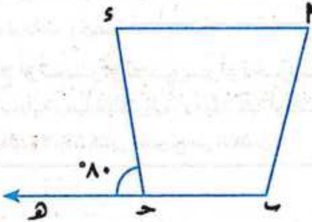
٢ في الشكل المقابل:



$\overline{\text{م ب}} \perp \overline{\text{حـ ء}}$ ،

فإن: حـ ب .... ب ء

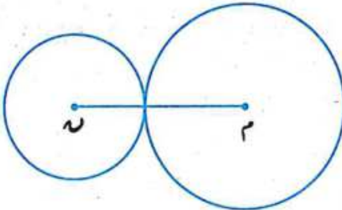
٣ في الشكل المقابل:



أ ب حـ ء رباعي دائري

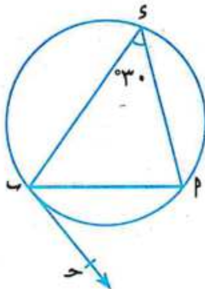
ق(∠ أ) = ... °

٤ م ، ن دائرتان متماستان من الخارج



و $نق_١$ = ٨سم ، $نق_٢$ = ٥سم

فإن: م ن = ... سم.



٥ ق(∠ أ ب حـ) المماسية = ... °

(ب)

(أ) ٨٠

(ب) ١٣

(جـ) ٥٠

(د) ٣٠

(هـ) يساوي



الأضواء

الرياضيات

3 الصف الثالث الإعدادى

الفصل الدراسى الثانى

2026

الإجابات النموذجية

إجابات كتاب الشرح والتدريبات

أولاً: الجبر والاحتمال

إجابات الوحدة الأولى

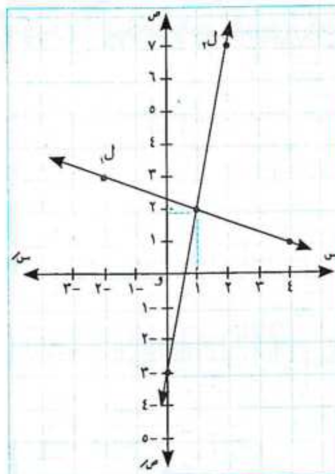
المعادلات

إجابة أسئلة س سؤال الدرس (١)

١ ل١: ص = (٧ − س)/٣ ، ل٢: ص = ٥س − ٣

س	-٢	١	٤
ص	٣	٢	١

س	٠	١	٢
ص	-٣	٢	٧

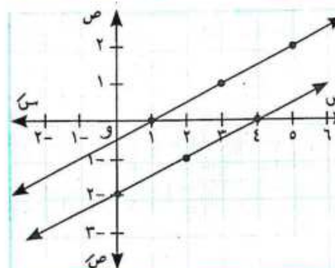


∴ من الرسم م.ح = {(١ ، ٢)}

٢ ص = (س − ٤)/٢ ، ص = (٢س − ٢)/٤ = (س − ١)/٢

س	٠	٢	٤
ص	-٢	-١	٠

س	١	٣	٥
ص	٠	١	٢

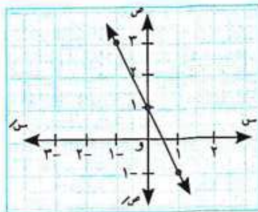


∵ المستقيمين متوازيان ∴ م.ح = ∅

٣ ص = ١ − ٢س ، ص = (٢ − ٤س)/٢ = ١ − ٢س

س	-١	٠	١
ص	٣	١	-١

س	-١	٠	١
ص	٣	١	-١



م.ح = {(س ، ص) ∈ ح × ح ، ص = ١ − ٢س}

٤ ١ حل وحيد ٢ صفر ٣ عدد لا نهائي من الحلول

٥ ١ س + ص = ٧ ← (١)

س − ص = ١

بالجمع ٢س = ٨ ∴ س = ٤

بالتعويض فى (١)

∴ ٤ + ص = ٧ ∴ ص = ٣

∴ م.ح = {(٤ ، ٣)}

٢ ٣س + ٤ص = ٢٤ ← (١)

س − ٢ص = −٢ ← (٢)

بضرب المعادلة (٢) × ٢

، ٢س − ٤ص = −٤ ← (٣)

بجمع المعادلتين (١) ، (٣)

٥س = ٢٠ ⟸ س = ٤

بالتعويض فى المعادلة ٢

٤ − ٢ص = −٢ ⟸ ٢ص = ٦ ⟸ ∴ ص = ٣

∴ م.ح = {(٤ ، ٣)}

٣ ٣س + ٢ص = ٤ ← ١

س − ٣ص = ٥ ← ٢

بضرب المعادلة ٢ × −٣

∴ −٣س + ٩ص = −١٥ ← ٣

بجمع المعادلتين ١ ، ٣

١١ص = −١١

ص = −١

بالتعويض فى المعادلة ١

٣س − ٢ = ٤ ⟸ ٣س = ٦ ⟸ س = ٢

∴ م.ح = {(٢ ، −١)}

٤ ٢س + ص = ٥ ← ١

٢ص + ٤س = ١٠ ∴ ٤س + ٢ص = ١٠ ← ٢

∴ أ١/أ٢ = ١/٢ ، ب١/ب٢ = ١/٢ ، جـ١/جـ٢ = ١/٢

∴ أ١/أ٢ = ب١/ب٢ = جـ١/جـ٢ = ١/٢

∴ المستقيمان منطبقان

∴ م.ح = {(س ، ص) ∈ ح × ح ، ٢س + ص = ٥}

٦ ١) ∵ (−٣ ، ١) حل للمعادلة أ س + ب ص − ٤ = ٠

∴ −٣أ + ب = ٤ ← (١)

∵ (−٣ ، ١) حل للمعادلة ٣أ س + ب ص = ١٦

∴ −٩أ + ب = ١٦ ← (٢)

بطرح (٢) من (١)

٦أ = −١٢ ⟸ أ = −٢

بالتعويض فى (١)

٦ + ب = ٤ ⟸ ب = −٢

٢) ∵ (٣ ، ٤) حل للمعادلة أ س + ص = ١٠

∴ ٣أ + ٤ = ١٠

∴ ٣أ = ١٠ − ٤ ⟸ ٣أ = ٦ ∴ أ = ٢ (١)

∵ (٣ ، ٤) حل للمعادلة ب س + أ ص = ١١

∴ ٣ب + ٤أ = ١١ من (١)

∴ ٣ب + ٨ = ١١

∴ ٣ب = ٣ ⟸ ب = ١

∴ ٧أ + ٦ب = ٧(٢) + ٦(١) = ٢٠

---

٧ ١) نفرض أن العدد الأكبر س ، العدد الأصغر ص

س = ٢ص ← (١)

٣س − ص = ١٤٠ ← (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢)

٦ص − ص = ١٤٠ ⟸ ٥ص = ١٤٠

ص = ٢٨

بالتعويض فى (١)

س = ٥٦

العددان هما ٥٦ ، ٢٨

٢) نفرض أن ثمن القصة س جنيه ثمن القلم ص جنيه

∴ ٣س + ٢ص = ٢١ ← (١)

، س − ص = ٢ ← (٢) (×٢)

٢س − ٢ص = ٤ ← (٣)

بجمع المعادلتين (١) ، (٣)

∴ ٥س = ٢٥ ⟸ س = ٥

بالتعويض فى (٢)

٥ − ص = ٢ ⟸ ص = ٣

ثمن القصة ٥ جنيهات ، ثمن القلم ٣ جنيهات

٨ نفرض أن رقم الآحاد = س ، رقم العشرات = ص

س + ص = ١١ (١)

	آحاد	عشرات	قيمة العدد
العدد الأصلى	س	ص	س + ١٠ص
العدد الناتج عكس الرقم	ص	س	ص + ١٠س

ص + ١٠س − (س + ١٠ص) = ٢٧

٩س − ٩ص = ٢٧ (÷٩)

س − ص = ٣ ← (٢)

بجمع المعادلتين (١) ، (٢)

٢س = ١٤ ⟸ س = ٧

بالتعويض فى (١)

٧ + ص = ١١ ⟸ ص = ٤

العدد هو ٤٧

---

٩ م.ح = {(−١ ، ٢)}

إجابة تدريبات الأضواء الدرس (١)

أولًا: حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين بيانيًا:

١ ١) ح ٢) متوازيين ٣) صفر

٤) عدد لا نهائى ٥) عدد لا نهائى ٦) نقطة الأصل

٧) متعامدين ٨) (−٢ ، −٢) ٩) عدد لا نهائى

١٠) ٦ ١١) ١ ١٢) −٥

---

٢ ١) حل وحيد، المنطبقان ٢) (٣ ، ٥) ٣) عدد لا نهائى

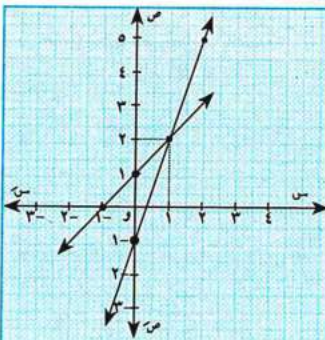
٤) (٢ ، ٤) ٥) ١٥ ٦) −٦

---

٣ ١) ص = ٣س − ١ ، ص = س + ١

س	٠	١	٢
ص	−١	٢	٥

س	٠	١	−١
ص	١	٢	٠



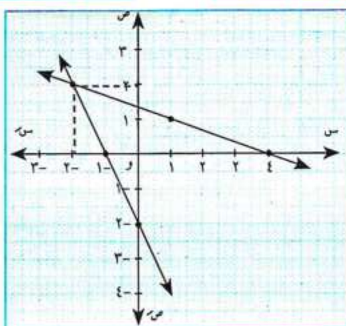
مجموعة الحل = {(١ ، ٢)}

٢) راجع إجابتك فى «100% إجابات»

٣ ص = $\frac{٤ - س}{٣}$ ، ص = −٢ س − ٢

س	٤	١	−٢
ص	٠	١	٢

س	٠	−١	−٢
ص	−٢	٠	٢

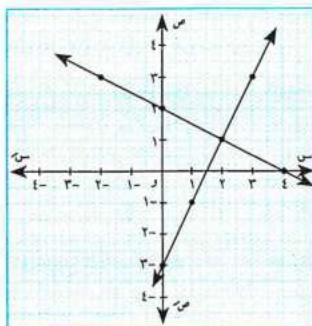


من الرسم: م. ح = {(−٢ ، ٢)}

٤ س = $\frac{ص + ٣}{٢}$ ، س = ٤ − ٢ ص

س	٠	٢	٣
ص	−٣	١	٣

س	٠	٢	−٢
ص	٢	١	٣



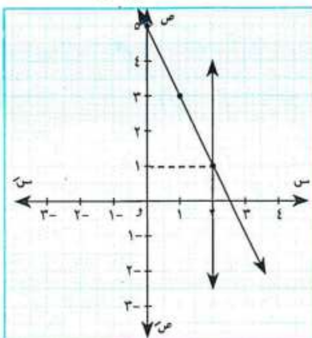
من الرسم: م. ح = {(٢ ، ١)}

٥ س = ٢ ، ص = ٥ − ٢ س

س	٢	٢	٢
ص	٠	١	٢

س	٠	١	٢
ص	٥	٣	١

لاحظ أن: س = ٢ يمثلها خط رأسي يمر بالنقطة (٢ ، ٠)

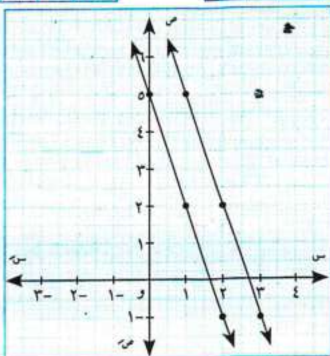


من الرسم: م. ح = {(٢ ، ١)}

٦ ص = ٥ − ٣ س ، ص = ٨ − ٣ س

س	٠	١	٢
ص	٥	٢	−١

س	١	٢	٣
ص	٥	٢	−١



من الرسم: م. ح = ∅

٧ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

---

٤ ١ $م_١$ ميل المستقيم الأول = $\frac{٢}{٣}$

$م_٢$ ميل المستقيم الثانى = $\frac{١}{٢}$

∵ $م_١ \neq م_٢$

∴ المستقيمان متقاطعان

عدد الحلول حل وحيد

٢ $م_١$ ميل المستقيم الأول = −٣

$م_٢$ ميل المستقيم الثانى = −٣

∵ $م_١ = م_٢$

عند س = ٠ فى المعادلة الأولى فإن ص = ٣

∴ المستقيم $ل_١$ يمر بالنقطة (٠ ، ٣)

عند س = ٠ فى المعادلة الثانية فإن ص = ٦

∴ المستقيم $ل_٢$ يمر بالنقطة (٠ ، ٦)

∴ المستقيمان متوازيان

∴ عدد الحلول صفر

٣ $م_١$ ميل المستقيم الأول = ١ ، $م_٢$ ميل المستقيم الثانى = ١

∵ $م_١ = م_٢$

عند س = ٠ فى المعادلة الأولى فإن ص = −٤

∴ المستقيم $ل_١$ يمر بالنقطة (٠ ، −٤)

عند س = ٠ فى المعادلة الثانية فإن ص = −٤

∴ المستقيم $ل_٢$ يمر بالنقطة (٠ ، −٤)

∴ المستقيمان منطبقان ∴ عدد الحلول عدد لا نهائى

ثانيًا: حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين جبريًا:

٥ ١ {(٣ ، ٤)} ٢ {(٣ ، ٢)}

٣ {(−٣ ، ٥)} ٤ ٤

٦ ① ٣ س − ص = ١٠ ← ①

٢ س + ص = ٥ ← ②

بالجمع

∴ ٥ س = ١٥ ∴ س = ٣

بالتعويض فى ②

∴ ٦ + ص = ٥ ∴ ص = −١

∴ م. ح = {(٣، −١)}

② س = ص ← ①

ص = ٣ س − ٢ ← ②

بالتعويض من ① فى ②

∴ ٣ س − ٢ = س

٢ س = ٢ ∴ س = ١

بالتعويض فى ①

∴ ص = ١ ∴ م. ح = {(١ ، ١)}

③ ، ④ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

⑤ س − ص = −٣ ، −س + ص = ٢

∵ $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{١}{−١} = −١$ ، $\frac{ب_١}{ب_٢} = \frac{−١}{١} = −١$ ، $\frac{ح_١}{ح_٢} = \frac{−٣}{٢}$

∵ $\frac{أ_١}{أ_٢} = \frac{ب_١}{ب_٢} \neq \frac{ح_١}{ح_٢}$ ∴ المستقيمان متوازيان

∴ م. ح = ∅

⑥ س + ص = ٣ ← ①

٢ س + ٢ ص = ٦ ← ②

بقسمة طرفى المعادلة ② (÷ ٢)

س + ص = ٣ وهى نفس المعادلة ①

∴ المستقيمان منطبقان

∴ م. ح = {(س، ص) ∈ ح × ح: ص = ٣ − س}

⑦ $\frac{س}{٢} + \frac{ص}{٣} = ٦$ (× ٦)

٣ س + ٢ ص = ٣٦ ← ①

س − ص = ٢ ← ② (× ٢)

∴ ٢ س − ٢ ص = ٤ ← ③

بجمع المعادلتين ① ، ③

∴ ٥ س = ٤٠ ∴ س = ٨

بالتعويض فى المعادلة ②

∴ ٨ − ص = ٢ ⟸ ص = ٦

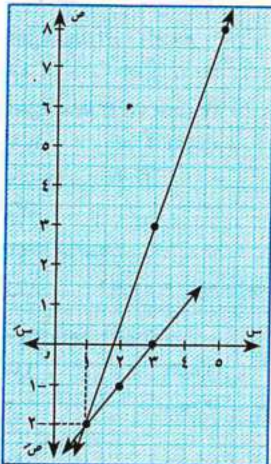
∴ م. ح = {(٨ ، ٦)}

⑧ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

٧ ① **أولًا: بيانيًا:** ص = $\frac{٥ س − ٩}{٢}$ ، ص = س − ٣

س	١	٣	٥
ص	−٢	٣	٨

س	١	٢	٣
ص	−٢	−١	٠



∴ من الرسم: م. ح = {(١ ، −٢)}

ثانيًا: جبريًا:

٥ س − ٢ ص = ٩ ← ①

س − ص = ٣ ← ② × (−٢)

٥ س − ٢ ص = ٩

−٢ س + ٢ ص = −٦

بالجمع

∴ ٣ س = ٣

∴ س = ١

بالتعويض فى ②

∴ ١ − ص = ٣ ∴ ص = −٢ ∴ م. ح = {(١ ، −٢)}

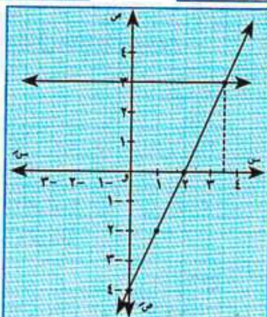
② راجع إجابتك فى «100% إجابات»

③ **أولًا: بيانيًا:**

ص = ٣ ، ص = ٢ س − ٤

س	١	٢	٣
ص	٣	٣	٣

س	٠	١	٢
ص	−٤	−٢	٠



∴ م. ح = {(٣٫٥ ، ٣)}

ثانيًا: جبريًا:

٢ س − ٤ = ٣   ٢ س = ٧

س = ٣,٥ ، ص = ٣   ∴ م.ح = {(٣,٥ ، ٣)}

٤ ، ٥ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

---

٨ ∵ (٣ ، −١) حل للمعادلة أ س + ب ص = ٥

∴ ٣أ − ب = ٥ ← ١

∵ (٣ ، −١) حل للمعادلة ٣أ س + ب ص = ١٧

∴ ٩أ − ب = ١٧ ← ٢ (×−١)

∴ −٩أ + ب = −١٧ ← ٣

بجمع ١ ، ٣

−٦أ = −١٢ ⟸ أ = ٢

بالتعويض فى ١   ٦ − ب = ٥ ← ب = ١

---

٩ ∵ (٢أ + ب ، ٣) = (١٨ ، أ − ب)

٢أ + ب = ١٨ ← ١

أ − ب = ٣ ← ٢   بالجمع

∴ ٣أ = ٢١   ∴ أ = ٧

بالتعويض فى ٢   ∴ ب = ٤

---

١٠ ∵ (−١) حل للمعادلة أ $س^{٢}$ + ب س + ٤ = ٠

∴ أ − ب = −٤ (بالتعويض عن س = −١ فى المعادلة) ← ١

، ∵ (١) حل للمعادلة أ $س^{٢}$ + ب س + ٤ = ٠

∴ أ + ب = −٤ (بالتعويض عن س = ١ فى المعادلة) ← ٢

بجمع المعادلتين ١ ، ٢

∴ ٢أ = −٨ ⟸ أ = −٤   بالتعويض فى المعادلة ١

∴ −٤ − ب = −٤ ⟸ ب = ٠

ثالثًا: تطبيقات على حل معادلتين من الدرجة الأولى فى متغيرين:

١١ نفرض أن العددين هما س ، ص حيث س > ص

س + ص = ٤٠ ← ١

س − ص = ١٠ ← ٢   بالجمع

٢س = ٥٠

∴ س = ٢٥ ، ص = ١٥   ∴ العددان هما: ٢٥ ، ١٥

---

١٢ ، ١٣ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

---

١٤ س − ص = ٢ ← ١

٣ س − ٢ ص = ٧ ← ٢

بضرب ١ × (−٢)

∴ −٢ س + ٢ ص = −٤ ← ٣

، ٣ س − ٢ ص = ٧

بالجمع ٣ ، ٢

س = ٣ ، بالتعويض فى ١   ص = ١

العددان هما ٣ ، ١

---

١٥ ، ١٦ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

---

١٧ س + ص = ١٤ ← ١

	آحاد	عشرات	القيمة
العدد الأصلى	س	ص	س + ١٠ ص
العدد الناتج من عكس الرقمين	ص	س	ص + ١٠ س

(١٠ س + ص) − (١٠ ص + س) = ٣٦

∴ س − ص = ٤ ← ٢

من ١ ، ٢ ∴ س = ٩ ، ص = ٥   ∴ العدد الأصلى هو ٥٩

---

١٨ نفرض أن عمر الرجل الآن = س سنة، نفرض أن عمر ابنه الآن = ص سنة

∴ س = ٤ ص ← ١

س − ٥ = ٧ (ص − ٥) ← ٢

بالتعويض من ١ فى ٢

٤ ص − ٥ = ٧ ص − ٣٥

∴ ٣ ص = ٣٠   ∴ ص = ١٠

بالتعويض فى المعادلة ١   ∴ س = ٤٠

∴ عمر الرجل الآن = ٤٠ سنة ، عمر ابنه الآن = ١٠ سنوات.

---

١٩ ∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة هو ١٨٠°

∴ ص + (ص − ١٨°) + س = ١٨٠°   ∴ ٢ ص − ١٨° + س = ١٨٠°

∴ س + ٢ ص = ١٩٨° ← ١

، −٣ س + ٥ ص = ٢٢° ← ٢

بضرب المعادلة ١ × (٣)

∴ ٣ س + ٦ ص = ٥٩٤° ← ٣

−٣ س + ٥ ص = ٢٢° ← ٢

بالجمع

١١ ص = ٦١٦°

∴ ص = ٥٦°   بالتعويض فى ١

∴ س = ١٩٨° − ٢ ص

= ١٩٨° − ٢ × ٥٦°   ∴ س = ٨٦°

---

٢٠ ∵ $ل_{١}$: س + ص = ٦ ← ١

$ل_{٢}$: ص = ٢ س ← ٢

بالتعويض فى ١ عن ص = ٢ س

∴ س + ٢ س = ٦ ← س = ٢

بالتعويض فى ٢

∴ ص = ٤   ∴ ب(٢ ، ٤)

∴ ارتفاع Δ أ و ب = ٤ وحدات طول

∵ $ل_{١}$ يقطع محور السينات فى النقطة أ

∴ عند ص = صفر ، فإن س = ٦   ∴ أ (٦ ، ٠)

∴ طول قاعدة Δ أ و ب = ٦ وحدات طول

∴ مساحة Δ و أ ب = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٤ = ١٢ وحدة مربعة

---

٢١ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

تفكير إبداعي TIMSS

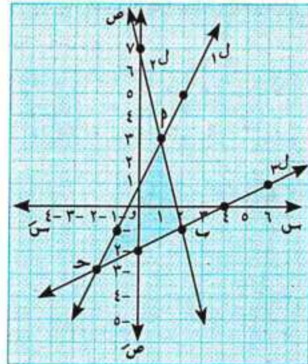
٢٢ (باستخدام الرسم البيانى)

ل١: ص = ٢س + ١ ، ل٢: ص = ٧ − ٤س ، ل٣: ص = $\frac{\text{س} - ٤}{٢}$

س	١	٢	−١
ص	٣	٥	−١

س	٠	١	٢
ص	٧	٣	−١

س	٠	٤	٦
ص	−٢	٠	١



من الرسم رءوس المثلث هى أ (١ ، ٣) ، ب (٢ ، −١) ، حـ (−٢ ، −٣)

٢٣ ، ٢٤ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

إجابة تدريبات الكتاب المدرسى الدرس (١)

١ (أ) {(−٥ ، ٥)}   (ب) ∅

(جـ) {(س ، ص) ∈ ع × ع ، ص = ٦ − ٤س}   (د) ٣   (هـ) ٤

٢ ١ نقطة الأصل   ٢ {(٣ ، ١)}   ٣ ١٢

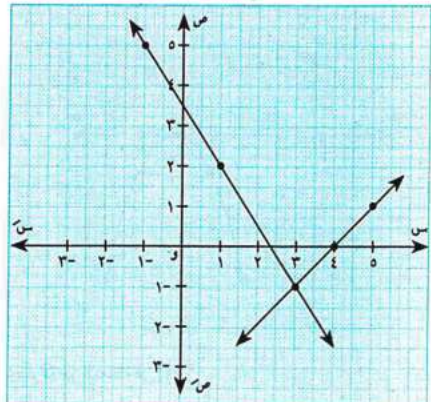
٣ ١ (أ) راجع إجابتك فى «100% إجابات»

(ب) **أولًا: الحل البيانى:**

ص = س − ٤ ، ص = $\frac{٧ - ٣\text{س}}{٢}$

س	٣	٤	٥
ص	−١	صفر	١

س	١	−١	٣
ص	٢	٥	−١



∴ م.ح = {(٣ ، −١)}

ثانيًا: الحل الجبرى:

س = ص + ٤ ← ①

٣س + ٢ص = ٧ ← ②

بالتعويض من المعادلة ① فى المعادلة ②

٣(ص + ٤) + ٢ص = ٧

٣ص + ١٢ + ٢ص = ٧ ← ص = −١

بالتعويض فى ①

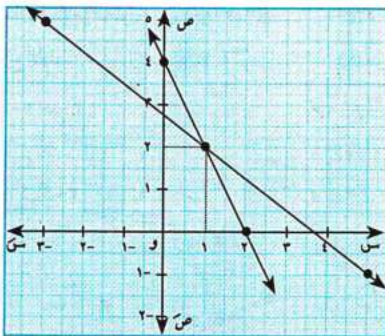
س = −١ + ٤ = ٣   ∴ م.ح = {(٣ ، −١)}

(جـ) **أولًا: الحل البيانى:**

ص = $\frac{١١ - ٣\text{س}}{٤}$ ، ص = ٤ − ٢س

س	−٣	١	٥
ص	٥	٢	−١

س	٠	١	٢
ص	٤	٢	٠



∴ م.ح = {(١ ، ٢)}

ثانيًا: الحل الجبرى:

٣س + ٤ص = ١١ ← ①

٢س + ص = ٤ ← ② × −٤

٣س + ٤ص = ١١

−٨س − ٤ص = −١٦   بالجمع

−٥س = −٥   ∴ س = ١

بالتعويض فى ②

∴ ٢ + ص = ٤   ∴ ص = ٢

∴ م.ح = {(١ ، ٢)}

(د) ، (هـ) ، (و) راجع إجابتك فى «100% إجابات»

٢ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

٣ نفرض أن قياس الزاوية الكبرى هو س

قياس الزاوية الصغرى هو ص

س + ص = ٩٠° ← ①   لأن الزاويتين متتامتان

س − ص = ٥٠° ← ②

بجمع ① ، ②

٢س = ١٤٠° ← س = ٧٠°

بالتعويض فى المعادلة ①

ص = ٢٠°   قياس الزاويتين ٧٠° ، ٢٠°

٤ نفرض أن: قياس الزاوية الكبرى هو س ، قياس الزاوية الصغرى هو ص

∴ ٢س = ٧ ص ← (١)

س + ص = ١٨٠ ← (٢) لأن الزاويتين متكاملتان

من (١) س = $\frac{٧}{٢}$ ص ← (٣)

بالتعويض من المعادلة (٣) في المعادلة (٢)

∴ $\frac{٧}{٢}$ ص + ص = ١٨٠   (× ٢)

٧ص + ٢ص = ٣٦٠   ٩ ص = ٣٦٠

∴ ص = ٤٠ بالتعويض في (٢)   ∴ س = ١٤٠

قياس الزاوية الكبرى = ١٤٠°

قياس الزاوية الصغرى = ٤٠°

٥ ، ٦ راجع إجابتك في «100% إجابات»

إجابة اختبر نفسك من أسئلة المحافظات على الدرس (١)

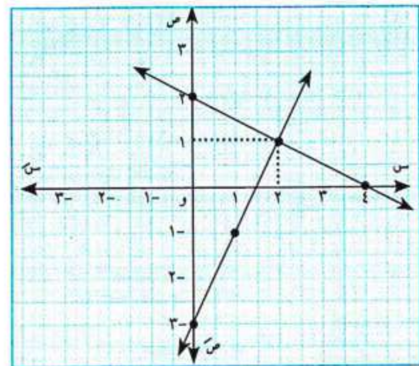
١ (١) عددًا لا نهائيًا من الحلول   (٢) {(-٣ ، ٣)}   (٣) ٥

(٤) الربع الأول   (٥) ١   (٦) متوازيين

٢ (١) ص = ٢ س - ٣ ، ص = $\frac{٤ - س}{٢}$

س	٠	١	٢
ص	-٣	-١	١

س	٠	٢	٤
ص	٢	١	٠



∴ من الرسم: مجموعة الحل = {(٢ ، ١)}

٢ نفرض أن طول المستطيل = س سم ، عرض المستطيل = ص سم

∴ س = ٢ ص

أي أن: س - ٢ ص = ٠ ← (١)

، ٢ س + ٢ ص = ١٨ ← (٢)

بجمع المعادلتين (١) ، (٢) ينتج أن:

٣ س = ١٨

∴ س = ٦ (بالتعويض عن س في المعادلة (١))

∴ ص = ٣

أي أن: طول المستطيل = ٦ سم ، عرض المستطيل = ٣ سم

∴ مساحة المستطيل = ٦ × ٣ = ١٨ سم^{٢}

٣ ∵ (١ ، ٢) حل للمعادلة أ س + ب ص + ٥ = ٠

∴ أ + ٢ ب = -٥ ← (١)

، ∵ (١ ، ٢) حل للمعادلة ٢ أ س + ب ص - ١ = ٠

∴ ٢ أ + ٢ ب = ١ ← (٢)

بضرب المعادلة (١) في (-١) ، ثم جمع المعادلتين

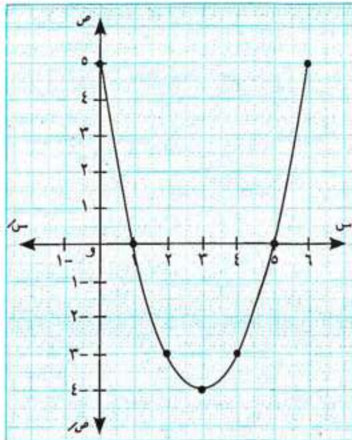
∴ أ = ٦   وبالتعويض في المعادلة (١) ينتج أن:

٢ ب = -١١   ب = -٥ $\frac{١}{٢}$

إجابة أسئلة س سؤال الدرس (٢)

١ د(س) = س^{٢} - ٦ س + ٥

س	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
د(س)	٥	٠	-٣	-٤	-٣	٠	٥

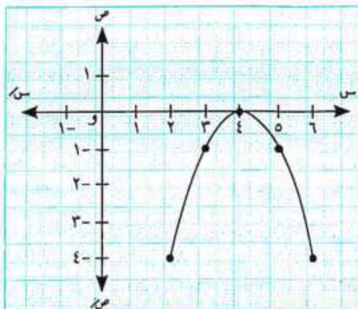


(١) نقطة رأس المنحنى (٣ ، -٤)   (٢) القيمة الصغرى للدالة د = -٤

(٣) م.ح = {١ ، ٥}

٢ د(س) = ٨ س - س^{٢} - ١٦ = -س^{٢} + ٨ س - ١٦

س	٢	٣	٤	٥	٦
د(س)	-٤	-١	٠	-١	-٤

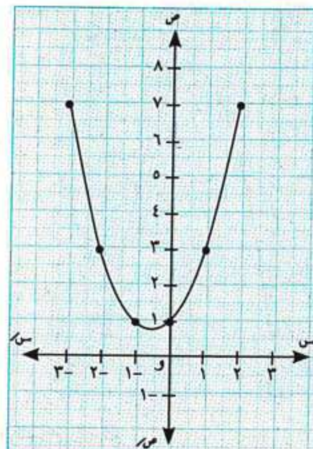


∴ مجموعة حل المعادلة هي {٤}

هي نفسها مجموعة حل المعادلة: س^{٢} - ٨ س + ١٦ = ٠

٣ د(س) = س٢ + س + ١

س	-٣	-٢	-١	٠	١	٢
د(س)	٧	٣	١	١	٣	٧



نقطة رأس المنحنى: (-١/٢ ، ٣/٤)

∵ منحنى الدالة لا يقطع محور السينات

∴ مجموعة الحل = ∅

---

٤ (١) س٢ - س - ٥ = ٠ ⟸ أ = ١ ، ب = -١ ، حـ = -٥

س = (١ ± √(١ + ٤ × ١ × ٥)) / ٢

س = (١ ± √٢١) / ٢

س ≃ (١ + ٤,٦) / ٢ أو س ≃ (١ - ٤,٦) / ٢

س ≃ ٢,٨ أو س ≃ -١,٨

م.ح = {٢,٨ ، -١,٨}

(٢) س٢ - ١٠س - ١ = ٠

أ = ١ ، ب = -١٠ ، حـ = -١

∴ س = (-ب ± √(ب٢ - ٤أحـ)) / ٢أ

∴ س = (-(-١٠) ± √((-١٠)٢ - ٤(١)(-١))) / ٢(١) = (١٠ ± √(١٠٠ + ٤)) / ٢

∴ س = (١٠ ± √١٠٤) / ٢ = (١٠ ± ٢√٢٦) / ٢

∴ س = ٥ ± √٢٦

∴ م.ح = {٥ + √٢٦ ، ٥ - √٢٦}

٥ (١) س٢ + س - ٣ = ٠ أ = ١ ، ب = ١ ، حـ = -٣

س = (-١ ± √(١ + ٤ × ١ × ٣)) / ٢

س = (-١ ± √١٣) / ٢

س ≃ (-١ + ٣,٦) / ٢ أو س ≃ (-١ - ٣,٦) / ٢

س ≃ ١,٣ أو س ≃ -٢,٣

م.ح = {١,٣ ، -٢,٣}

(٢) س + ١/س = ٦ (× س) ⟸ ∴ س٢ + ١ = ٦س

∴ س٢ - ٦س + ١ = ٠ ⟸ أ = ١ ، ب = -٦ ، حـ = ١

س = (٦ ± √(٣٦ - ٤ × ١ × ١)) / ٢

س = (٦ ± √٣٢) / ٢ = (٦ ± ٤√٢) / ٢ = ٣ ± ٢√٢

س ≃ ٠,١٧ أو س ≃ ٥,٨٣

م.ح = {٠,١٧ ، ٥,٨٣}

---

٦ بفرض أن الطول هو (س) متر ∴ العرض هو (س - ١٤) متر

∵ المساحة = الطول × العرض = س(س - ١٤) = ١٦٣٢

∴ س٢ - ١٤س - ١٦٣٢ = ٠

أ = ١ ، ب = -١٤ ، حـ = -١٦٣٢

∴ س = (١٤ ± √((-١٤)٢ - ٤(١)(-١٦٣٢))) / ٢(١) = (١٤ ± √٦٧٢٤) / ٢

= (١٤ ± ٨٢) / ٢

س = ٤٨ أو س = -٣٤ (مرفوض)

∴ الطول = ٤٨ مترًا

العرض = ٤٨ - ١٤ = ٣٤ مترًا

---

٧ (١) {٢ ، ١/٢} (٢) م.ح = {٠,٤٣٨٤ ، ٤,٥٦١٦}

إجابة تدريبات الأضواء الدرس (٢)

أولًا: حل معادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد بيانيًا:

١ (١) صفر (٢) {١ ، ٣} (٣) (٢ ، ٠)،(١ ، ٠)

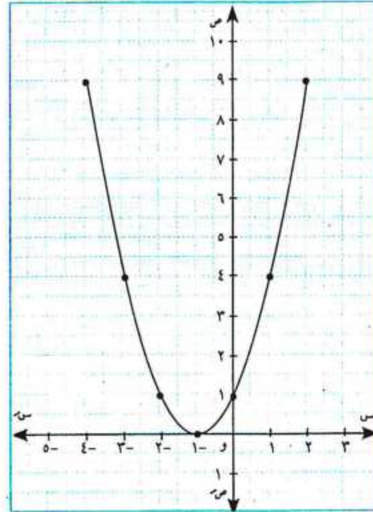
(٤) -١ (٥) (٠ ، حـ) (٦) ١٢

(٧) ∅ (٨) {٤ ، -١} (٩) ٢ (١٠) س=٢

(١١) {-٣} (١٢) صفر (١٣) ١ (١٤) -٨

٢ ١ د(س) = $س^٢ + ٢س + ١$

س	-٤	-٣	-٢	-١	٠	١	٢
د(س)	٩	٤	١	٠	١	٤	٩



من الرسم: مجموعة الحل = {-١}

إحداثى نقطة رأس المنحنى (-١ ، ٠)

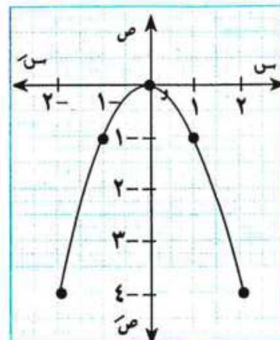
القيمة الصغرى للدالة = ٠

معادلة محور التماثل: س = -١

٢ ، ٣ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

٤ د(س) = $- س^٢$

س	-٢	-١	٠	١	٢
د(س)	-٤	-١	٠	-١	-٤



من الرسم: مجموعة الحل = {٠}

إحداثى نقطة رأس المنحنى (٠ ، ٠)

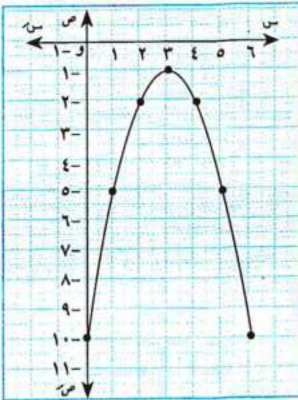
القيمة العظمى للدالة = ٠

معادلة محور التماثل: س = ٠

٥ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

٦ د(س) = $- س^٢ + ٦ س - ١٠$

س	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦
د(س)	-١٠	-٥	-٢	-١	-٢	-٥	-١٠



من الرسم: م. ح = ∅

إحداثى نقطة رأس المنحنى: (٣ ، -١)

القيمة العظمى للدالة = -١ معادلة محور التماثل: س = ٣

٧ ، ٨ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

ثانيا: حل المعادلة من الدرجة الثانية فى مجهول واحد جبريًا باستخدام القانون العام:

٣ ١ ٢ ٢ ∅ ٣ $\{٠ ، \frac{-٥}{٢}\}$ ٤ {٢}

٥ ٤ ٦ صفر ٧]٣ ، ∞[

---

٤ ١ $س^٢ - ٤س + ١ = ٠$

أ = ١ ، ب = -٤ ، جـ = ١

∵ $ب^٢ - ٤ أ جـ = ١٦ - ٤ (١)(١) = ١٢$

∵ $س = \frac{٤ \pm \sqrt{١٢}}{٢}$

$س = \frac{٤ + ٢\sqrt{٣}}{٢}$ أو $س = \frac{٤ - ٢\sqrt{٣}}{٢}$

$س \simeq ٣,٧$ أو $س \simeq ٠,٣$

∴ م. ح = {٣,٧ ، ٠,٣}

٢ $س^٢ - ٢ س - ٤ = ٠$

أ = ١ ، ب = -٢ ، جـ = -٤

∵ $ب^٢ - ٤ أ جـ = (-٢)^٢ - ٤ (١)(-٤) = ٢٠$

∵ $س = \frac{٢ \pm \sqrt{٢٠}}{٢} = ١ \pm \sqrt{٥}$

$س = ١ + \sqrt{٥}$ أو $س = ١ - \sqrt{٥}$

∴ م. ح = $\{١ + \sqrt{٥} ، ١ - \sqrt{٥}\}$

٣ ٣ س² − ٥ س + ١ = ٠

أ = ٣ ، ب = −٥ ، جـ = ١

∵ ب² − ٤ أ جـ = (−٥)² − ٤ (٣) (١) = ١٣

∴ س = $\frac{٥ \pm \sqrt{١٣}}{٦}$

س = $\frac{٥ + \sqrt{١٣}}{٦}$ أو س = $\frac{٥ - \sqrt{١٣}}{٦}$

مجموعة الحل = $\left\{\frac{٥ + \sqrt{١٣}}{٦} ، \frac{٥ - \sqrt{١٣}}{٦}\right\}$

٤ ٢س² + ٥س − ٦ = ٠ أ = ٢ ، ب = ٥ ، جـ = −٦

∵ ب² − ٤ أ جـ = ٢٥ + ٤ × ٢ × ٦ = ٧٣

∴ س = $\frac{-٥ \pm \sqrt{٧٣}}{٤}$

س = $\frac{-٥ + \sqrt{٧٣}}{٤}$ أو س = $\frac{-٥ - \sqrt{٧٣}}{٤}$

س ≃ ٠,٩ أو س ≃ −٣,٤

∴ م.ح = {٠,٩ ، −٣,٤}

٥ س (س − ٢) = ١

∴ س² − ٢ س − ١ = ٠

أ = ١ ، ب = −٢ ، جـ = −١

∵ ب² − ٤ أ جـ = ٤ − ٤ (١) (−١) = ٨

∴ س = $\frac{٢ \pm ٢\sqrt{٢}}{٢}$ = ١ ± $\sqrt{٢}$

س ≃ ٢,٤١٤ أو س ≃ −٠,٤١٤

م.ح = {٢,٤١٤ ، −٠,٤١٤}

٦ س² − ٣س + ١ = ٠

أ = ١ ، ب = −٣ ، جـ = ١

∵ ب² − ٤ أ جـ = ٩ − ٤ × ١ × ١ = ٥

∴ س = $\frac{٣ \pm \sqrt{٥}}{٢}$

س = $\frac{٣ + \sqrt{٥}}{٢}$ أو س = $\frac{٣ - \sqrt{٥}}{٢}$

س ≃ ٢,٦ أو س ≃ ٠,٤

∴ م.ح = {٢,٦ ، ٠,٤}

من ٧ إلى ١٤ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

---

٥ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

ثالثًا: تطبيقات على حل معادلة الدرجة الثانية فى مجهول واحد:

٦ المسافة الأفقية التى يقطعها الدولفين عند قفزه من الماء يكون عندها ارتفاع الدولفين فوق سطح الماء يساوى صفرًا.

أى أن ص = ٠

∴ −٠,٢ س² + ٢ س = ٠ (× −١٠)

٢ س² − ٢٠ س = ٠

٢ س (س − ١٠) = ٠

٢س = ٠ | س = ١٠

س = ٠

∴ المسافة الأفقية تساوى ١٠ أقدام.

تفكير إبداعى TIMSS

٧ ٢$\left(\frac{١}{س - ٢}\right)^٢$ + ٣$\left(\frac{١}{س - ٢}\right)$ − ٥ = ٠ بوضع $\frac{١}{س - ٢}$ = ص

∴ ٢ ص² + ٣ ص − ٥ = ٠ ⟸ أ = ٢ ، ب = ٣ ، جـ = −٥

ص = $\frac{-(٣) \pm \sqrt{(٣)^٢ - ٤ (٢)(-٥)}}{٢(٢)}$

= $\frac{-(٣) \pm \sqrt{٩ + ٤٠}}{٤}$ = $\frac{-٣ \pm ٧}{٤}$

∴ ص = ١ أو ص = $\frac{-٥}{٢}$

∴ $\frac{١}{س - ٢}$ = ١ أو $\frac{١}{س - ٢}$ = $\frac{-٥}{٢}$

∴ س − ٢ = ١ أو −٥س + ١٠ = ٢

س = ٣ أو س = $\frac{٨}{٥}$

∴ م.ح = {٣ ، $\frac{٨}{٥}$}

---

٨ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

---

٩ أولًا: ∵ عدد أقطار مضلع عدد أضلاعه ن = $\frac{١}{٢}$ ن (ن − ٣)

إذا كان عدد الأقطار ٦٥ قطرًا

$\frac{١}{٢}$ ن (ن − ٣) = ٦٥ (× ٢)

∴ ن (ن − ٣) = ٢ × ٦٥ ∴ ن² − ٣ ن − ١٣٠ = ٠

أ = ١ ، ب = −٣ ، جـ = −١٣٠

∴ ن = $\frac{-(-٣) \pm \sqrt{(-٣)^٢ - ٤ (١)(-١٣٠)}}{٢(١)}$

∴ ن = $\frac{٣ \pm \sqrt{٩ + ٥٢٠}}{٢}$ ∴ ن = $\frac{٣ \pm ٢٣}{٢}$

∴ ن = ١٣ أو ن = −١٠ (مرفوض)

∴ المضلع الذى عدد أضلاعه ١٣ ضلعًا به ٦٥ قطرًا

ثانيًا: إذا كان عدد الأقطار ٨٠ قطرًا

$\therefore \frac{1}{2}\text{ن}(\text{ن}-٣)=٨٠$ (×٢)

$\therefore \text{ن}^2-٣\text{ن}-١٦٠=٠$

أ = ١ ، ب = −٣ ، جـ = −١٦٠

$\therefore \text{ن}=\frac{(-٣)\pm\sqrt{(-٣)^2-٤(١)(-١٦٠)}}{٢(١)}$

$\therefore \text{ن}=\frac{٩\pm\sqrt{٩+٦٤٠}}{٢}=\frac{٩\pm\sqrt{٦٤٩}}{٢}\notin \text{ص}_+$

∴ لا يوجد مضلع به ٨٠ قطرًا

إجابة تدريبات الكتاب المدرسى الدرس (٢)

١ (أ) $\text{س}^2-٢\text{س}-٦=٠$

أ = ١ ، ب = −٢ ، جـ = −٦

$\because \text{ب}^2-٤\text{أجـ}=٤+٤\times١\times٦=٢٨$

$\therefore \text{س}=\frac{٢\pm\sqrt{٢٨}}{٢}=\frac{٢\pm٢\sqrt{٧}}{٢}$

$\therefore \text{س}=١+\sqrt{٧}$ أو $\text{س}=١-\sqrt{٧}$

م.ح = {٣,٦٤٦ ، −١,٦٤٦}

(ب) $\text{س}^2+٣\text{س}-٣=٠$

أ = ١ ، ب = ٣ ، جـ = −٣

$\because \text{ب}^2-٤\text{أجـ}=٩-٤(١)(-٣)=٢١$ $\therefore \text{س}=\frac{-٣\pm\sqrt{٢١}}{٢}$

∴ س ≃ ٠,٧٩١ أو س ≃ −٣,٧٩١

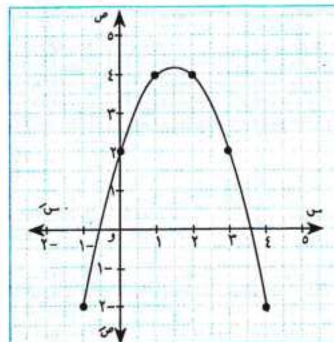
∴ م.ح = {٠,٧٩١ ، −٣,٧٩١}

(جـ)، (د)، (هـ)، (و)، (ز)، (ح)، (ط) راجع إجابتك فى «100% إجابات»

٢ (أ)، (ب) راجع إجابتك فى «100% إجابات»

(جـ) $\text{د}(\text{س})=-\text{س}^2+٣\text{س}+٢$

س	−١	٠	١	٢	٣	٤
د(س)	−٢	٢	٤	٤	٢	−٢

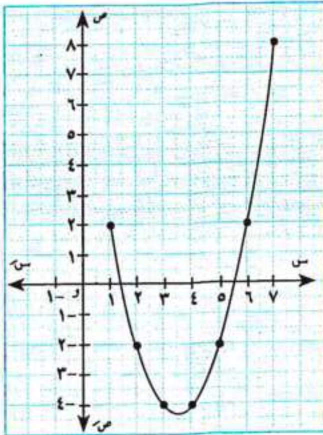


من الرسم: مجموعة الحل = {−٠,٦ ، ٣,٦}

(د)، (هـ)، (و) راجع إجابتك فى «100% إجابات»

(ز) $\text{د}(\text{س})=\text{س}^2-٧\text{س}+٨$

س	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
د(س)	٢	−٢	−٤	−٤	−٢	٢	٨



من الرسم: مجموعة الحل = {١,٤ ، ٥,٦}

٣ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

٤ ∵ أقصى مسافة أفقية يصل إليها الماء عندما يكون ارتفاع الماء (ص) = صفر

$\therefore -٠,٠٦\text{س}^2+١,٢\text{س}+٠,٨=٠$

أ = −٠,٠٦ ، ب = ١,٢ ، جـ = ٠,٨

$\text{س}=\frac{-١,٢\pm\sqrt{(١,٢)^2+٤\times٠,٠٦\times٠,٨}}{٢\times-٠,٠٦}$

∴ س ≃ ٢١ أو س ≃ −١ (مرفوض)

∴ أقصى مسافة أفقية يصل إليها الماء ≃ ٢١ م

٥ $\because ١٦٠=٢٤\text{ن}+٤,٩\text{ن}^2$

$\therefore ٤,٩\text{ن}^2+٢٤\text{ن}-١٦٠=٠$

∴ أ = ٤,٩ ، ب = ٢٤ ، جـ = −١٦٠

$\therefore \text{ن}=\frac{-٢٤\pm\sqrt{٥٧٦+٣١٣٦}}{٩,٨}=\frac{-٢٤\pm\sqrt{٣٧١٢}}{٩,٨}$

∴ ن ≃ ٣,٧٧ أو ن ≃ −٨,٦٧ (مرفوض)

∴ يصل الصقر إلى الثعبان فى زمن ≃ ٣,٧٧ دقيقة

∴ يتمكن الثعبان من الهرب فى زمن أقل من ٣,٧٧ دقيقة.

إجابة اختبر نفسك من أسئلة المحافظات حتى الدرس (٢)

١ (١) صفر (٢) ٧ (٣) صفر

(٤) (−١ ، ٢) (٥) ٦ (٦) {١ ، ٣}

---

٢ (١) (أ) س^{٢} − ٣س − ٢ = ٠

أ = ١ ، ب = −٣ ، حـ = −٢

س = $\frac{٣ \pm \sqrt{٩ + ٤ \times ١ \times ٢}}{٢ \times ١}$ = $\frac{٣ \pm \sqrt{١٧}}{٢}$

م . ح = {٣,٥٦ ، −٠,٥٦}

(ب) س + $\frac{١}{س}$ + ٣ = ٠ (× س)

س^{٢} + ٣س + ١ = ٠ أ = ١ ، ب = ٣ ، حـ = ١

س = $\frac{-٣ \pm \sqrt{٩ - ٤}}{٢}$ = $\frac{-٣ \pm \sqrt{٥}}{٢}$

م . ح = {−٠,٣٨ ، −٢,٦٢}

(٢) ∵ (١ ، −٢) حل للمعادلة ٣ أ س + ب ص = ٥

∴ ٣ أ − ٢ ب = ٥ (١)

، ∵ (١ ، −٢) حل للمعادلة أ س − ب ص = −١

∴ أ + ٢ ب = −١ (٢)

بجمع المعادلتين (١) ، (٢) ينتج أن ٤ أ = ٤

∴ أ = ١

بالتعويض فى المعادلة (١)

∴ ٣ − ٢ ب = ٥

−٢ ب = ٢

∴ ب = −١

إجابة أسئلة س سؤال الدرس (٣)

١ (١) ص = س ← (١)

ص = س^{٢} − ٣س ← (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢)

∴ س = س^{٢} − ٣س

س^{٢} − ٤س = ٠

س(س − ٤) = ٠

س = ٠ أو س = ٤

بالتعويض فى (١)

إما ص = ٠ أو ص = ٤

∴ م . ح = {(٠ ، ٠) ، (٤ ، ٤)}

(٢) ص = س + ٣ بالتعويض فى المعادلة س^{٢} − س ص + ص^{٢} = ١٣

∴ س^{٢} − س (س + ٣) + (س + ٣)^{٢} = ١٣

س^{٢} − س^{٢} − ٣س + س^{٢} + ٦ س + ٩ = ١٣

س^{٢} + ٣ س − ٤ = ٠

∴ (س + ٤) (س − ١) = ٠

∴ س = − ٤ أو س = ١

عندما س = − ٤ ص = − ٤ + ٣ = −١

عندما س = ١ ∴ ص = ١ + ٣ = ٤

∴ م . ح = {(−٤ ، −١) ، (١ ، ٤)}

---

٢ (١) نفرض أن العددين هما س ، ص

س + ص = ٧ ⟸ ص = ٧ − س ← (١)

س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥ ← (٢)

بالتعويض من المعادلة (١) فى المعادلة (٢)

س^{٢} + (٧ − س)^{٢} = ٢٥

س^{٢} + ٤٩ − ١٤س + س^{٢} = ٢٥

٢س^{٢} − ١٤س + ٢٤ = ٠ (÷٢)

س^{٢} − ٧س + ١٢ = ٠

(س − ٤) (س − ٣) = ٠

إما س = ٤ أو س = ٣

بالتعويض فى المعادلة (١)

∴ ص = ٣ أو ص = ٤

العددان هما ٤ ، ٣

(٢) نفرض أن طولى ضلعى القائمة هما س سم ، ص سم

∴ س^{٢} + ص^{٢} = (١٣)^{٢} ⟸ س^{٢} + ص^{٢} = ١٦٩ ← (١)

، س + ص + ١٣ = ٣٠ ⟸ س + ص = ١٧ ← (٢)

من المعادلة (٢) ∴ ص = ١٧ − س

بالتعويض فى المعادلة (١)

∴ س^{٢} + (١٧ − س)^{٢} = ١٦٩

س^{٢} + ٢٨٩ − ٣٤س + س^{٢} − ١٦٩ = ٠

∴ ٢س^{٢} − ٣٤ س + ١٢٠ = ٠ (÷٢)

∴ س^{٢} − ١٧ س + ٦٠ = ٠

(س − ٥) (س − ١٢) = ٠

∴ س = ٥ أو س = ١٢

عندما س = ٥ ∴ ص = ١٧ − ٥ = ١٢

عندما س = ١٢ ∴ ص = ١٧ − ١٢ = ٥

∴ طولا ضلعى القائمة ٥ سم ، ١٢ سم

∴ مساحة المثلث القائم = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى ضلعى القائمة

∴ مساحة سطح المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ٥ × ١٢ = ٣٠ سم^{٢}

١٣ سم
س
ص

إجابة تدريبات الأضواء الدرس (٣)

أولًا: حل معادلتين فى متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية:

١ ١ الثانية	٢ (−٢ ، ١)	٣ {(٢ ، ٣)}
٤ (٢ ، ١)	٥ (٤ ، ٣)	٦ ٣
٧ {(−١ ، −١)، (١ ، ١)}	٨ {(١ ، −١) ، (−١ ، ١)}	
٩ {(١ ، ١)}	١٠ ٣	
١١ ٣	١٢ ١٢	

---

٢ ١ ∵ س = ٣

∴ (٣)^{٢} + ص^{٢} = ٢٥ ⟸ ٩ + ص^{٢} = ٢٥

ص^{٢} = ١٦ ∴ ص = ± ٤

م . ح = {(٣ ، ٤) ، (٣ ، −٤)}

٢ س = ص س^{٢} + س^{٢} = ٥٠

٢س^{٢} = ٥٠ ∴ س^{٢} = ٢٥

س = ٥ أو س = −٥ ∴ ص = ٥ أو ص = −٥

م . ح = {(٥ ، ٥) ، (−٥ ، −٥)}

٣ س = ٠ ∴ ص^{٢} + ٣ ص − ١٠ = ٠

(ص − ٢)(ص + ٥) = ٠ ∴ ص = ٢ أو ص = −٥

م . ح = {(٠ ، ٢) ، (٠ ، −٥)}

٤ ص = ٢ س ∴ س (٢ س) = ٨

∴ ٢ س^{٢} = ٨ س = ± ٢

∴ ص = ± ٤ م . ح = {(٢ ، ٤) ، (−٢ ، −٤)}

٥ س = ٢ ص + ٥ ← (١)

س^{٢} − ٢ س ص = ١٥ ← (٢)

∴ (٢ ص + ٥)^{٢} − ٢ ص (٢ ص + ٥) − ١٥ = ٠

٤ ص^{٢} + ٢٠ ص + ٢٥ − ٤ ص^{٢} − ١٠ ص − ١٥ = ٠

١٠ ص = −١٠ ∴ ص = −١

وبالتعويض فى (١)

∴ س = ٢ (−١) + ٥ = ٣

م . ح = {(٣ ، −١)}

من ٦ إلى ١١ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

١٢ ص = ٢س − ١ (١)

س^{٢} − ص^{٢} = (٢س − ٢ص)(ص − ٢س) (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢)

س^{٢} − (٢س − ١)^{٢} = [٢س − ٢(٢س − ١)] [٢س − ١ − ٢س]

س^{٢} − ٤س^{٢} + ٤س − ١ = (−٢س + ٢)(− ١)

−٣س^{٢} + ٤س − ١ = ٢س − ٢

−٣س^{٢} + ٢س + ١ = ٠ (× −١)

٣س^{٢} − ٢س − ١ = ٠

(٣س + ١)(س − ١) = ٠

٣ س + ١

س − ١

س = $\frac{-١}{٣}$ | س = ١

بالتعويض فى (١)

ص = $\frac{-٥}{٣}$ أو ص = ١

م . ح = {($\frac{-١}{٣}$ ، $\frac{-٥}{٣}$) ، (١ ، ١)}

---

٣ يوجد حلان وليس حلًا واحدًا:

أولًا: بيانيًا:

المستقيم على امتداده والمنحنى على امتداده يتقاطعان فى نقطة أخرى بخلاف (٠ ، ٤)

ثانيًا: جبريًا:

ص = ٢س + ٤ ← (١)

ص = س^{٢} − ٣س + ٤ ← (٢)

بالتعويض من المعادلة (١) فى المعادلة (٢)

٢س + ٤ = س^{٢} − ٣س + ٤

∴ س^{٢} − ٥س = ٠

س (س − ٥) = ٠

س = ٠ أو س = ٥

ص = ٤ أو ص = ١٤

∴ الحلان هما: (٠ ، ٤) ، (٥ ، ١٤)

ثانيًا: تطبيقات على حل معادلتين فى متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية:

٤ ١ ٨ ، ٩ ٢ ١ ، ٤ ٣ ١ : ٤ ٤ ١٠ ، ٢

٥ ١٢ ، ١٠ ٦ ٢ ، ٣ ٧ ٢٠

---

٥ ١ نفرض أن العددين هما: س ، ص حيث س > ٠ ، ص > ٠

س + ص = ٥ ⟸ ∴ س = ٥ − ص (١)

∵ س^{٢} + ص^{٢} = ١٣ ∴ (٥ − ص)^{٢} + ص^{٢} − ١٣ = ٠

٢ ص^{٢} − ١٠ ص + ١٢ = ٠ (÷٢)

∴ ص^{٢} − ٥ ص + ٦ = ٠

(ص − ٢)(ص − ٣) = ٠ ص = ٢ أو ص = ٣

بالتعويض فى (١)

∴ س = ٣ أو س = ٢ العددان هما: ٢ ، ٣

(٢) نفرض أن العددين هما: س ، ص حيث س > ص

∴ س + ص = ٩

س = ٩ − ص ← (١) ، ∵ س^{٢} − ص^{٢} = ٩ ← (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢)

∴ (٩ − ص)^{٢} − ص^{٢} = ٩ ، ٨١ − ١٨ ص + ص^{٢} − ص^{٢} = ٩

١٨ ص = ٧٢ ∴ ص = ٤

بالتعويض فى (١)

∴ س = ٥ ∴ العددان هما ٥ ، ٤

(٣) بفرض العددين هما س ، ص

∴ س + ص = ٩ ← (١)

س^{٢} − ص^{٢} = ٢٧

(س − ص) (س + ص) = ٢٧

(س − ص) × ٩ = ٢٧

س − ص = ٣ ← (٢)

س + ص = ٩

بالجمع

٢ س = ١٢

س = ٦ بالتعويض فى المعادلة (١) ص = ٣ العددان هما ٦ ، ٣

(٤) نفرض أن العددين هما: س ، ص ، س > ص ، س > ٠ ، ص > ٠

∴ س + ص = ٧ ∴ س = ٧ − ص (١)

∴ ص × ($\frac{١}{٢}$ س) = ٦ ∴ س ص = ١٢ (٢)

من (١) وبالتعويض فى (٢)

∴ ص (٧ − ص) = ١٢ ∴ ص^{٢} − ٧ ص + ١٢ = ٠

(ص − ٣) (ص − ٤) = ٠ ص = ٣ أو ص = ٤

وبالتعويض فى (١)

س = ٤ أو س = ٣ (مرفوض)

∴ س = ٤ ، ص = ٣ العددان هما ٤ ، ٣

من ٥ إلى ١٠ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

(١١) س + ص = ١٢ حيث ص > س

ص = ١٢ − س (١)

س ص = ٣٥ (٢)



بالتعويض من (١) فى (٢)

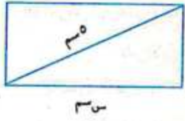
∴ س (١٢ − س) = ٣٥ ⟸ ١٢ س − س^{٢} − ٣٥ = ٠ (× −١)

س^{٢} − ١٢ س + ٣٥ = ٠ ⟸ (س − ٥) (س − ٧) = ٠

∴ س = ٥ أو س = ٧ (مرفوض) ∴ ص = ٧

البعدان هما ٥سم ، ٧سم

(١٢) بفرض الطول = س سم والعرض = ص سم



طول القطر = ٥ سم ،

∵ (س + ص) = $\frac{١}{٢}$ محيط المستطيل

∴ س + ص = ٧

ص = ٧ − س (١)

ومن نظرية فيثاغورث

س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥ (٢)

من (١) وبالتعويض فى (٢)

∴ س^{٢} + (٧ − س)^{٢} = ٢٥

س^{٢} + ٤٩ − ١٤ س + س^{٢} − ٢٥ = ٠

٢ س^{٢} − ١٤ س + ٢٤ = ٠ (÷ ٢)

س^{٢} − ٧ س + ١٢ = ٠ ⟸ (س − ٣) (س − ٤) = ٠

س = ٣ (مرفوض) أو س = ٤ ∴ ص = ٣

∴ بعدا المستطيل ٤ سم ، ٣ سم

١٣ بفرض أن الطول س سم ، العرض = ص سم

س = ٢ص (١)

س ص = ١٨ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢)

∴ ٢ص^{٢} = ١٨ ⟸ ص^{٢} = ٩

ص = ٣ (السالب مرفوض لأن الأطوال موجبة دائمًا)

بالتعويض فى (١) ∴ س = ٦

الطول = ٦ سم ، العرض = ٣ سم

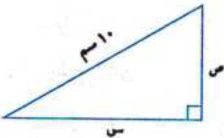
١٤ بفرض أن طولى ضلعى القائمة هما س سم ، ص سم

∴ س + ص + ١٠ = ٢٤

∴ س + ص = ١٤ ⟸ س = ١٤ − ص (١)

من فيثاغورث

س^{٢} + ص^{٢} = ١٠٠ (٢)



بالتعويض من (١) فى (٢)

∴ (١٤ − ص)^{٢} + ص^{٢} = ١٠٠

١٩٦ − ٢٨ ص + ص^{٢} + ص^{٢} = ١٠٠

٢ ص^{٢} − ٢٨ ص + ٩٦ = ٠ (÷ ٢)

ص^{٢} − ١٤ ص + ٤٨ = ٠

∴ (ص − ٦) (ص − ٨) = ٠

ص = ٦ | ص = ٨

بالتعويض فى (١) س = ٨ أو س = ٦

طولا ضلعى القائمة هما ٨ سم ، ٦ سم

١٥ ، ١٦ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

١٧ نفرض أن: عمر الأب الآن هو س

عمر الابن الآن هو ص

∴ س − ٣ص = ١ ⟸ س = ١ + ٣ص (١)

س² + ص² − ٣س ص = ١٨١ (٢)

بالتعويض من (١) في (٢)

∴ (١ + ٣ص)² + ص² − ٣(١ + ٣ص) ص = ١٨١

١ + ٦ص + ٩ص² + ص² − ٣ص − ٩ص² − ١٨١ = ٠

ص² + ٣ص − ١٨٠ = ٠ ⟸ (ص + ١٥)(ص − ١٢) = ٠

ص = −١٥ (مرفوض) | ص = ١٢ ، ومنها س = ٣٧

∴ عمر الأب الآن ٣٧ سنة

عمر الابن الآن ١٢ سنة

تفكير إبداعي TIMSS

٦ (أ) س ص = $\frac{١}{١٢}$ ، س + ص = ٧ س ص (٢)

∴ س = $\frac{١}{١٢ ص}$ (١)

بالتعويض من (١) في (٢)

∴ $\frac{١}{١٢ ص}$ + ص = $\frac{٧}{١٢}$ (×١٢ص)

∴ ١ + ١٢ص² = ٧ص

∴ ١٢ص² − ٧ص + ١ = ٠

(٣ص − ١)(٤ص − ١) = ٠

∴ ص = $\frac{١}{٣}$ ، ص = $\frac{١}{٤}$

بالتعويض في (١) | بالتعويض في (١)

∴ س = $\frac{١}{٤}$ | ∴ س = $\frac{١}{٣}$

∴ م.ح = {($\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٣}$)، ($\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$)}

(ب) س + ص = ٥ (١)

$\sqrt{\text{س}}$ + ص = ٣ (٢)

بطرح (٢) من (١)

∴ س − $\sqrt{\text{س}}$ = ٢ ∴ س − $\sqrt{\text{س}}$ − ٢ = ٠

($\sqrt{\text{س}}$ − ٢)($\sqrt{\text{س}}$ + ١) = ٠

∴ $\sqrt{\text{س}}$ = ٢ ، $\sqrt{\text{س}}$ = −١ (مرفوض)

∴ س = ٤ بالتعويض في (١)

∴ ٤ + ص = ٥ ∴ ص = ١

∴ م.ح = {(٤ ، ١)}

٧ معادلة الدالة التربيعية:

د(س) = −س² + ٦س + ٤

∴ لإيجاد إحداثي نقطة أ

نضع س = ٠ لأنها تقع على محور الصادات

ص = −(٠)² + ٦(٠) + ٤ = ٤

∴ إحداثي أ هو: (٠ ، ٤)

∵ ميل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ المار بالنقطتين (٠ ، ٤)، (٢ ، ٦)

هو م = $\frac{٦ − ٤}{٢ − ٠}$ = $\frac{٢}{٢}$ = ١ ∴ معادلة $\overleftrightarrow{\text{أب}}$

هي: ص = س + ٤ ← (١)

∵ ص = −س² + ٦س + ٤ ← (٢)

بحل المعادلتين (١)، (٢) معًا

∴ س + ٤ = −س² + ٦س + ٤ ∴ س² − ٥س = ٠

س(س − ٥) = ٠

س = ٠ أو س = ٥

بالتعويض في (١)

ص = ٤ أو ص = ٩

∴ نقطة التقاطع الأخرى ب (٥ ، ٩)

إجابة تدريبات الكتاب المدرسي الدرس (٣)

١ ١ {(−٣ ، −٣)، (٣ ، ٣)} ٢ (٤ ، ٢) ٣ ٣ ، ٤

٢ ١ (أ) ص = س + ٢ (١)

س² + س ص = ٤ (٢)

بالتعويض من (١) في (٢)

س² + س(س + ٢) = ٤

س² + س² + ٢س − ٤ = ٠

٢س² + ٢س − ٤ = ٠ (÷٢)

س² + س − ٢ = ٠

∴ (س + ٢)(س − ١) = ٠

س = −٢ أو س = ١

بالتعويض في (١)

ص = −٢ + ٢ = ٠ أو ص = ١ + ٢ = ٣

مجموعة الحل = {(−٢ ، ٠)، (١ ، ٣)}

(ب) م.ح = {(٢ ، ١)، (−٢ ، ٣)}

(جـ) م.ح = {(٠ ، $\frac{−١}{٢}$)، (−١ ، −١)}

(د) ص + ٢ س = ٧ ← (١)

٢ س^{٢} + س + ٣ ص = ١٩ ← (٢)

من (١) ص = ٧ − ٢ س

وبالتعويض فى (٢)

٢ س^{٢} + س + ٣ (٧ − ٢ س) = ١٩

∴ ٢ س^{٢} + س + ٢١ − ٦ س − ١٩ = ٠

∴ ٢ س^{٢} − ٥ س + ٢ = ٠

(٢ س − ١) (س − ٢) = ٠

٢ س − ١ = ٠	س − ٢ = ٠
س = $\frac{١}{٢}$	س = ٢
بالتعويض فى (١)	بالتعويض فى (١)
ص = ٦	∴ ص = ٣

∴ م.ح = {($\frac{١}{٢}$ ، ٦) ، (٢ ، ٣)}

(هـ) ، (و) راجع إجابتك فى «100% إجابات»

٢ بفرض الآحاد = س والعشرات = ص

	آحاد	عشرات	قيمة العدد
العدد الأصلى	س	ص	س + ١٠ ص

س = ٢ ص (١)

س ص = $\frac{١}{٢}$ (س + ١٠ ص) (×٢)

٢ س ص = س + ١٠ ص (٢)

من (١) وبالتعويض فى (٢)

٢ ص (٢ ص) = ٢ ص + ١٠ ص

٤ ص^{٢} − ١٢ ص = ٠   ٤ ص (ص − ٣) = ٠

٤ ص = ٠ أو ص − ٣ = ٠

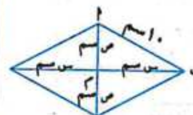
ص = ٠ (مرفوض) أو ص = ٣

∴ س = ٦

العدد = ٣٦

٣ ، ٤ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

٥ بفرض طولى القطرين



٢ س سم ، ٢ ص سم

∵ الفرق بين طولى القطرين = ٤ سم

∴ ٢ س − ٢ ص = ٤ (÷٢)

∴ س − ص = ٢

س = ص + ٢ ← (١)

∵ محيط المعين = ٤٠ سم

∴ طول ضلع المعين = $\frac{\text{محيط المعين}}{٤}$ = $\frac{٤٠}{٤}$ = ١٠ سم

من نظرية فيثاغورث Δ أ م ب قائم الزاوية فى م

∴ س^{٢} + ص^{٢} = ١٠٠ ← (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢)

∴ (ص + ٢)^{٢} + ص^{٢} = ١٠٠   ص^{٢} + ٤ ص + ٤ + ص^{٢} − ١٠٠ = ٠

٢ ص^{٢} + ٤ ص − ٩٦ = ٠ (÷٢)

ص^{٢} + ٢ ص − ٤٨ = ٠   (ص + ٨) (ص − ٦) = ٠

ص = −٨ مرفوض   ∴ ص = ٦

بالتعويض فى (١)   ∴ س = ٨

طولا القطرين ١٢ سم ، ١٦ سم

٦ ٥ س − ٢ ص = ١ (١)

، ص = ٢ س^{٢} (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١)

∴ ٥ س − ٤ س^{٢} = ١   ∴ ٤ س^{٢} − ٥ س + ١ = ٠

(٤ س − ١) (س − ١) = ٠

∴ س = $\frac{١}{٤}$ أو س = ١

بالتعويض فى (٢)

∴ ص = $\frac{١}{٨}$ ، ∴ ص = ٢

∴ إحداثى النقطة هو إما (١ ، ٢) أو ($\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٨}$)

إجابة اختبر نفسك من أسئلة المحافظات حتى الدرس (٣)

١ (١) الثانية   (٢) ٧   (٣) نقطة الأصل

(٤) ٢ ، ٦   (٥) {−٢ ، ٤}   (٦) ٤

---

٢ (١) ∵ ص = ٣ + س ← (١)

، س^{٢} − ٢ س + ٣ ص = ١٥ ← (٢)

من (١) فى (٢)   ∴ س^{٢} − ٢ س + ٩ + ٣ س = ١٥

∴ س^{٢} + س − ٦ = ٠

(س + ٣) (س − ٢) = ٠

∴ س = −٣	أو س = ٢
بالتعويض فى (١)	بالتعويض فى (١)
∴ ص = ٠	∴ ص = ٥

م.ح = {(−٣ ، ٠) ، (٢ ، ٥)}

(٢) ٢ س − ص = ٤   ∴ ص = ٢ س − ٤ (١)

س ص = ٦ (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢)

س (٢ س − ٤) = ٦   ٢ س^{٢} − ٤ س − ٦ = ٠ (÷٢)

س^{٢} − ٢ س − ٣ = ٠   ∴ (س − ٣) (س + ١) = ٠

∴ س = ٣ أو س = −١   بالتعويض فى (١)

∴ ص = ٢ أو ص = −٦

م.ح = {(٣ ، ٢) ، (−١ ، −٦)}

٣ ٣ س − ص = ٤ ← (١)
∵ ص − ٢ س = ٣ معطى
∴ −٢ س + ص = ٣ ← (٢)
بالجمع (١)، (٢)

س = ٧

بالتعويض في (٢)

∴ ص = ٣ + ٢ س

∴ ص = ١٧

∴ م.ح = {(٧ ، ١٧)}

---

٣ ١ نفرض أن طول المستطيل س سم، وعرضه ص سم

∵ المحيط = ٢٢ سم

∵ الطول + العرض = $\frac{١}{٢}$ محيط المستطيل

∴ س + ص = ١١ ← (١)

∵ مساحته = ٢٤

∴ س ص = ٢٤ ← (٢)

من (١) ص = ١١ − س ← (٣)

بالتعويض في (٢)

∴ س (١١ − س) = ٢٤

∴ ١١ س − س^٢ = ٢٤ (÷ −١)

∴ س^٢ − ١١ س + ٢٤ = ٠

(س − ٣)(س − ٨) = ٠

س = ٣ أو س = ٨

بالتعويض في (٣)

ص = ٨ (مرفوض) أو ص = ٣

∴ بعدي المستطيل هما: ٣ سم، ٨ سم

٢ س^٢ + ٣ س + ١ = ٠

أ = ١ ، ب = ٣ ، جـ = ١

∵ س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤ أ جـ}}{٢ أ}$

∴ س = $\frac{-٣ \pm \sqrt{(٣)^٢ - ٤(١)(١)}}{٢(١)}$

= $\frac{-٣ \pm \sqrt{٩ - ٤}}{٢}$ = $\frac{-٣ \pm \sqrt{٥}}{٢}$

∴ س = $\frac{-٣ + \sqrt{٥}}{٢}$ أو س = $\frac{-٣ - \sqrt{٥}}{٢}$

س ≃ −٠,٤ أو س ≃ −٢,٦

م.ح = {−٠,٤ ، −٢,٦}

إجابة اختبار الأضواء الوحدة الأولى

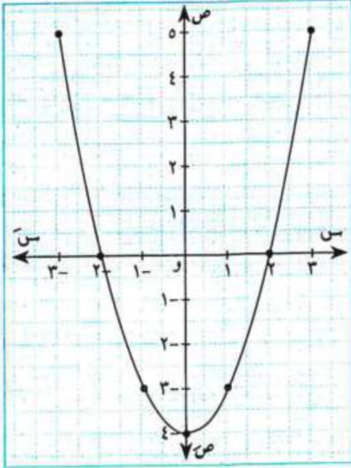
١ ١ عدد لانهائي ٢ ٢٥ ٣ ∅

٤ −٤ ٥ ٣ ٦ ±٣

٧ الثاني ٨ ٣ ، ٤ ٩ {٠ ، ١}

٢ ١ د(س) = س^٢ − ٤

س	−٣	−٢	−١	٠	١	٢	٣
د(س)	٥	٠	−٣	−٤	−٣	٠	٥



من الرسم: م.ح = {٢ ، −٢}

٢ $\frac{١}{س}$ = $\frac{٢ س + ١}{٣}$ ∴ ٢ س^٢ + س = ٣

∴ ٢ س^٢ + س − ٣ = ٠ أ = ٢ ، ب = ١ ، جـ = −٣

∴ س = $\frac{-١ \pm \sqrt{١ - ٤(٢)(-٣)}}{٢ \times ٢}$ = $\frac{-١ \pm \sqrt{١ + ٢٤}}{٤}$ = $\frac{-١ \pm ٥}{٤}$

س = $\frac{-١ + ٥}{٤}$ = ١ أو س = $\frac{-١ - ٥}{٤}$ = −$\frac{٣}{٢}$

م.ح = {١ ، −$\frac{٣}{٢}$}

من ٣ إلى ٥ راجع إجابتك في «100% إجابات»

٦ ٣ س^٢ − ٥ س + ١ = ٠

∴ أ = ٣ ، ب = −٥ ، جـ = ١

∴ س = $\frac{٥ \pm \sqrt{٢٥ - ٤(٣)(١)}}{٢(٣)}$ = $\frac{٥ \pm \sqrt{١٣}}{٦}$

م.ح = {١,٤٣ ، ٠,٢٣}

٧ $\frac{١}{٢}$ ن (ن + ١) = ٦٦٦

∴ ن (ن + ١) = ٢ × ٦٦٦ = ١٣٣٢ ∴ ن^٢ + ن − ١٣٣٢ = ٠

∴ أ = ١ ، ب = ١ ، جـ = −١٣٣٢

∴ ن = $\frac{-١ \pm \sqrt{(١)^٢ - ٤(١)(-١٣٣٢)}}{٢(١)}$ = $\frac{-١ \pm \sqrt{١ + ٥٣٢٨}}{٢}$

= $\frac{-١ \pm \sqrt{٥٣٢٩}}{٢}$ = $\frac{-١ \pm ٧٣}{٢}$

∴ ن = ٣٦ أو ن = −٣٧ (مرفوض)

∴ مجموع الأعداد من ١ إلى ٣٦ هو: ٦٦٦

إجابة اختبار الكتاب المدرسي الوحدة الأولى

١ (١) ٦ (٢) السادسة (٣) ١

٢ ، **٣** راجع إجابتك فى «100% إجابات»

٤ نفرض أن العددين هما س ، ص

∴ س + ص = ٩٠ (١) ، س ص = ٢٠٠٠ (٢)

من (١) ص = ٩٠ − س (٣) ، وبالتعويض فى (٢)

س (٩٠ − س) = ٢٠٠٠ ٩٠ س − س² = ٢٠٠٠

س² − ٩٠ س + ٢٠٠٠ = ٠ (س − ٥٠)(س − ٤٠) = ٠

س = ٥٠ أو س = ٤٠

بالتعويض فى المعادلة (٣)

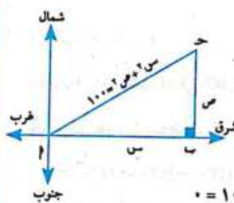
عندما س = ٥٠ ∴ ص = ٤٠ | عندما س = ٤٠ ∴ ص = ٥٠

∴ العددان هما ٤٠ ، ٥٠

٥ أولًا: نفرض أن المسافة بين أ ، ب = س والمسافة بين ب ، حـ = ص

∵ س + ص = ١٤ ← (١)

، س² + ص² = ١٠٠ ← (٢)



من (١) ص = ١٤ − س

بالتعويض فى (٢)

∴ س² + (١٤ − س)² = ١٠٠

∴ س² + ١٩٦ − ٢٨ س + س² − ١٠٠ = ٠

∴ ٢ س² − ٢٨ س + ٩٦ = ٠ (÷ ٢)

∴ س² − ١٤ س + ٤٨ = ٠

∴ (س − ٦)(س − ٨) = ٠ ∴ س = ٦ أو س = ٨

بالتعويض فى (١)

عندما س = ٦ ∴ ص = ٨ | عندما س = ٨ ∴ ص = ٦

∴ المسافة بين أ ، ب = ٨ أو ٦

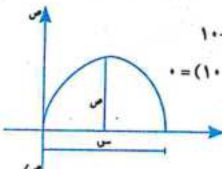
ثانيًا: المسافة بين ب ، حـ = ٦ أو ٨

ثالثًا: أقصر مسافة بين المدينتين أ ، حـ

هى أ حـ = √(س² + ص²) = √١٠٠ هى ١٠ كم

٦ المسافة الأفقية التى يقطعها الدولفين عند قفزه من الماء يكون عندها ارتفاع الدولفين فوق سطح الماء يساوى صفرًا

أى أن ص = ٠



∴ −٠,٢ س² + ٢ س = ٠ ⟸ بالضرب × −١٠

∴ ٢ س² − ٢٠ س = ٠ ⟸ ٢ س (س − ١٠) = ٠

∴ س = ٠ أو س = ١٠

∴ المسافة الأفقية تساوى ١٠ أقدام

إجابات الوحدة الثانية

الدوال الكسرية والعمليات عليها

إجابة أسئلة س سؤال الدرس الأول

١ (١) بوضع د(س) = ٠ ∴ ٥ س = ٠ ⟸ س = ٠

∴ ص(د) = {٠}

(٢) بوضع د(س) = ٠ ∴ س² − س − ٦ = ٠

(س − ٣)(س + ٢) = ٠

س = ٣ | س = −٢

∴ ص(د) = {٣ ، −٢}

(٣) بوضع د(س) = ٠ ∴ (س − ٢)(س² − ٩) = ٠

∴ (س − ٢)(س − ٣)(س + ٣) = ٠

س − ٢ = ٠ أو س − ٣ = ٠ أو س + ٣ = ٠

س = ٢ س = ٣ س = −٣

∴ ص(د) = {٢ ، ٣ ، −٣}

(٤) بوضع د(س) = ٠ ∴ س³ − ٦ س² = ٠

∴ س² (س − ٦) = ٠

س² = ٠ أو س − ٦ = ٠

س = ٠ س = ٦

∴ ص(د) = {٠ ، ٦}

٢ (١) ∵ د(س) = −٧ ∴ ص(د) = ∅

(٢) بوضع د(س) = ٠ ∴ س² − ٤ = ٠

(س − ٢)(س + ٢) = ٠

س = ٢ أو −٢ ∴ ص(د) = {٢ ، −٢}

(٣) بوضع د(س) = ٠

∴ س³ + ١ = ٠ ⟸ س³ = −١

∴ س = −١ ∴ ص(د) = {−١}

(٤) ∵ س² ≥ ٠ لكل س ∈ ح

∴ س² + ١ ≥ ١ لكل س ∈ ح

∴ س² + ١ ≠ ٠ ∴ ص(د) = ∅

٣ (١) (أ) س (س + ٢)(س − ١) = ٠

∴ س = ٠ ، س = −٢ ، س = ١

ص(د) = {٠ ، −٢ ، ١}

(ب) س³ − س = ٠

س (س² − ١) = ٠

س = ٠ أو س = ± ١

ص(د) = {٠ ، ١ ، −١}

(جـ) س^{٣} − ٣٤٣ = ٠

س^{٣} = ٣٤٣

س = ٧

ص (د) = {٧}

(د) بوضع د(س) = ٠

∴ س^{٣} + ٥س^{٢} − ٩س − ٤٥ = ٠

(س^{٣} − ٩س) + (٥س^{٢} − ٤٥) = ٠

س (س^{٢} − ٩) + ٥ (س^{٢} − ٩) = ٠

(س^{٢} − ٩) (س + ٥) = ٠

∴ (س + ٣) (س − ٣) (س + ٥) = ٠

∴ س + ٣ = ٠ أو س − ٣ = ٠ أو س + ٥ = ٠

س = −٣ ، س = ٣ ، س = −٥

∴ ص (د) = {−٣ ، ٣ ، −٥}

٢ ∵ ص (د) = {٢ ، ٤}

∴ د(٢) = ٠

٤أ + ٢ب + ٨ = ٠ (÷٢)

٢أ + ب + ٤ = ٠ ← ①

∵ د(٤) = ٠

∴ ١٦أ + ٤ب + ٨ = ٠ (÷٤)

٤أ + ب + ٢ = ٠ ← ①

بطرح ① من ②

٢أ − ٢ = ٠ ⟸ أ = ١

بالتعويض فى ①

٢ + ب + ٤ = ٠ ⟸ ب = −٦

إجابة تدريبات الأضواء الدرس (١)

مجموعة أصفار الدالة كثيرة الحدود:

١
١ {٥} ٢ {−١ ، ١} ٣ ∅
٤ {١ ، −٢} ٥ {٠ ، ٣} ٦ ح
٧ ∅ ٨ {٠} ٩ {٦ ، ١}
١٠ {$\frac{١}{٢}$} ١١ ∅ ١٢ ٤
١٣ −٤ ١٤ ٢٧ ١٥ صفر
١٦ ٢ ١٧]٤ ، ∞[١٨ ١٨
١٩ ٨

٢
١ ص (د) = {٠}
٢ ص (د) = ∅
٣ $\frac{٢ - س}{٧}$ = ٠ ∴ س = ٢ ∴ ص (د) = {٢}
٤ ص (د) = ∅
٥ س^{٢} − ٢ = ٠ س^{٢} = ٢
س = ± $\sqrt{٢}$ ص (د) = {−$\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٢}$}
٦ ٤٩ س^{٢} = ٣٦ س^{٢} = $\frac{٣٦}{٤٩}$
∴ س = ± $\frac{٦}{٧}$ ص (د) = {$\frac{٦}{٧}$ ، $\frac{-٦}{٧}$}
٧ س^{٦} − ٣٢س = ٠ س (س^{٥} − ٣٢) = ٠
س = ٠ ، س = ٢
∴ ص (د) = {٠ ، ٢}
٨ (س^{٢} − ٩) (س − ٣) = ٠ (س − ٣)^{٢} (س + ٣) = ٠
س = ٣ ، س = −٣
∴ ص (د) = {٣ ، −٣}
٩ س^{٢} − ٥س + ٦ = ٠ (س − ٣) (س − ٢) = ٠
س = ٣ ، س = ٢ ص (د) = {٢ ، ٣}

١٠ ، ١١ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

١٢ س^{٤} − ١٣س^{٢} + ٣٦ = ٠ (س^{٢} − ٤) (س^{٢} − ٩) = ٠
(س − ٢) (س + ٢) (س − ٣) (س + ٣) = ٠
س = ٢ ، س = −٢ ، س = ٣ ، س = −٣
∴ ص (د) = {٢ ، −٢ ، ٣ ، −٣}

من ١٣ إلى ١٥ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

١٦ (س − ٣) (س + ٦) + ٨ = ٠
س^{٢} + ٣س − ١٨ + ٨ = ٠
س^{٢} + ٣س − ١٠ = ٠
(س + ٥) (س − ٢) = ٠
س = −٥ ، س = ٢ ص (د) = {−٥ ، ٢}
١٧ بوضع د(س) = ٠
∴ (٢س − ١)^{٢} − (س + ٣)^{٢} = ٠
∴ ٤س^{٢} − ٤س + ١ − (س^{٢} + ٦س + ٩) = ٠
∴ ٤س^{٢} − ٤س + ١ − س^{٢} − ٦س − ٩ = ٠
∴ ٣س^{٢} − ١٠س − ٨ = ٠
(٣س + ٢)(س − ٤) = ٠
٣س + ٢ = ٠ | س − ٤ = ٠
س = $\frac{-٢}{٣}$ | س = ٤
∴ ص (د) = {$\frac{-٢}{٣}$ ، ٤}

(١٨) س^{٣} + ٢س^{٢} − س − ٢ = ٠ س^{٢}(س + ٢) − (س + ٢) = ٠

(س + ٢) (س^{٢} − ١) = ٠ (س + ٢) (س − ١) (س + ١) = ٠

س = −٢ ، س = ١ ، س = −١ ص(د) = {−٢ ، ١ ، −١}

---

٣ ∵ {−١٦ ، ١٦} هى مجموعة أصفار الدالة

∴ س^{٢} + ل = ٠ عند س = ١٦

(١٦)^{٢} + ل = ٠ ∴ ل = −٢٥٦

---

٤ ∵ {٣ ، −١} هى مجموعة أصفار الدالة

∴ د(س) = ل (س − ٣) (س + ١)

∴ د(س) = ل س^{٢} − ٢ل س − ٣ل

، ∵ د(س) = أ س^{٢} − ب س − ٩

∴ ٣ل = ٩ ∴ ل = ٣

∴ أ = ٣ ، ب = ٦

تفكير إبداعى TIMSS

٥

س^{٢} + ٣س + ٢١

س − ٧) س^{٣} − ٤س^{٢} − ١٤٧

س^{٣} − ٧س^{٢}

٣س^{٢} − ١٤٧

٣س^{٢} − ٢١س

٢١س − ١٤٧

٢١س − ١٤٧

٠٠

∴ (س − ٧) أحد عوامل المقدار س^{٣} − ٤س^{٢} − ١٤٧

∴ س^{٣} − ٤س^{٢} − ١٤٧ = (س − ٧) (س^{٢} + ٣س + ٢١)

عندما د(س) = ٠

∴ (س − ٧) (س^{٢} + ٣س + ٢١) = ٠

∴ إما س − ٧ = ٠ أو س^{٢} + ٣س + ٢١ = ٠

س = ٧ أ = ١ ، ب = ٣ ، حـ = ٢١

ب^{٢} − ٤ أ حـ = (٣)^{٢} − ٤(١)(٢١)

= ٩ − ٨٤ = −٧٥ < ٠

ليس له أصفار حقيقية

∴ ص(د) = {٧}

∴ العدد ٧ هو الصفر الوحيد للدالة.

---

٦ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

إجابة تدريبات الكتاب المدرسى الدرس (١)

١ (١) {٠} (٢) {٠ ، ١} (٣) ٨

(٤) −٥٠ (٥) −٢

---

٢ (أ) (س − ١) (س − ٢) = ٠

س = ١ ، س = ٢ ∴ ص(د) = {١ ، ٢}

(ب) س^{٢} − ٢س = ٠ س(س − ٢) = ٠

س = ٠ ، س = ٢ ∴ ص(د) = {٠ ، ٢}

(جـ) س^{٢} − ١٦ = ٠

(س − ٤) (س + ٤) = ٠

س = ٤ ، س = −٤ ∴ ص(د) = {−٤ ، ٤}

(د) ٢٥ − ٩س^{٢} = ٠

٩س^{٢} = ٢٥ ⟸ س^{٢} = $\frac{٢٥}{٩}$

∴ س = ± $\frac{٥}{٣}$ ∴ ص(د) = {$\frac{٥}{٣}$ ، $\frac{−٥}{٣}$}

(هـ) ٢س^{٣} − ١٨س = ٠ ٢س(س^{٢} − ٩) = ٠

٢س(س − ٣) (س + ٣) = ٠

س = ٠ ، س = ٣ ، س = −٣ ∴ ص(د) = {٠ ، ٣ ، −٣}

(و) ص(د) = {٠ ، ٢ ، −٢} (ز) ص(د) = {٥}

(ح) ص(د) = {−٢} (ط) ص(د) = {٠ ، −٣}

(ى) ص(د) = {$\frac{−٣}{٢}$ ، $\frac{٤}{٣}$} (ك) ص(د) = {٠ ، −٥ ، ٣}

(ل) ص(د) = {٠ ، $\frac{٣}{٢}$ ، −٢} (م) ص(د) = {−٢ ، ٧}

(ن) ص(د) = {−٢ ، ١} (س) ص(د) = {٢}

(ع) س^{٣} − ٣س^{٢} − ٤س + ١٢ = ٠

س^{٢} (س − ٣) − ٤ (س − ٣) = ٠

(س − ٣) (س^{٢} − ٤) = ٠

(س − ٣) (س − ٢) (س + ٢) = ٠

∴ س = ٣ ، س = ٢ ، س = −٢

∴ ص(د) = {٣ ، ٢ ، −٢}

---

٣ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

---

٤ س^{٢} + أ = ٠ عند س = ٣

(٣)^{٢} + أ = ٠ ∴ أ = −٩

---

٥ أ س^{٢} + ب س + ١٥ = ٠ ، {٣ ، ٥} هى أصفار الدالة

عند س = ٣

٩أ + ٣ب + ١٥ = ٠ (÷٣)

٣أ + ب + ٥ = ٠ (١)

عند س = ٥

٢٥أ + ٥ب + ١٥ = ٠ (÷٥)

٥أ + ب + ٣ = ٠ (٢)

من (١) ، (٢) بالطرح

∴ ٢أ − ٢ = ٠ ∴ أ = ١ بالتعويض فى (١)

∴ ٣ + ب + ٥ = ٠ ب = −٨

إجابة اختبر نفسك من أسئلة المحافظات على الدرس (١)

١ (١) {٠} (٢) {٠، −٣، ٣} (٣) ∅

(٤) صفر (٥) صفر (٦) {−٢، ١}

٢ (١) س³ + س² − ٢٠ س = ٠

س(س² + س − ٢٠) = ٠

س(س + ٥)(س − ٤) = ٠

∴ س = صفر ، س = −٥ ، س = ٤

∴ ص(د) = {صفر، −٥، ٤}

٢ راجع إجابتك في «100% إجابات»

٣ ∵ ص(د) = {٥}

∴ (٥)² − ١٠ × ٥ + أ = ٠

٢٥ − ٥٠ + أ = ٠ ∴ أ = ٢٥

٤ ∵ ص(د) = {٣، ٤}

∴ د(س) = (س − ٣)(س − ٤) = س² − ٧س + ١٢

∴ ب = −٧ ، جـ = ١٢

إجابة أسئلة س سؤال الدرس (٢)

١ ١ (أ) مجال ن₁ = ح − {٢، −٢}

(ب) مجال ن₂ = ح − {٠، ٢}

٢ ∵ مجال الدالة هو ح − {٦، −٦}

∴ س² − أ = ٠

عندما س = ٦

∴ ٣٦ − أ = ٠ ⟸ أ = ٣٦

٢ ١ ∵ مجال الدالة هو ح − {٢، جـ}

∴ عندما س = ٢

(٢)² − (٥)(٢) + م = ٠

٤ − ١٠ + م = ٠ ⟸ م = ٦

∴ د(س) = $\frac{س}{س^2 - ٥س + ٦}$ = $\frac{س}{(س - ٢)(س - ٣)}$

مجال د = ح − {٢، ٣}

∴ جـ = ٣

٢ (أ) ∵ ن(س) = $\frac{٣(س - ٢)}{(س - ٥)(س + ٢)}$

∴ ص(ن) = {٢} − {٥، −٢} = {٢}

(ب) ∵ ن(س) = $\frac{س(س - ١)}{(س - ١)(س + ١)}$

∴ ص(ن) = {٠، ١} − {١، −١} = {٠}

٣ ١ المجال المشترك = ح − {٠، ٤، −٤}

٢ المجال المشترك = ح − {٦، −١، ٠}

٣ المجال المشترك = ح − {٣، −٣، ٠}

إجابة تدريبات الأضواء الدرس (٢)

أولاً: مجال الدالة الكسرية الجبرية:

١ ١ ح − {٣} ٢ غير معرف ٣ ح − {٠، −١}

٤ $\frac{س}{س^2 + ١}$ ٥ ح − {١، −١} ٦ س = ٣

٧ ح − {٠} ٨ < ٩ −٥

١٠ ٧

٢ ١ ح − {$\frac{١}{٣}$} ٢ ح − {−١} ٣ ٢

٤ ٩ ٥ ٤ ٦ غير معرفة

٣ ∵ مجال الدالة هو ح − {٢، ك}

∴ س² − ٥س + م = ٠ عندما س = ٢

∴ (٢)² − ٥ × (٢) + م = ٠

∴ −٦ + م = ٠ ∴ م = ٦

∴ س² − ٥س + ٦ = ٠

(س − ٣)(س − ٢) = ٠

س = ٣ ، س = ٢ ∴ ك = ٣

٤ ، ٥ راجع إجابتك في «100% إجابات»

ثانياً: مجموعة أصفار الدالة الكسرية الجبرية:

٦ ١ مجموعة أصفار الدالة ٢ ∅ ٣ {−١}

٤ ∅ ٥ ∅ ٦ {−٣}

٧ {$\frac{٣}{٢}$} ٨ ٣

٧ ∵ مجموعة أصفار الدالة هي {٣}

∴ س² − أس + ٩ = ٠ عند س = ٣

٩ − ٣أ + ٩ = ٠

٣أ = ١٨ ∴ أ = ٦

∵ مجال الدالة هو ح − {٢}

∴ ب س + ٤ = ٠ عند س = ٢

٢ب + ٤ = ٠

∴ ب = −٢

ثالثًا: المجال المشترك لكسرين جبريين أو أكثر:

٨ (١) ح - {-١ ، ٥} (٢) ح - {٤} (٣) ح - {٠ ، ٢}
(٤) ح - {٠ ، ١ ، -١} (٥) -٧ (٦) ١٢

---

٩ (١) ح - {١ ، ٢ ، -٢} (٢) ح - {١ ، -١ ، ٠}
(٣) ح - {٠ ، ١} (٤) ح - {٣ ، -٣ ، ٦}
(٥) ح - {١ ، -١ ، -٢ ، ٤} (٦) ح - {٢ ، ٦ ، ٠ ، ٥}
(٧) ح - {٠ ، $\frac{-٤}{٧}$ ، -١ ، -٤ ، ١ ، ٧ ، -٧}



١٠ ∵ ص(د) = {٤}
∴ أ (٤)^2 - ٦(٤) + ٨ = ٠
∴ ١٦ أ - ٢٤ + ٨ = ٠ ⟸ ١٦ أ = ١٦   ∴ أ = ١
، ∵ المجال هو ح - {٢}
∴ ٢ب - ٤ = ٠ ⟸ ب = ٢

---

١١ د(٠) = ٢(٠)^3 - ٨(٠) = ٠
د(٢) = ٢(٢)^3 - ٨(٢) = ٠
د(-٢) = ٢(-٢)^3 - ٨(-٢) = ٠
∴ د(٠) = د(٢) = د(-٢)   ص(د) = {٠ ، ٢ ، -٢}
مجال $\frac{١}{د}$ = ح - {٠ ، ٢ ، -٢}

إجابة تدريبات الكتاب المدرسى الدرس (٢)

١ (١) (أ) مجال ن = ح
ن(٠) = $\frac{٣}{٤}$ ، ن(٢) = $\frac{٥}{٤}$ ، ن(-٢) = $\frac{١}{٤}$
(ب) مجال ن = ح - {٠}
ن(٠) غير معرف ، ن(٢) = صفر ، ن(-٢) = ١
(جـ) مجال ن = ح - {-٢}
ن(٠) = $\frac{١}{٢}$ ، ن(٢) = $\frac{١}{٤}$ ، ن(-٢) غير معرف
(د) مجال ن = ح - {٤ ، -٤}
ن(٠) = $\frac{-٩}{١٦}$ ، ن(٢) = $\frac{-١٣}{١٢}$ ، ن(-٢) = $\frac{-١٣}{١٢}$
(هـ) ، (و) راجع إجابتك فى «100% إجابات»
(٢) راجع إجابتك فى «100% إجابات»

---

٢ (١) المجال المشترك هو ح - {٠ ، -١}
(٢) المجال المشترك هو ح - {٠ ، ١ ، -١}
(٣) المجال المشترك هو ح - {٢ ، -٢ ، ٠}
(٤) المجال المشترك هو ح - {٢ ، ٣ ، ٠ ، ١ ، -٢}

٣ (١) المجال المشترك هو ح - {صفر}
(٢) المجال المشترك هو ح - {صفر}
(٣) المجال المشترك هو ح - {-٥ ، ٧}
(٤) المجال المشترك هو ح - {٤ ، صفر}
(٥) المجال المشترك هو ح - {٢ ، -٢}
(٦) المجال المشترك هو ح - {٢ ، صفر}
(٧) المجال المشترك هو ح - {١ ، -١}
(٨) المجال المشترك هو ح - {٢ ، -٢}
(٩) المجال المشترك هو ح - {-٤ ، ٣}
(١٠) المجال المشترك هو ح - {٣ ، -٣ ، ٠}
(١١) المجال المشترك هو ح - {٣ ، -٣}
(١٢) المجال المشترك هو ح - {٠ ، ١ ، ٣ ، -١}
(١٣) المجال المشترك هو ح - {٢ ، ٣ ، -٣ ، -٢ ، ١}

إجابة اختبر نفسك من أسئلة المحافظات حتى الدرس (٢)

١ (١) ح - {٤} (٢) ح - {١ ، -١} (٣) {٣ ، -١}
(٤) س$_1$ ∪ س$_2$ (٥) ح - {٥ ، ٣}

---

٢ (١) س^2 + ١ = ٠
س^2 = -١   لا يوجد لها حل فى ح
∴ المجال = ح
د(٠) = $\frac{(٠)^2 - ١}{(٠)^2 + ١} = \frac{-١}{١}$ = -١
د(٢) = $\frac{(٢)^2 - ١}{(٢)^2 + ١} = \frac{٤ - ١}{٤ + ١} = \frac{٣}{٥}$
(٢) ∵ مجموعة أصفار الدالة ن(س) هى {-٣}
∴ ٦ + ٣أ = ٠ ⟸ أ = -٢
(٣) ن$_1$(س) = $\frac{\text{س} - ٤}{\text{س}^2 - ٥\text{س} + ٦} = \frac{\text{س} - ٤}{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ٢)}$
∴ مجال ن$_1$ = ح - {٢ ، ٣}
ن$_2$(س) = $\frac{٢\text{س}}{\text{س}^3 - ٩\text{س}} = \frac{٢\text{س}}{\text{س}(\text{س}^2 - ٩)} = \frac{٢\text{س}}{\text{س}(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)}$
∴ مجال ن$_2$ = ح - {٠ ، ٣ ، -٣}
∴ المجال المشترك للدالتين = ح - {٠ ، ٢ ، ٣ ، -٣}

إجابة أسئلة س سؤال الدرس (٣)

١ (١) (أ) ن$_1$(س) = $\frac{١٢ - ٥\text{س}}{١٠\text{س}^2 - ٢٤\text{س}} = \frac{-(٥\text{س} - ١٢)}{٢\text{س}(٥\text{س} - ١٢)}$
المجال: ح - {٠ ، $\frac{١٢}{٥}$} ، ن$_1$(س) = $\frac{-١}{٢\text{س}}$

(ب) $ن_٢(س) = \frac{س^٣ + ٩س^٢ + ١٤س}{س^٣ + ٨} = \frac{س(س^٢ + ٩س + ١٤)}{(س + ٢)(س^٢ - ٢س + ٤)}$

$= \frac{س(س + ٢)(س + ٧)}{(س + ٢)(س^٢ - ٢س + ٤)}$

المجال: $ع - \{-٢\}$

$ن_٢(س) = \frac{س(س + ٧)}{س^٢ - ٢س + ٤}$

(جـ) $ن_٢(س) = \frac{س(س^٢ + س - ٦)}{(س^٢ - ٩)(س^٢ - ٤)}$

$\therefore ن_٢(س) = \frac{س(س + ٣)(س - ٢)}{(س + ٣)(س - ٣)(س - ٢)(س + ٢)}$

مجال $ن_٢ = ع - \{٣ ، -٣ ، ٢ ، -٢\}$

$\therefore ن_٢(س) = \frac{س}{(س - ٣)(س + ٢)}$

٢ (أ) $\frac{س + ٣}{٢س + ٥}$

(لا نستطيع حذف حدود مجموعة أو مطروحة، يجب أن تكون عوامل مضروبة)

(ب) $\frac{(س + ٤)}{٢(س + ٤)}$ (عند الاختصار يكون الناتج $\frac{١}{٢}$ وليس صفرًا)

---

٢ ١ $ن_١(س) = \frac{٢(س - ٢)}{٤س^٢}$

مجال $ن_١ = ع - \{٠\}$

$\therefore ن_١(س) = \frac{س - ٢}{٢س^٢}$

$ن_٢(س) = \frac{٧(س - ٢)}{١٤س^٢}$

مجال $ن_٢ = ع - \{٠\}$

$ن_٢(س) = \frac{س - ٢}{٢س^٢}$

$\because$ مجال $ن_١$ = مجال $ن_٢$ ، $ن_١(س) = ن_٢(س)$

$\therefore ن_١ = ن_٢$

٢ $ن_١(س) = \frac{(س + ٣)}{(س - ٣)(س + ٣)}$ ، مجال $ن_١(س) = ع - \{٣ ، -٣\}$

، $ن_١(س) = \frac{١}{س - ٣}$

$ن_٢(س) = \frac{٢}{٢(س - ٣)}$ ، مجال $ن_٢(س) = ع - \{٣\}$

$ن_٢(س) = \frac{١}{س - ٣}$

$ن_١(س) = ن_٢(س)$ ، مجال $ن_١$ ≠ مجال $ن_٢$

$\therefore ن_١ \neq ن_٢$

٣ $ن_١(س) = \frac{(س + ٢)(س + ١)}{(س - ٢)(س + ٢)}$

مجال $ن_١ = ع - \{٢ ، -٢\}$

$\therefore ن_١(س) = \frac{س + ١}{س - ٢}$

$ن_٢(س) = \frac{(س - ١)(س + ١)}{(س - ٢)(س - ١)}$

مجال $ن_٢ = ع - \{٢ ، ١\}$

$\therefore ن_٢(س) = \frac{س + ١}{س - ٢}$

$\because$ مجال $ن_١$ ≠ مجال $ن_٢$ ، $ن_١(س) = ن_٢(س)$

$\therefore ن_١ \neq ن_٢$

٣ ١ $ن_١(س) = \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{(س + ٣)(س - ٢)}$

مجال $ن_١ = ع - \{-٣ ، ٢\}$

$\therefore ن_١(س) = \frac{س + ٢}{س + ٣}$

$ن_٢(س) = \frac{س(س - ٣)(س + ٢)}{س(س - ٣)(س + ٣)}$

مجال $ن_٢ = ع - \{٠ ، ٣ ، -٣\}$

$ن_٢(س) = \frac{س + ٢}{س + ٣}$

$\therefore ن_١ = ن_٢$ لجميع قيم س التى تنتمى للمجال المشترك

وهو $ع - \{٠ ، ٣ ، -٣ ، ٢\}$

٢ $ن_١(س) = \frac{س^٢ + ٥س + ٢٥}{(س - ٥)(س^٢ + ٥س + ٢٥)}$

مجال $ن_١ = ع - \{٥\}$

$ن_١(س) = \frac{١}{س - ٥}$

$ن_٢(س) = \frac{س + ٥}{(س - ٥)(س + ٥)}$

مجال $ن_٢ = ع - \{٥ ، -٥\}$

$ن_٢(س) = \frac{١}{س - ٥}$

$\therefore ن_١ = ن_٢$ لجميع قيم س التى تنتمى للمجال المشترك

وهو $ع - \{٥ ، -٥\}$

إجابة تدريبات الأضواء الدرس (٣)

أولاً: اختزال الكسر الجبرى:

١ (١) -١ (٢) $\frac{١}{س - ٣}$ (٣) $٣س + ١$

(٤) $س + ١$ (٥) -٥ (٦) ٩

(٧) ٦ (٨) ٢

---

٢ ١ $ن(س) = \frac{٢}{٥}$ ، مجال ن هو $ع - \{٣\}$

٢ $ن(س) = \frac{١}{س - ٢}$ ، مجال ن هو $ع - \{٠ ، ٢\}$

٣ $ن(س) = \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{٢(س - ٢)} = \frac{س + ٢}{٢}$ ، مجال ن هو $ع - \{٢\}$

٤ $ن(س) = \frac{(س - ٢)(س + ١)}{(س - ١)(س + ١)} = \frac{س - ٢}{س - ١}$ ، مجال ن هو $ع - \{١ ، -١\}$

٥ $ن(س) = \frac{(س - ٣)(س + ٣)}{(س - ٦)(س + ٣)} = \frac{س - ٣}{س - ٦}$ ، مجال ن هو $ع - \{٦ ، -٣\}$

من ٦ إلى ١٠ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

ثانياً: تساوى كسرين جبريين:

٣ (١) $ن_١ = ن_٢$ لكل $س \in ع - \{١\}$ (٢) ٣

(٣) $ع - \{٦\}$ (٤) $ع - \{٢\}$ (٥) -٨

(٦) $ن_١(س) \neq ن_٢(س)$

٤ ① $د_1(س) = \frac{س}{س(س-٢)} = \frac{١}{س-٢}$ ، مجال $د_1$ هو ح - {٠ ، ٢}

$د_2(س) = \frac{س+١}{(س-٢)(س+١)} = \frac{١}{س-٢}$ ، مجال $د_2$ هو ح - {٢ ، -١}

∵ $د_1(س) = د_2(س)$ ، مجال $د_1 \neq$ مجال $د_2$

∴ $د_1 \neq د_2$

② $د_1(س) = \frac{٥س}{٥(س+٥)} = \frac{س}{س+٥}$ ، مجال $د_1$ هو ح - {-٥}

$د_2(س) = \frac{س(س+٥)}{(س+٥)^٢} = \frac{س}{س+٥}$ ، مجال $د_2$ هو ح - {-٥}

∵ $د_1(س) = د_2(س)$ ، مجال $د_1$ = مجال $د_2$

∴ $د_1 = د_2$

③ $د_1(س) = \frac{س^٢+٣س+٩}{(س-٣)(س^٢+٣س+٩)} = \frac{١}{س-٣}$ ، مجال $د_1$ هو ح - {٣}

$د_2(س) = \frac{س+١}{(س-٣)(س+١)} = \frac{١}{س-٣}$ ، مجال $د_2$ هو ح - {٣ ، -١}

∵ $د_1(س) = د_2(س)$ ، مجال $د_1 \neq$ مجال $د_2$

∵ $د_1 \neq د_2$

④ ، ⑤ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

---

٥ $د_1(س) = \frac{(س+٤)(س-٣)}{(س+٤)(س+١)}$

مجال $د_1$ = ح - {-٤ ، -١} ، $د_1(س) = \frac{س-٣}{س+١}$

$د_2(س) = \frac{(س-٣)(س+١)}{(س+١)^٢}$

مجال $د_2$ = ح - {-١} ، $د_2(س) = \frac{س-٣}{س+١}$

∴ $د_1(س) = د_2(س)$

لجميع قيم س التى تنتمى للمجال المشترك للدالتين $د_1$ ، $د_2$

هو ح - {-٤ ، -١}

---

٦ ① $د_1(س) = \frac{٢س}{٢(س+٢)} = \frac{س}{س+٢}$ ، مجال $د_1$ هو ح - {-٢}

$د_2(س) = \frac{س(س+٢)}{(س+٢)^٢} = \frac{س}{س+٢}$ ، مجال $د_2$ هو ح - {-٢}

∵ $د_1(س) = د_2(س)$ ، مجال $د_1$ = مجال $د_2$

∴ $د_1 = د_2$

② $د_1(س) = \frac{س+٢}{س-٢}$ ، مجال $د_1$ هو ح - {٢}

$د_2(س) = \frac{(س-٢)(س+٢)}{(س-٢)^٢} = \frac{س+٢}{س-٢}$ ، مجال $د_2$ هو ح - {٢}

∵ $د_1(س) = د_2(س)$ ، مجال $د_1$ = مجال $د_2$

∴ $د_1 = د_2$

③ ، ④ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

تفكير إبداعى TIMSS

٧ $\frac{س^٢+٥س+٦}{س^٢-٢س-٨} = \frac{س^٢-٤س-٥}{س^٢-٨س+١٥}$

$= \frac{(س+٢)(س+٣)}{(س+٢)(س-٤)} = \frac{(س+١)(س-٥)}{(س-٣)(س-٥)}$

∴ $(س+٣)(س-٣) = (س+١)(س-٤)$

∴ $س^٢ - ٩ = س^٢ - ٣س - ٤$ ∴ $-٩ + ٤ = -٣س$

∴ $-٣س = -٥$ ∴ $س = \frac{٥}{٣}$

---

٨ $د_1(س) = \frac{س+٣}{(س-٣)(س+٣)}$

مجال $د_1$ = ح - {٣ ، -٣} ، $د_1(س) = \frac{١}{س-٣}$

$د_2(س) = \frac{٢}{٢(س-٣)}$

مجال $د_2$ = ح - {٣} ، $د_2(س) = \frac{١}{س-٣}$

∴ $د_1(س) = د_2(س)$ لجميع قيم س التى تنتمى للمجال المشترك

وهو ح - {٣ ، -٣}

إجابة تدريبات الكتاب المدرسى الدرس (٣)

١ ① (٢س - ١) ② ح - {٢ ، -٢ ، -١} ③ ٣

④ ٤ ⑤ ٧

---

٢ ① (أ) $\frac{س^٢-٤}{س^٣-٨} = \frac{(س-٢)(س+٢)}{(س-٢)(س^٢+٢س+٤)} = \frac{س+٢}{س^٢+٢س+٤}$

المجال هو ح - {٢}

(ب) $\frac{س+١}{س^٢+٣س+٢} = \frac{س+١}{(س+١)(س+٢)} = \frac{١}{س+٢}$

المجال هو ح - {-١ ، -٢}

(جـ) $\frac{س^٢-٤}{س^٢-٥س+٦} = \frac{(س-٢)(س+٢)}{(س-٣)(س-٢)} = \frac{س+٢}{س-٣}$

المجال هو ح - {٣ ، ٢}

(د) $\frac{س^٣-١}{(س-١)(س+٥)} = \frac{(س-١)(س^٢+س+١)}{(س-١)(س+٥)} = \frac{س^٢+س+١}{س+٥}$

المجال هو ح - {١ ، -٥}

(هـ)، (و)، (ز)، (ح)، (ط) راجع إجابتك فى «100% إجابات»

② (أ) $د_1(س) = \frac{س-١}{س}$ ، مجال $د_1$ = ح - {٠}

$د_2(س) = \frac{(س-١)(س^٢+١)}{س(س^٢+١)} = \frac{س-١}{س}$ ، مجال $د_2$ = ح - {٠}

∵ $د_1(س) = د_2(س)$ ، مجال $د_1$ = مجال $د_2$

∴ $د_1 = د_2$

(ب) $د_1(س) = \frac{(س-٢)(س+٢)}{(س+٣)(س-٢)} = \frac{س+٢}{س+٣}$ ،

مجال $د_1$ = ح - {-٣ ، ٢}

$د_2(س) = \frac{(س-٣)(س+٢)}{(س-٣)(س+٣)} = \frac{س+٢}{س+٣}$ ،

مجال $د_2$ = ح - {٣ ، -٣}

∵ $د_1(س) = د_2(س)$ ، مجال $د_1 \neq$ مجال $د_2$

∴ $د_1 \neq د_2$

(جـ)، (د) راجع إجابتك فى «100% إجابات»

٣ (أ) $ن_١(س) = \frac{١}{س}$ ، مجال $ن_١$ = ح - {٠}

$ن_٢(س) = \frac{س^٢+٤}{س(س^٢+٤)} = \frac{١}{س}$ ، مجال $ن_٢$ = ح - {٠}

∵ $ن_١(س) = ن_٢(س)$ ، مجال $ن_١$ = مجال $ن_٢$

∴ $ن_١ = ن_٢$

(ب) $ن_١(س) = \frac{٢س}{٢(س+٤)} = \frac{س}{س+٤}$ ، مجال $ن_١$ = ح - {-٤}

$ن_٢(س) = \frac{س(س+٤)}{(س+٤)(س+٤)} = \frac{س}{س+٤}$ ، مجال $ن_٢$ = ح - {-٤}

∵ $ن_١(س) = ن_٢(س)$ ، مجال $ن_١$ = مجال $ن_٢$

∴ $ن_١ = ن_٢$

(جـ) ، (د) راجع إجابتك في «100% إجابات»

٤ (أ) ح - {٠}   (ب) ح - {٠ ، ١ ، -١}

(جـ) ح - {٣}   (د) ح - {٢ ، -٢}

(هـ) ح - {٠ ، ٣ ، -٣}   (و) ح - {٤ ، -٤ ، ٠}

إجابة اختبر نفسك من أسئلة المحافظات حتى الدرس (٣)

١ (١) -١   (٢) ح - {٠ ، ١ ، -١}   (٣) ح - {-١}

(٤) ٣   (٥) ح - {٢}   (٦) {-٣}

---

٢ (١) $ن(س) = \frac{س + \frac{١}{س}}{٤س + \frac{٤}{س}} = \frac{(س + \frac{١}{س})}{٤(س + \frac{١}{س})} = \frac{١}{٤}$

مجال ن = ح - {٠}

(٢) $ن_١(س) = \frac{س}{س^٢ - س} = \frac{س}{س(س-١)}$

∴ $ن_١(س) = \frac{١}{س-١}$

، مجال $ن_١$ = ح - {٠ ، ١}   ← (١)

$ن_٢(س) = \frac{٢س}{٢س^٢ - ٢س} = \frac{٢س}{٢س(س-١)}$

∴ $ن_٢(س) = \frac{١}{س-١}$

، مجال $ن_٢$ = ح - {٠ ، ١}   ← (٢)

من (١) ، (٢)

∴ $ن_١ = ن_٢$ (وهو المطلوب)

٣ $ن_١(س) = \frac{(س+٢)(س+١)}{(س+٢)(س-٢)}$

∴ مجال $ن_١$ = ح - {٢ ، -٢} ، $ن_١(س) = \frac{س+١}{س-٢}$

∵ $ن_٢(س) = \frac{(س-١)(س+١)}{(س-١)(س-٢)}$

∴ مجال $ن_٢$ = ح - {١ ، ٢} ، $ن_٢(س) = \frac{س+١}{س-٢}$

∴ $ن_١ = ن_٢$ في المجال المشترك = ح - {١ ، ٢ ، -٢}

إجابة أسئلة س سؤال الدرس (٤)

١ $ن(س) = \frac{٥ + ٥س}{س^٢ - ١} + \frac{س + ٣}{س^٢ + ٢س - ٣}$

$ن(س) = \frac{٥(س+١)}{(س-١)(س+١)} + \frac{س+٣}{(س+٣)(س-١)}$

مجال ن = ح - {١ ، -١ ، -٣}

$ن(س) = \frac{٥}{س-١} + \frac{١}{س-١} = \frac{٦}{س-١}$

---

٢ (١) $ن(س) = \frac{٢(س+٥)}{(س+٥)(س+٢)} - \frac{س+٣}{(س+٣)(س+٢)}$

مجال ن = ح - {-٥ ، -٢ ، -٣}

$ن(س) = \frac{٢}{س+٢} - \frac{١}{س+٢} = \frac{١}{س+٢}$

$ن(س) = \frac{١}{س+٢}$

، ن(-٢) غير معرف لأن -٢ ∉ لمجال ن

$ن(٢) = \frac{١}{٢+٢} = \frac{١}{٤}$

(٢) $ن(س) = \frac{١٢}{٣(٤س^٢ - ١)} - \frac{٢}{٢س(٢س-١)}$

$ن(س) = \frac{١٢}{٣(٢س-١)(٢س+١)} - \frac{٢}{٢س(٢س-١)}$

مجال ن = ح - $\{\frac{١}{٢} ، \frac{-١}{٢} ، ٠\}$

$ن(س) = \frac{٤}{(٢س-١)(٢س+١)} - \frac{١}{س(٢س-١)}$

$ن(س) = \frac{٤س - ٢س - ١}{س(٢س-١)(٢س+١)} = \frac{٢س - ١}{س(٢س-١)(٢س+١)}$

$ن(س) = \frac{١}{س(٢س+١)}$

ن(٠) غير معرفة لأن ٠ ∉ لمجال ن

$ن(-١) = \frac{١}{(-١)(-١)} = ١$

---

٣ $ن(س) = \frac{س^٢ - ٣س - ٤}{س^٢ - ١} \times \frac{س^٢ - س}{س^٢ + ٣س}$

$ن(س) = \frac{(س-٤)(س+١)}{(س-١)(س+١)} \times \frac{س(س-١)}{س(س+٣)}$

مجال ن = ح - {١ ، -١ ، ٠ ، -٣}

$ن(س) = \frac{س-٤}{س+٣}$

---

٤ (١) $ن(س) = \frac{(س+٢)(س^٢ - ٢س + ٤)}{(س+٣)(س+٢)} \times \frac{٣س(س+٣)}{س^٢ - ٢س + ٤}$

مجال ن = ح - {-٣ ، -٢}

$ن(س) = ٣س$

(٢) $ن(س) = \frac{س+١}{(س-٢)(س+١)} \times \frac{(س+٥)(س-٢)}{(٣س+١)(س+٥)}$

مجال ن = ح − $\{٢ ، -١ ، \frac{-١}{٣} ، -٥\}$

$ن(س) = \frac{١}{٣س+١}$

ن(٠) = ١ ، ن(−١) غير معرف

---

٥ (١) $ن^{-١}(س) = \frac{(س+٣)(س-٣)}{(س-٣)(س-٢)}$

مجال $ن^{-١}$ = ح − {٣، −٣، ٢}

$ن^{-١}(س) = \frac{س+٣}{س-٢}$

(٢) ∵ $ن^{-١}(س) = \frac{٣}{٥}$

∴ $\frac{س+٣}{س-٢} = \frac{٣}{٥}$ ⟸ ٥س + ١٥ = ٣س − ٦

∴ ٢س = −٢١ ⟸ $س = \frac{-٢١}{٢}$

---

٦ $ن(س) = \frac{٥س^٢ - ٣٠س + ٤٥}{س+٢} \div (٥س - ١٥)$

$= \frac{٥(س^٢ - ٦س + ٩)}{س+٢} \div ٥(س-٣)$

$= \frac{٥(س-٣)(س-٣)}{س+٢} \div ٥(س-٣)$

المجال = ح − {−٢، ٣}

$ن(س) = \frac{٥(س-٣)(س-٣)}{س+٢} \times \frac{١}{٥(س-٣)}$

∴ $ن(س) = \frac{س-٣}{س+٢}$

إجابة تدريبات الأضواء الدرس (٤)

أولاً: جمع وطرح الكسور الجبرية:

١ (١) $\frac{أ}{ب}$ (٢) ١ (٣) ٢

(٤) ح − {٠} (٥) $\frac{-٢}{س+١}$ (٦) $\frac{س+٧}{س-٥}$

(٧) ح − {٤} (٨) ∅ (٩) ح − {١، ٩}

(١٠) ح − {٣، −٨}

---

٢ (١) $ن(س) = \frac{س}{س+٣} + \frac{٣}{س+٣}$ ، مجال ن = ح − {−٣}

$ن(س) = \frac{س+٣}{س+٣} = ١$

(٢) $ن(س) = \frac{٥س - ١٠}{س-٢} = \frac{٥(س-٢)}{س-٢}$

مجال ن = ح − {٢}

ن(س) = ٥

(٣) $ن(س) = \frac{١}{س+٢} + \frac{٤}{س^٢-٤}$

$ن(س) = \frac{١}{س+٢} + \frac{٤}{(س-٢)(س+٢)}$ ، مجال ن = ح − {٢ ، −٢}

$ن(س) = \frac{(س-٢)}{(س-٢)(س+٢)} + \frac{٤}{(س-٢)(س+٢)}$

$ن(س) = \frac{س+٢}{(س-٢)(س+٢)} = \frac{١}{س-٢}$

(٤) $ن(س) = \frac{س^٢-٣س}{س^٢-٩} + \frac{س-١}{س^٢+٢س-٣}$

$ن(س) = \frac{س(س-٣)}{(س-٣)(س+٣)} + \frac{س-١}{(س+٣)(س-١)}$

مجال ن = ح − {٣، −٣، ١}

$ن(س) = \frac{س}{س+٣} + \frac{١}{س+٣} = \frac{س+١}{س+٣}$

من ٥ إلى ١٠ راجع إجابتك في «100% إجابات»

١١ $ن(س) = \frac{٤}{٤س^٢-١} - \frac{س}{٢س^٢-س}$

$ن(س) = \frac{٤}{(٢س-١)(٢س+١)} - \frac{س}{س(٢س-١)}$

مجال ن = ح − $\{\frac{١}{٢} ، \frac{-١}{٢} ، ٠\}$

$ن(س) = \frac{٤}{(٢س-١)(٢س+١)} - \frac{(٢س+١)}{(٢س-١)(٢س+١)}$

$ن(س) = \frac{-٢س+٣}{(٢س-١)(٢س+١)}$

١٢ $ن(س) = \frac{س-٣}{س^٢-٧س+١٢} - \frac{٤}{س^٢-٤س}$

$ن(س) = \frac{س-٣}{(س-٣)(س-٤)} - \frac{٤}{س(س-٤)}$

مجال ن = ح − {٣، ٤، ٠}

$ن(س) = \frac{١}{س-٤} - \frac{٤}{س(س-٤)}$

$ن(س) = \frac{س-٤}{س(س-٤)} = \frac{١}{س}$

١٣ $ن(س) = \frac{٨}{س-٦} + \frac{٤}{٣س}$

$ن(س) = \frac{٢٤س + ٤س - ٢٤}{٣س(س-٦)}$

مجال ن = ح − {٠، ٦}

$ن(س) = \frac{٢٨س-٢٤}{٣س(س-٦)} = \frac{٤(٧س-٦)}{٣س(س-٦)}$

١٤ $ن(س) = \frac{س(س-٢) - ٨(س-٤)}{٨(س-٢)} = \frac{س^٢ - ١٠س + ٣٢}{٨س - ١٦}$

، مجال ن = ح − {٢}

١٥ $ن(س) = \frac{٤س - ٨ - ٧س - ٤٩}{(س+٧)(س-٢)} = \frac{-٣س - ٥٧}{(س+٧)(س-٢)}$

، مجال ن = ح − {٢ ، −٧}

من ١٦ إلى ١٨ راجع إجابتك في «100% إجابات»

٣ $\text{ن}(\text{س}) = \text{ن}_١(\text{س}) + \text{ن}_٢(\text{س})$

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}^٢+٢\text{س}} + \frac{\text{س}+٢}{\text{س}^٢-٤} = \frac{\text{س}}{\text{س}(\text{س}+٢)} + \frac{(\text{س}+٢)}{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)}$$

مجال $\text{ن} = \text{ع} - \{٠ \text{،} -٢ \text{،} ٢\}$

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}+٢} + \frac{١}{\text{س}-٢} = \frac{\text{س}-٢+\text{س}+٢}{(\text{س}+٢)(\text{س}-٢)}$$

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{٢\text{س}}{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)}$$

---

٤ $$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}+٣}{(\text{س}+٣)^٢} + \frac{\text{س}+٢}{\text{س}+٣}$$

مجال $\text{ن} = \text{ع} - \{-٣\}$

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}+٣} + \frac{\text{س}+٢}{\text{س}+٣} = \frac{\text{س}+٣}{\text{س}+٣} = ١$$

$\text{ن}(-٣)$ غير معرف لأن $-٣ \notin$ للمجال

$\text{ن}(٢٠٢٦) = ١$

---

٥ ، **٦** راجع إجابتك فى «100% إجابات»

ثانيا: ضرب الكسور الجبرية:

٧ ١) $$\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س}-٣)(\text{س}+٣)}{\text{س}+٣} \times \frac{١}{\text{س}-٣}$$

مجال $\text{ن} = \text{ع} - \{٣ \text{،} -٣\}$ $\qquad \text{ن}(\text{س}) = ١$

٢) $$\text{ن}(\text{س}) = \frac{٢(\text{س}+١)}{٥(\text{س}-٣)} \times \frac{٣(\text{س}-٣)}{٤(\text{س}+١)}$$

مجال $\text{ن} = \text{ع} - \{٣ \text{،} -١\}$ $\qquad \text{ن}(\text{س}) = \frac{٣}{١٠}$

٣) $$\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س}+١)^٢}{٢(\text{س}-٤)} \times \frac{\text{س}-٤}{\text{س}+١}$$

مجال $\text{ن} = \text{ع} - \{٤ \text{،} -١\}$ $\qquad \text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}+١}{٢}$

٤) $$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}(\text{س}-٣)}{(\text{س}-٢)(\text{س}-٣)} \times \frac{(\text{س}-٢)(\text{س}-٢)}{٢\text{س}}$$

المجال $= \text{ع} - \{٢ \text{،} ٣ \text{،} ٠\}$

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س}-٢)}{٢}$$

٥) $$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}(\text{س}+٢)}{(\text{س}-٣)(\text{س}^٢+٣\text{س}+٩)} \times \frac{\text{س}^٢+٣\text{س}+٩}{\text{س}+٢}$$

مجال $\text{ن} = \text{ع} - \{٣ \text{،} -٢\}$ $\qquad \text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}-٣}$

$\text{ن}(٦) = \frac{٦}{٣} = ٢$ ، $\text{ن}(-٢)$ غير معرف

٦) $$\text{ن}(\text{س}) = \frac{٣\text{س}(٢\text{س}+١)}{\text{س}+٢} \times \frac{(\text{س}+٢)^٢}{٢(٣\text{س}+٢)}$$

مجال $\text{ن} = \text{ع} - \left\{-٢ \text{،} \frac{-٢}{٣}\right\}$

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{٣\text{س}(٢\text{س}+١)(\text{س}+٢)}{٢(٣\text{س}+٢)}$$

من ٧ إلى ٩ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

ثالثا: قسمة الكسور الجبرية:

٨ ١) $\text{ع} - \{٤ \text{،} -٤\}$ $\qquad$ ٢) -١ $\qquad$ ٣) $\text{ع} - \{٠ \text{،} -٥\}$

٤) غير معرف $\qquad$ ٥) -٥ $\qquad$ ٦) $\text{ع} - \{٠ \text{،} ٢\}$

٧) $\frac{١}{\text{د}(-٢)}$ $\qquad$ ٨) $\text{ع} - \{٠\}$ $\qquad$ ٩) ٧

١٠) ٨ $\qquad$ ١١) $\frac{١}{٤}$

---

٩ ١) $$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}-١}{(\text{س}-١)(\text{س}+١)} \div \frac{\text{س}(\text{س}-٥)}{(\text{س}-٥)(\text{س}+١)}$$

مجال $\text{ن} = \text{ع} - \{١ \text{،} -١ \text{،} ٠ \text{،} ٥\}$

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}+١} \times \frac{(\text{س}+١)}{\text{س}} = \frac{١}{\text{س}}$$

٢) $$\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س}-٧)(\text{س}+٧)}{(\text{س}-٢)(\text{س}^٢+٢\text{س}+٤)} \div \frac{\text{س}+٧}{\text{س}-٢}$$

مجال $\text{ن} = \text{ع} - \{٢ \text{،} -٧\}$

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س}-٧)(\text{س}+٧)}{(\text{س}-٢)(\text{س}^٢+٢\text{س}+٤)} \times \frac{\text{س}-٢}{\text{س}+٧}$$

$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}-٧}{\text{س}^٢+٢\text{س}+٤}$ ، $\text{ن}(١) = \frac{-٦}{٧}$

٣) $$\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س}-٣)(\text{س}+٣)}{٢\text{س}(\text{س}+٣)} \times \frac{٤(\text{س}-١)(\text{س}+١)}{٣(\text{س}+٥)(\text{س}-٣)}$$

مجال $\text{ن} = \text{ع} - \{٠ \text{،} -٣ \text{،} -٥ \text{،} ١ \text{،} -١ \text{،} ٣\}$

$$\text{ن}(\text{س}) = \frac{٢(\text{س}-١)(\text{س}+١)}{٣\text{س}(\text{س}+٥)}$$

من ٤ إلى ٧ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

---

١٠ ١) $$\text{ن}^{-١}(\text{س}) = \frac{(\text{س}+٣)(\text{س}-٢)}{\text{س}(\text{س}+٣)} = \frac{\text{س}-٢}{\text{س}}$$

مجال $\text{ن}^{-١} = \text{ع} - \{٠ \text{،} ٢ \text{،} -٣\}$

٢) $\because \text{ن}^{-١}(\text{س}) = ٢$ $\qquad \therefore ٢ = \frac{\text{س}-٢}{\text{س}}$

$\therefore ٢\text{س} = \text{س}-٢$ $\qquad \therefore \text{س} = -٢$

---

١١ ١) $$\text{ن}^{-١}(\text{س}) = \frac{(\text{س}-٢)(\text{س}^٢+٢)}{\text{س}(\text{س}-٢)} = \frac{\text{س}^٢+٢}{\text{س}}$$

مجال $\text{ن}^{-١} = \text{ع} - \{٠ \text{،} ٢\}$

٢) $\because \text{ن}^{-١}(\text{س}) = ٣$ $\qquad \therefore \frac{\text{س}^٢+٢}{\text{س}} = ٣$ ⟸ $\text{س}^٢+٢ = ٣\text{س}$

$\text{س}^٢ - ٣\text{س} + ٢ = ٠$ $\qquad (\text{س}-١)(\text{س}-٢) = ٠$

$\therefore \text{س} = ١$ أو $\text{س} = ٢$ (مرفوض) لأن $٢ \notin$ للمجال



١٢ $\because \text{ن}(٤) = ٧$ $\qquad \therefore ٧ = \frac{١٦-٩}{٤+\text{ب}}$ ⟸ $٤+\text{ب} = ١$

$\therefore \text{ب} = -٣$

$$\text{ن}^{-١}(\text{س}) = \frac{\text{س}-٣}{(\text{س}-٣)(\text{س}+٣)} = \frac{١}{\text{س}+٣}$$

مجال $\text{ن}^{-١} = \text{ع} - \{٣ \text{،} -٣\}$

١٣ $ن(س) = \frac{س^٢+س+١}{س(س-١)(س^٢+س+١)} - \frac{س+٣}{(س+٣)(س-١)}$

مجال $ن = ح - \{٠ ، ١ ، -٣\}$

$ن(س) = \frac{١}{س(س-١)} - \frac{١}{س-١} = \frac{-(س-١)}{س(س-١)} = \frac{-١}{س}$

$\because ن(أ) = -٢$ $\therefore \frac{-١}{أ} = -٢$ $\therefore أ = \frac{١}{٢}$

---

١٤ $ن(س) = \frac{(س-٢)(س-١)}{(س-١)(س+١)} \times \frac{(س-٥)(س+١)}{(س-٥)}$

مجال $ن = ح - \{١ ، -١ ، ٥\}$ $\therefore ن(س) = س - ٢$

$\because ن(س) = ٢$

$\therefore س - ٢ = ٢$ $س = ٤$

إجابة تدريبات الكتاب المدرسى الدرس (٤)

١ (١) $ن(س) = \frac{س-٢}{س} + \frac{٣+س}{٢س} = \frac{٢س-٤}{٢س} + \frac{٣+س}{٢س} = \frac{٣س-١}{٢س}$

مجال $ن = ح - \{٠\}$

(٢) $ن(س) = \frac{٢س}{س+٢} + \frac{٤}{س+٢} = \frac{٢س+٤}{س+٢} = \frac{٢(س+٢)}{س+٢}$

$ن(س) = ٢$ ، مجال $ن = ح - \{-٢\}$

(٣) $ن(س) = \frac{٢}{س+٣} + \frac{س+٣}{س^٢+٣س}$

$= \frac{٢}{س+٣} + \frac{س+٣}{س(س+٣)} = \frac{٢}{س+٣} + \frac{١}{س}$

$= \frac{٢س+س+٣}{س(س+٣)} = \frac{٣(س+١)}{س(س+٣)}$

مجال $ن = ح - \{٠ ، -٣\}$

(٤) $ن(س) = \frac{س}{س-٤} - \frac{س+٤}{(س-٤)(س+٤)}$

$= \frac{س}{س-٤} - \frac{١}{س-٤} = \frac{س-١}{س-٤}$

مجال $ن = ح - \{٤ ، -٤\}$

(٥) $ن(س) = \frac{٣}{س-١} - \frac{٢}{س-١} = \frac{١}{س-١}$

مجال $ن = ح - \{١\}$

من ٦ إلى ١٠ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

---

٢ (١) $ن(س) = \frac{س^٢+س+١}{س} \times \frac{س^٢-س}{س^٣-١}$

$= \frac{س^٢+س+١}{س} \times \frac{س(س-١)}{(س-١)(س^٢+س+١)}$

مجال $ن = ح - \{٠ ، ١\}$ $ن(س) = ١$

(٢) $ن(س) = \frac{(س-١)(س^٢+س+١)}{س(س-١)} \times \frac{س+٣}{س^٢+س+١}$

مجال $ن = ح - \{٠ ، ١\}$ $ن(س) = \frac{س+٣}{س}$

(٣) $ن(س) = \frac{٣(س-٥)}{س+٣} \div \frac{٥(س-٥)}{٤(س+٣)}$

مجال $ن = ح - \{-٣ ، ٥\}$

$ن(س) = \frac{٣(س-٥)}{س+٣} \times \frac{٤(س+٣)}{٥(س-٥)} = \frac{١٢}{٥}$

(٤) $ن(س) = \frac{(س+٣)(س-١)}{س+٣} \div \frac{(س-١)(س+١)}{س+١}$

مجال $ن = ح - \{-٣ ، ١ ، -١\}$

$ن(س) = \frac{(س+٣)(س-١)}{س+٣} \times \frac{س+١}{(س-١)(س+١)}$

$ن(س) = ١$

---

٣ (١) $ن(س) = \frac{س-٦}{(٢س-٣)(س-٦)} + \frac{س-٥}{(٢س-٣)(س-٥)}$

مجال $ن = ح - \{\frac{٣}{٢} ، ٦ ، ٥\}$

$ن(س) = \frac{١}{٢س-٣} + \frac{١}{٢س-٣} = \frac{٢}{٢س-٣}$

(٢) $ن(س) = \frac{(س-٢)(س-٦)}{(س-٢)^٢} + \frac{(س-٥)(س+١)}{(س-٥)(س-٢)}$

مجال $ن = ح - \{٢ ، ٥\}$

$ن(س) = \frac{س-٦}{س-٢} + \frac{س+١}{س-٢} = \frac{٢س-٥}{س-٢}$

(٣) $ن(س) = \frac{س^٢+٢س+٤}{(س-٢)(س^٢+٢س+٤)} + \frac{(س-٣)(س+٣)}{(س+٣)(س-٢)}$

مجال $ن = ح - \{٢ ، -٣\}$

$ن(س) = \frac{١}{س-٢} + \frac{س-٣}{س-٢} = \frac{س-٢}{س-٢} = ١$

(٤) $ن(س) = \frac{س-٣}{(س-٣)(س-٤)} + \frac{س-٣}{س-٣}$

مجال $ن = ح - \{٣ ، ٤\}$

$ن(س) = \frac{١}{س-٤} + \frac{س-٤}{س-٤} = \frac{س-٣}{س-٤}$

من ٥ إلى ١٠ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

إجابة اختبر نفسك من أسئلة المحافظات حتى الدرس (٤)

١ (١) $ح - \{٢\}$ (٢) $ح - \{٠ ، ١\}$

(٣) $ح - \{٣ ، -٥\}$ (٤) $\{١\}$

(٥) $\frac{س}{س^٢+٩}$ (٦) $ن_١(س) \neq ن_٢(س)$

---

٢ (١) (أ) $ن(س) = \frac{(س-١)(س+١)}{(س-١)(س^٢+س+١)} - \frac{١}{س^٢+س+١}$

مجال $ن = ح - \{١\}$

$ن(س) = \frac{س+١}{س^٢+س+١} - \frac{١}{س^٢+س+١} = \frac{س}{س^٢+س+١}$

(ب) $ن(س) = \frac{(س-٢)(س-٣)}{(س-٢)(س^٢+٢س+٤)} \div \frac{٢(س-٣)}{س^٢+٢س+٤}$

مجال $ن = ح - \{٢ ، ٣\}$

$ن(س) = \frac{(س-٢)(س-٣)}{(س-٢)(س^٢+٢س+٤)} \times \frac{س^٢+٢س+٤}{٢(س-٣)}$

$ن(س) = \frac{١}{٢}$

٢ (أ) ∵ مجال الدالة ن هو ح − {٣ ، −٣}

∴ س٢ − أ = ٠ ⟸ (٣)٢ − أ = ٠ ⟸ أ = ٩

(ب) $\text{ن}^{-1}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢}-٩}{(\text{س}-١)(\text{س}-٣)} = \frac{(\text{س}-٣)(\text{س}+٣)}{(\text{س}-١)(\text{س}-٣)} = \frac{\text{س}+٣}{\text{س}-١}$

مجال ن^{-1} = ح − {١ ، ٣ ، −٣}

إجابة اختبار الأضواء الوحدة الثانية

١ ١ ∅ ٢ ح − {٣ ، −٥} ٣ $\frac{\text{س}+٣}{٣}$

٤ $\text{ن}_{١}$ ، $\text{ن}_{٢}$ ٥ $\frac{-\text{س}}{٢}$ ٦ ٣

٧ {٢ ، −١} ٨ ح − {−١ ، ٣} ٩ ح − {٧ ، ٠}

---

٢ ١ ∴ المجال هو ح − {١ ، ٣}

∴ (س − ١)(س − ٣) = ٠

∴ س٢ − ٤ س + ٣ = ٠ ∴ أ = −٤ ، ب = ٣

٢ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}-١}{\text{س}-٤}$ مجال ن = ح − {٤ ، −٤}

من ٣ إلى ٧ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

إجابة اختبار الكتاب المدرسى الوحدة الثانية

١ ١ ٣ ، ح − {٠ ، −١} ٢ −٢ ٣ ح − {٠ ، ٢}

---

٢ $\text{ن}_{١}(\text{س}) = \frac{(\text{س}-٣)(\text{س}+٤)}{(\text{س}+١)(\text{س}+٤)} = \frac{\text{س}-٣}{\text{س}+١}$ ، مجال $\text{ن}_{١}$ = ح − {−١ ، −٤}

$\text{ن}_{٢}(\text{س}) = \frac{(\text{س}-٣)(\text{س}+١)}{(\text{س}+١)^{٢}} = \frac{\text{س}-٣}{\text{س}+١}$ ، مجال $\text{ن}_{٢}$ = ح − {−١}

المجال المشترك الذى تتساوى فيه $\text{ن}_{١}$ ، $\text{ن}_{٢}$ هو ح − {−١ ، −٤}

---

٣ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س}-٧)(\text{س}+٧)}{(\text{س}-٢)(\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٤)} \times \frac{\text{س}-٢}{\text{س}+٧}$

$\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}-٧}{\text{س}^{٢}+٢\text{س}+٤}$ ، المجال = ح − {٢ ، −٧}

$\text{ن}(١) = \frac{١-٧}{(١)^{٢}+٢(١)+٤} = \frac{-٦}{٧}$

---

٤ $\text{ن}_{١}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢}}{\text{س}^{٢}(\text{س}-١)} = \frac{١}{\text{س}-١}$ (١)

مجال $\text{ن}_{١}$ = ح − {٠ ، ١}

$\text{ن}_{٢}(\text{س}) = \frac{\text{س}(\text{س}^{٢}+\text{س}+١)}{\text{س}(\text{س}-١)(\text{س}^{٢}+\text{س}+١)} = \frac{١}{\text{س}-١}$ (٢)

مجال $\text{ن}_{٢}$ = ح − {٠ ، ١}

من (١) ، (٢) ∵ $\text{ن}_{١}(\text{س}) = \text{ن}_{٢}(\text{س})$ ، مجال $\text{ن}_{١}$ = مجال $\text{ن}_{٢}$

∴ $\text{ن}_{١} = \text{ن}_{٢}$

من ٥ إلى ٧ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

إجابات الوحدة الثالثة

الاحتمال

إجابة أسئلة س سؤال الدرس (١)

١ ١ ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩}

٢ أ = {١ ، ٤ ، ٩} ∴ ل(أ) = $\frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣}$

ب = {١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩} ∴ ل(ب) = $\frac{٥}{٩}$

جـ = {٥} ∴ ل(جـ) = $\frac{١}{٩}$

---

٢ أ = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠} ، ب = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨}

أ ∩ ب = {٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨}

∴ احتمال وقوع الحدثين أ ، ب معًا = ل(أ ∩ ب) = $\frac{٤}{١١}$

---

٣ أ = {٢ ، ٤ ، ٦} ، ب = {١ ، ٣ ، ٥} ، جـ = {٢ ، ٣ ، ٥}

١ ل(أ ∩ ب) = صفر

٢ الأحداث ليست متنافية، مثنى مثنى؛ لأن أ ∩ ب = ∅

، ب ∩ جـ = {٣ ، ٥} ، أ ∩ جـ = {٢}

---

٤ ١ أ = {٣ ، ٥} ، ب = {٣ ، ٦}

∴ أ ∪ ب = {٣ ، ٥ ، ٦}

∴ احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل = ل(أ ∪ ب) = $\frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

٢ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= ٠,٧ + ٠,٦ − ٠,٥ = ٠,٨

---

٥ ١ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

= ٠,٢ + ٠,٧ − ٠,١٥ = ٠,٧٥

٢ ∵ أ ، ب حدثان متنافيان

∴ أ ∩ ب = ∅ ، ل(أ ∩ ب) = ٠

∴ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) = ٠,٥ + ٠,٣ = ٠,٨

---

٦ ١ ∵ أ ⊂ ب ∴ ل(أ ∪ ب) = ل(ب)

∴ ل(ب) = ٠,٨

٢ (أ) ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

ل(ب) = ل(أ ∪ ب) + ل(أ ∩ ب) − ل(أ)

ص = ل(ب) = ٠,٧ + ٠,٢ − ٠,٤ = ٠,٥

(ب) أ ⊂ ب

∴ ل(أ ∪ ب) = ل(ب) = ٠,٧

ص = ٠,٧

(جـ) الحدثان أ ، ب متنافيان

∴ ل(أ ∩ ب) = صفر

ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب)

٠,٧ = ٠,٤ + ص ⟸ ص = ٠,٣

٧ (١) (أ) احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عددًا يقبل القسمة على ٤ = $\frac{٧}{٣٠}$

(ب) احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عددًا أوليًا = $\frac{١٠}{٣٠}$ = $\frac{١}{٣}$

(جـ) احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل عددًا أوليًا
أو يقبل القسمة على ٤ = $\frac{١٧}{٣٠}$

(٢) احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو خضراء = $\frac{١٤}{٢١}$ = $\frac{٢}{٣}$

إجابة تدريبات الأضواء الدرس (١)

أولًا: التقاطع:

١ (١) ١ (٢) صفر (٣) $\varnothing$

(٤) $\frac{١}{٣}$ (٥) صفر (٦) $\frac{١}{٢}$

(٧) ل(أ) (٨) ١٢ (٩) ب $\subset$ أ

---

٢ (١) (أ) $\frac{١}{٧}$ (ب) صفر (جـ) $\frac{١}{٧}$

(٢) (أ) $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{١}{٦}$ (جـ) صفر

---

٣ (١) ل(أ) = $\frac{ن(أ)}{ن(ف)}$ = $\frac{٥}{١٠}$ = $\frac{١}{٢}$

ف
ب أ
٢ ، ٦ ، ١٠ ، ٨ ، ١ ، ٥ ، ٤ ، ٧ ، ٩ ، ٣

(٢) ل(ب) = $\frac{ن(ب)}{ن(ف)}$ = $\frac{٤}{١٠}$ = $\frac{٢}{٥}$ (٣) ل(أ $\cap$ ب) = $\frac{١}{١٠}$

---

٤ (١) $\frac{٣}{١٥}$ = $\frac{١}{٥}$ (٢) $\frac{٥}{١٥}$ = $\frac{١}{٣}$

---

٥ $\frac{٥}{٣٠}$ = $\frac{١}{٦}$

---

٦ (١) $\frac{١٠}{٥٠}$ = $\frac{١}{٥}$ (٢) $\frac{٢٠}{٥٠}$ = $\frac{٢}{٥}$ (٣) $\frac{١٨}{٥٠}$ = $\frac{٩}{٢٥}$

ثانيًا: الاتحاد:

٧ (١) ل(أ) (٢) ل(أ $\cap$ ب) (٣) ١

(٤) ٠,٣ (٥) ١ (٦) $\frac{٢}{٣}$

(٧) ل(أ) − ل(ب) (٨) $\frac{٥}{٨}$ (٩) ١

(١٠) ٠,٦ (١١) $\frac{١}{٢}$

---

٨ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

---

٩ ٠,٩

---

١٠ ل(أ) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$ ل(ب) = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

ل(أ $\cup$ ب) = $\frac{٣}{٦}$ + $\frac{٣}{٦}$ − $\frac{١}{٦}$ = $\frac{٥}{٦}$

---

١١ (١) ٠,٤ (٢) ٠,٨

---

١٢ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

---

١٣ (١) $\frac{٣٧}{٥٠}$

(٢) $\frac{٢٥}{٥٠}$ = $\frac{١}{٢}$

(٣) $\frac{٤٤}{٥٠}$ = $\frac{٢٢}{٢٥}$

ف
رياضيات E
٧ ، ١٨ ، ١٩ ، ٦

---

١٤ ل(أ $\cup$ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ $\cap$ ب) = ٠,٨ + ٠,٧ − ٠,٦ = ٠,٩

---

١٥ (١) $\frac{٧}{١٦}$ (٢) $\frac{١٤}{١٦}$ = $\frac{٧}{٨}$ (٣) $\frac{١١}{١٦}$

---

١٦ (١) ف = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ...... ، ٢١} (٢) $\frac{٢}{٢٠}$ = ٠,١

تفكير إبداعى TIMSS

١٧ (١) $\frac{١٠}{١٠٠}$ = $\frac{١}{١٠}$ (٢) $\frac{٤}{١٠٠}$ = $\frac{١}{٢٥}$

(٣) $\frac{١٢}{١٠٠}$ = $\frac{٣}{٢٥}$ (٤) $\frac{٢}{١٠٠}$ = $\frac{١}{٥٠}$

١٨

ف
١٧ − س ، س ، ١٥ − س ، ٣

(١٧ − س) + س + (١٥ − س) + ٣ = ٢٥

٣٢ − س + ٣ = ٢٥ ٣٥ − س = ٢٥

س = ٣٥ − ٢٥ = ٨

∴ احتمال (ناجح فى المادتين) = $\frac{١٠}{٢٥}$ = $\frac{٢}{٥}$

إجابة تدريبات الكتاب المدرسى الدرس (١)

١ (١) ف = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

(٢) (أ) أ = {٢ ، ٤ ، ٦} (ب) ب = {١ ، ٣ ، ٥} (جـ) حـ = {٢}

(٣) (أ) ل (أ $\cap$ ب) = صفر (ب) ل(أ $\cap$ حـ) = $\frac{١}{٦}$

---

٢ ، ٣ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

---

٤ (١) صفر (٢) ل (ب) (٣) ١٠٠ (٤) صفر

---

٥ (١) (أ) $\frac{٥}{١٢}$ (ب) $\frac{٨}{١٢}$ = $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٩}{١٢}$ = $\frac{٣}{٤}$

(٢) (أ) $\frac{٤}{٢٠}$ = $\frac{١}{٥}$ (ب) $\frac{٢}{٢٠}$ = $\frac{١}{١٠}$

(٣) (أ) ل(أ) = $\frac{١}{٣}$ − $\frac{١}{١٢}$ = $\frac{٣}{١٢}$ = $\frac{١}{٤}$ (ب) ل (أ $\cup$ ب) = ل (أ) = $\frac{١}{٣}$

(٤) (أ) $\frac{٦}{٢٠}$ = $\frac{٣}{١٠}$ (ب) $\frac{٤}{٢٠}$ = $\frac{١}{٥}$

(جـ) $\frac{١}{٢٠}$ (د) $\frac{٩}{٢٠}$

إجابة اختبر نفسك من أسئلة المحافظات على الدرس (١)

١ ١ ١/٢ ٢ ١٠ ٣ صفر

٤ ١/٣ ٥ ١ ٦ ل(أ)

٢ ١ (أ) ل(أ ∪ ب) = ١/٤ + ٢/٣ − ١/٦ = ٣/٤

(ب) ل(أ ∪ ب) = ل(ب) = ٢/٣

٢ (أ) ٥/٢٠ = ١/٤ (ب) ٤/٢٠ = ١/٥ (جـ) ٨/٢٠ = ٢/٥

إجابة أسئلة س سؤال الدرس (٢)

١ ١ ∵ أ ، ب حدثان متنافيان ∴ ل(أ ∩ ب) = صفر

∵ ل(أ) = ١ − ل(أ') ∴ ل(أ) = ١ − ٠,٦ = ٠,٤

∵ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) ∴ ٠,٩ = ٠,٤ + ل(ب)

∴ ل(ب) = ٠,٥

٢ (أ) ∵ احتمال عدم وقوع الحدث أ = ل(أ')

∴ ل(أ') = ١ − ١/٦ = ٥/٦

(ب) ∵ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

∴ ل(ب) = ٤/٩ + ١/١٨ − ١/٦ = (٨ + ١ − ٣)/١٨ = ٦/١٨ = ١/٣

∴ ل(ب') = ١ − ١/٣ = ٢/٣

٢ ١ ل(أ ∪ ب) = ٠,٥ + ٠,٤ − ٠,١ = ٠,٨

٢ ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب) = ٠,٥ − ٠,١ = ٠,٤

٣ ل(أ ∪ ب)' = ١ − ل(أ ∪ ب) = ١ − ٠,٨ = ٠,٢

٤ ل(ب − أ) = ل(ب) − ل(أ ∩ ب) = ٠,٤ − ٠,١ = ٠,٣

٣ ١ ل(أ − ب) = ٢/٩ ٢ ل(جـ − أ) = ٢/٩

٣ ل(ب − جـ) = ٥/٩ ٤ ل(ب − أ) = ٣/٩ = ١/٣

إجابة تدريبات الأضواء الدرس (٢)

أولاً: الحدث المكمل:

١ ١ ١ ٢ ١ ٣ ١/٢ ٤ ٣/٤

٥ ٥ ٦ ٢/٣ ٧ صفر ٨ ٠,٥

٩ ٠,٨ ١٠ ١/٢

٢ ١ ٤/٥ ٢ ١/٥ ٣ ٢/٥ ٤ ٣/٥

٣ ١ ل(أ') = ١ − ٠,٧ = ٠,٣

٢ ل(أ ∪ ب) = ٠,٧ + ٠,٦ − ٠,٤ = ٠,٩

٤ ١ ل(أ') = ٥/٦

٢ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

٤/٩ = ١/٦ + ل(ب) − ١/١٨

∴ ل(ب) = ٤/٩ − ١/٦ + ١/١٨ = ١/٣ ل(ب') = ٢/٣

٥ ١ ل(ب) = ١ − ٠,٧ = ٠,٣

٢ ل(أ ∪ ب)' = ١ − (٠,٥ + ٠,٣ − ٠,١) = ١ − ٠,٧ = ٠,٣

٦ ١ ٢/١٢ = ١/٦ ٢ ٤/١٢ = ١/٣ ٣ ٥/١٢ ٤ ١١/١٢ ٥ ١

٧ ١ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب) = ٥/٩ + ٢/٩ − ١/٩ = ٦/٩ = ٢/٣

٢ احتمال عدم وقوع أي من الحدثين:

= ل(أ ∪ ب)' = ١ − ل(أ ∪ ب) = ١ − ٢/٣ = ١/٣

٣ احتمال وقوع أحد الحدثين دون وقوع الآخر

= ل(أ ∪ ب) − ل(أ ∩ ب) = ٢/٣ − ١/٩ = ٥/٩

ثانيًا: الفرق بين حدثين:

٨ ١ أ − ب ٢ صفر ٣ ل(أ) ٤ ٠,٤

٥ ٠,٢ ٦ جـ ٧ ١/٣

٩ ١ ل(أ ∩ ب) = ٠,٥ + ٠,٦ − ٠,٩ = ٠,٢

٢ ل(أ − ب) = ٠,٥ − ٠,٢ = ٠,٣

١٠ ١ ل(أ') = ١ − ١/٥ = ٤/٥

٢ ل(ب') = ١ − ٣/٥ = ٢/٥

٣ ل(أ ∪ ب) = ١/٥ + ٣/٥ − ١/١٠ = ٧/١٠

٤ ل(أ − ب) = ١/٥ − ١/١٠ = ١/١٠

٥ ل(ب − أ) = ٣/٥ − ١/١٠ = ٥/١٠ = ١/٢

١١ ١ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب)

٠,٨ = ٠,٥ + ل(ب) − ٠,١ ل(ب) = ٠,٤

٢ ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب) = ٠,٥ − ٠,١ = ٠,٤

١٢ ١ ل(أ ∩ ب) = ١/٤ + ١/٢ − ٥/٨ = ١/٨

٢ ل(ب − أ) = ١/٢ − ١/٨ = ٣/٨

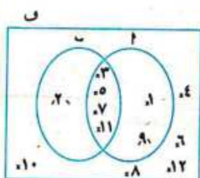
٣ ل(أ ∪ ب)' = ١ − ٥/٨ = ٣/٨

من ١٣ إلى ١٨ راجع إجابتك في «100% إجابات»

١٩ ف = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢}

أ = {١، ٣، ٥، ٧، ٩، ١١}

ب = {٢، ٣، ٥، ٧، ١١}



(١) ل (أ ∪ ب) = $\frac{٧}{١٢}$

(٢) ل (أ − ب) = $\frac{٢}{١٢}$ = $\frac{١}{٦}$

(٣) ل (ب) = $\frac{٥}{١٢}$

(٤) ل (أ́) = $\frac{٦}{١٢}$ = $\frac{١}{٢}$

(٥) ل (أ) = $\frac{٦}{١٢}$ = $\frac{١}{٢}$

تفكير إبداعي TIMSS

٢٠ نفرض أن الجندي الأول أ ، الجندي الثاني ب

ل (أ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ب) = $\frac{١}{٣}$ ، ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٦}$

∴ احتمال إصابة الهدف من أحدهما على الأكثر = ل (أ ∩ ب)́

∴ ل (أ ∩ ب)́ = ١ − ل (أ ∩ ب) = ١ − $\frac{١}{٦}$ = $\frac{٥}{٦}$

---

٢١ (١) ل (أ ∪ ب) = $\frac{٢}{٣}$ + $\frac{١}{٢}$ − $\frac{١}{٦}$ = ١

(٢) ل (أ − ب) = $\frac{٢}{٣}$ − $\frac{١}{٦}$ = $\frac{٣}{٦}$ = $\frac{١}{٢}$

---

٢٢ (أ) ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

٠,٧٥ = ٣ ل (أ ∩ ب) + ٣ ل (أ ∩ ب) − ل (أ ∩ ب) − ل (أ ∩ ب)

∴ ٥ ل (أ ∩ ب) = ٠,٧٥   ل (أ ∩ ب) = ٠,١٥

(ب) ل (أ) = ٣ ل (أ ∩ ب) = ٣ × ٠,١٥ = ٠,٤٥

(جـ) ل (ب́) = ١ − ل (ب) = ١ − ٠,٤٥ = ٠,٥٥

---

٢٣ س = مجموعة الأزواج المرتبة التي تُمثل الحدث (مجموع العددين الظاهرين يساوي ٤)

هي: {(١، ٣)، (٢، ٢)، (٣، ١)}

ص = مجموعة الأزواج المرتبة التي تُمثل الحدث (كلا النردين يُظهران نفس الرقم) هي:

{(١، ١)، (٢، ٢)، (٣، ٣)، (٤، ٤)، (٥، ٥)، (٦، ٦)}

س ∩ ص = {(٢، ٢)} ≠ Ø   ∴ الحدثان غير متنافيين

إجابة تدريبات الكتاب المدرسي الدرس (٢)

١ (أ) $\frac{٥}{٣٠}$ = $\frac{١}{٦}$ (ب) $\frac{٣}{١٠}$ = $\frac{١}{١٠}$ (جـ) $\frac{١}{٣٠}$ (د) $\frac{٧}{٣٠}$

---

٢ ∵ ل (ب) = ٣ ل (أ)، ل (أ ∪ ب) = ٠,٦٤

∴ ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب) = ٠,٦٤

∵ الحدثان متنافيان   ∴ ل (أ ∩ ب) = ٠

∴ ل (أ) + ٣ ل (أ) − صفر = ٠,٦٤   ∴ ٤ ل (أ) = ٠,٦٤

∴ ل (أ) = ٠,١٦   ∴ ل (ب) = ٣ × ٠,١٦ = ٠,٤٨

---

٣ (أ) ∵ الحدثان أ ، ب متنافيان   ∴ ل (أ ∩ ب) = صفر

∴ ل (ب) = ٠,٨ − ٠,٥ = ٠,٣   ∴ قيمة س = ٠,٣

(ب) ∵ ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

ل (ب) = ٠,٨ + ٠,١ − ٠,٥ = ٠,٤   ∴ قيمة س = ٠,٤

من ٤ إلى ٧ راجع إجابتك في «100% إجابات»

إجابة اختبر نفسك من أسئلة المحافظات حتى الدرس (٢)

١ (١) $\frac{٣}{٤}$ (٢) $\frac{١}{٣}$ (٣) ٠,٦

(٤) ٠,٢   (٥) ٠,٩٥   (٦) ل (ب − أ) = ل (ب)

---

٢ (١) (أ) ل (أ − ب) = ٠,٦ − ٠,٤ = ٠,٢

(ب) ل (أ ∪ ب) = ٠,٦ + ٠,٧ − ٠,٤ = ٠,٩

(٢) (أ) ∵ أ ، ب حدثان متنافيان.   ∴ ل (أ ∩ ب) = صفر

(ب) ل (أ) = ١ − ل (أ́) = ١ − ٠,٥ = ٠,٥

(جـ) ل (ب) = ل (أ ∪ ب) − ل (أ) = ٠,٨ − ٠,٥ = ٠,٣

إجابة اختبار الأضواء على الوحدة الثالثة

١ (١) $\frac{١}{٣}$ (٢) صفر   (٣) صفر

(٤) ٠,٨   (٥) Ø   (٦) ٠,٧

(٧) $\frac{١}{٤}$ (٨) ف   (٩) $\frac{٣}{٧}$

---

٢ (١) (أ) $\frac{٥}{١٢}$ (ب) $\frac{٨}{١٢}$ = $\frac{٢}{٣}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$

(٢) ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب)

∴ ٠,٥ = ٠,٧ − ل (أ ∩ ب)

∴ ل (أ ∩ ب) = ٠,٧ − ٠,٥ = ٠,٢

(٣) (أ) ٠,٧   (ب) ٠,٨   (جـ) ٠,١

من ٤ إلى ٧ راجع إجابتك في «100% إجابات»

إجابة اختبار الكتاب المدرسى الوحدة الثالثة

١ (١) ٣٥٪   (٢) $\frac{١}{٢}$ (٣) $\frac{١}{٤}$ (٤) ٠,٢

---

٢ (١) $\frac{٢}{٥}$ (٢) $\frac{٣}{٥}$ (٣) $\frac{١٣}{٢٠}$

---

٣ (١) $\frac{١}{٣}$ (٢) $\frac{١}{٥}$ (٣) $\frac{١}{١٥}$ (٤) $\frac{٧}{١٥}$

---

٤ (١) احتمال عدم وقوع الحدث أ

∴ ل (أ́) = ١ − ل (أ) = ١ − ٠,٨ = ٠,٢

(٢) ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

= ٠,٨ + ٠,٧ − ٠,٦ = ٠,٩

ثانيًا: الهندسة المستوية

إجابات الوحدة الرابعة

الدائـرة

إجابة أسئلة س سؤال الدرس (١)

١ ∵ نق = أ م = √((−٣ − ٠)² + (٠ − ٤)²) = ٥ وحدات طول

١ ∴ مساحة الدائرة م = π نق² = (٥)² π = ٢٥ π وحدة مساحة

٢ ∴ محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ × ٥ π = ١٠ π وحدات طول

---

٢ ١ س = ١٠ ، ص = ٣٥

٢ س = ٧٠ ، ص = ٤٠

---

٣ ΔΔ أ م ب ، أ م جـ

فيهما { م ب = م جـ = نق ، أ م ضلع مشترك ، ق(∠أ م ب) = ق(∠أ م جـ) (معطى) }

∴ Δ أ م ب ≡ Δ أ م جـ وينتج أن: أ جـ = أ ب = ٧ سم

في Δ أ م ب ∵ م ب = م أ = نق

∴ ق(∠أ ب م) = ق(∠ب أ م) = ٢٥°

∴ ق(∠أ م ب) = ١٨٠° − (٢٥° + ٢٥°) = ١٣٠°

∴ ق(∠أ م ب) = ق(∠أ م جـ) = ١٣٠°

∵ مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة = ٣٦٠°

∴ ق(∠ب م جـ) = ٣٦٠° − (١٣٠° + ١٣٠°) = ١٠٠°

---

٤ ١ ١٦ ٢ ٤٥

---

٥ ∵ جـ منتصف أب ∴ م جـ ⊥ أب

∴ ق(∠م جـ ب) = ق(∠م جـ أ) = ٩٠°

في Δ م جـ ب ∵ ق(∠جـ م ب) = ٦٥° ، ق(∠م جـ ب) = ٩٠°

∴ ق(∠ب) = ١٨٠° − (٦٥° + ٩٠°) = ٢٥°

∵ م أ = م ب = نق ∴ ق(∠م أ ب) = ق(∠ب) = ٢٥°

---

٦ ١ ∵ ء منتصف س ص ∴ م ء ⊥ س ص

∵ هـ منتصف س ع ∴ م هـ ⊥ س ع

∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلية للشكل الرباعي = ٣٦٠°

∴ ق(∠ء م هـ) = ٣٦٠° − (٩٠° + ١٠٠° + ٩٠°) = ٨٠°

∵ ق(∠ء م هـ) = ق(∠أ م ب) = ٨٠° بالتقابل بالرأس

∵ م أ = م ب = نق

∴ ق(∠أ) = ق(∠ب) = (١٨٠° − ٨٠°) ÷ ٢ = ٥٠°

في Δ م أ ب ∵ ق(∠أ م ب) > ق(∠ب)

∴ أ ب > م أ ∵ م أ = نق

∴ أ ب > نق

٢ (أ) ∵ ء منتصف س ص ∴ م ء ⊥ س ص

∴ ق(∠م ء س) = ٩٠°

∵ هـ منتصف س ع ∴ م هـ ⊥ س ع

∴ ق(∠م هـ س) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلية للشكل الرباعي = ٣٦٠°

∴ ق(∠ء م هـ) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ١٢٠°) = ٦٠°

(ب) Δ س ء هـ فيه س ء = س هـ

∴ ق(∠س ء هـ) = ق(∠س هـ ء) = (١٨٠° − ١٢٠°) ÷ ٢ = = ٣٠°

∵ ق(∠م ء هـ) = ق(∠م هـ ء) = ٩٠° − ٣٠° = ٦٠°

∴ Δ م ء هـ متساوى الأضلاع.

---

٧ ١ ∵ ء منتصف أب ∴ م ء ⊥ أب

∵ هـ منتصف أجـ ∴ م هـ ⊥ أجـ

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي أ ء م هـ الداخلة = ٣٦٠°

∴ ق(∠ء م هـ) = ٣٦٠° − (٤٥° + ٩٠° + ٩٠°) = ١٣٥°

∴ ق(∠ء م و) = ١٨٠° − ١٣٥° = ٤٥°

في Δ ء و م

∵ ق(∠و ء م) = ٩٠° ، ق(∠ء م و) = ٤٥°

∴ ق(∠ء و م) = ٤٥°

∴ ق(∠ء م و) = ق(∠ء و م)

∴ Δ ء و م متساوى الساقين.

٢ ∵ م جـ ⊥ أب ∴ جـ منتصف أب

فى Δ أ م جـ ∴ (م جـ)² = (١٧)² − (١٥)² = ٦٤

∴ م جـ = ٨ سم

فى Δ م جـ ء القائم الزاوية فى جـ

∴ (جـ ء)² = (م ء)² − (م جـ)² = ١٠٠ − ٦٤ = ٣٦

∴ جـ ء = ٦ سم ∴ ب ء = ١٥ − ٦ = ٩ سم

إجابة تدريبات الأضواء الدرس (١)

أولًا: مفاهيم أساسية عن الدائرة:

١ ١ ٦ π ٢ ١١ π ٣ (٥ ، ٥)

٤ ٢٦ ، ٢٨ ٥ (٢ ، √٥) ٦ ١٠٠ π

٧ ٤ √٧ ٨ ١٢ π ٩ ٦

١٠ ٦ ١١ π نق

٢ (١) بمركز الدائرة، طول نصف القطر.
(٢) مركز الدائرة – أى نقطة على الدائرة. (٣) الوتر (٤) القطر
(٥) مجموعة النقاط الواقعة داخل الدائرة ∪ مجموعة النقاط الواقعة على الدائرة
(٦) نصف قطر (٧) ١ : ٢ (٨) ٤٩ (٩) ١٢
(١٠) ٥ وحدات طول

---

٣ (١) س = ١٠٠ (٢) ص = ٢٠ (٣) س = ٥٤ ، ص = ٧٢
(٤) س = ٢٠ ، ص = ٩٠

ثانيًا: نتائج هامة على الدائرة:

٤ (١) عدد لا نهائى. (٢) محور تماثل لها (٣) ٣٦
(٤) ١٢٥° (٥) ٨ (٦) ١٠
(٧) ٢ (٨) ٤سم (٩) ٤

---

٥ (١) ق(∠ أ م ح) = ٤٠
(٢) ق(∠ ء م أ) = ٤٠ ، ء م = ٤سم
(٣) ق(∠ ء م س) = ١٢٤ ، ء هـ = ٥ – ٣ = ٢سم
(٤) مساحة سطح الدائرة م = ٢٥ π سم²

---

٦ فى Δ أ ب ح
ق(∠ب) = ١٨٠° – [٦٠° + ٧٠°] = ٥٠°
∵ ء منتصف أب ∴ ق(∠ م ء ب) = ٩٠°
∵ هـ منتصف ب ح ∴ ق(∠ م هـ ب) = ٩٠°
فى الشكل الرباعى ء م هـ ب
∴ ق(∠ ء م هـ) = ٣٦٠° – (٩٠° + ٩٠° + ٥٠°) = ١٣٠°

---

٧ ∵ ح منتصف أب ∴ م ح ⊥ أب
∴ أ ح = √((١٠)² – (٦)²) = ٨ سم (نظرية فيثاغورث)
∴ أ ب = ٢ × ٨ = ١٦ سم
∵ م أ = م ء = س ∴ ح ء = ١٠ – ٦ = ٤ سم

---

٨ ∵ ح منتصف أب
∴ ق(∠ أ ح م) = ٩٠°
∵ ق(∠ أ م ح) = ٦٠°
∴ ق(∠أ) = ٣٠°
فى Δ أ ح م
∴ ح م = ½ أ م = ½ × ٨ = ٤ سم

---

٩ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

---

١٠ ∵ س منتصف أب
∴ م س ⊥ أب
∵ أب // ح ء ∴ م س ⊥ ح ء
∴ ص منتصف ح ء

---

١١ (١) ∵ م هـ ⊥ أب
∴ أ هـ = هـ ب (فى الدائرة الكبرى) (١)
، هـ ح = هـ ء (فى الدائرة الصغرى) (٢)
بطرح (٢) من (١)
∴ أ هـ – ح هـ = هـ ب – هـ ء
∴ أ ح = ء ب
(٢) ∵ أب = ١٦ سم
∴ أ هـ = ٨ سم
فى Δ أ هـ م باستخدام نظرية فيثاغورث
م أ = √(٣٦ + ٦٤) = ١٠ سم
∴ طول نصف قطر الدائرة الكبرى = ١٠ سم

TIMSS تفكير إبداعى

١٢ طول السلك = ١٤ + ١٤ + ¼ × ٢ × ٢٢/٧ × ١٤ = ٥٠ سم

---

١٣ ∵ ق(∠ س ء ب) = ق(∠ هـ ء م) = ٦٥° بالتقابل بالرأس
، ق(∠ ص هـ ح) = ق(∠ ء هـ م) = ٥٠° بالتقابل بالرأس
∵ س منتصف أب ∴ م س ⊥ أب
∵ ص منتصف أح ∴ م ص ⊥ أح
فى Δ ب س ء
ق(∠ب) = ١٨٠° – (٩٠° + ٦٥°) = ٢٥°
، فى Δ ح ص هـ
ق(∠ح) = ١٨٠° – (٩٠° + ٥٠°) = ٤٠°
، فى Δ أ ب ح ∴ ق(∠أ) = ١٨٠° – (٢٥° + ٤٠°) = ١١٥°

---

١٤ (١) ∵ م ء ⊥ ب ح ∴ ء منتصف ب ح
∵ م هـ ⊥ أ ح ∴ هـ منتصف أ ح
∵ ء منتصف ب ح ، هـ منتصف أ ح
فى Δ أ ب ح ∴ ء هـ // أ ب
(٢) ∵ ء منتصف ب ح ∴ ء ح = ½ ب ح
∵ هـ منتصف أ ح ∴ هـ ح = ½ أ ح
، ء هـ = ½ أ ب
∵ محيط Δ ح ء هـ = ء ح + ح هـ + هـ ء
= ½ ب ح + ½ أ ح + ½ أ ب
= ½ [ب ح + أ ح + أ ب]
= ½ محيط Δ أ ب ح

15 (أ) العمل: نرسم $\overline{مد}$ ، $\overline{مح}$

البرهان:

∵ في أي مثلث مجموع طولي أي ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث

∴ ن م + م د > ن د في Δ م ن د

∵ م د = م ب = نق

∴ ن م + م ب > ن د

∴ ن ب > ن د

(ب) في Δ ن م ح

∵ ن ح + ح م > ن م

∵ م ح = م أ = نق ∴ ن ح + نق > ن أ + نق

∴ ن ح > ن أ

إجابة تدريبات الكتاب المدرسي الدرس (1)

1 (أ) أب = 24 سم، حد = 8 سم

(ب) ق(∠أ) = 45°، م أ = $5\sqrt{2}$ سم

(جـ) مساحة الدائرة = 616 سم²

---

2 ∵ ح منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overline{مح} \perp \overline{أب}$

∵ أب = 24 سم ∴ أح = 12 سم

∵ Δ أ م ح قائم الزاوية في ح

∴ $(مح)^2 = (أم)^2 - (أح)^2$

∴ $(مح)^2 = 169 - 144 = 25$

∴ م ح = 5 سم

∵ نق = 13 سم ∵ م د = 13 سم

∴ ح د = 13 − 5 = 8 سم

مساحة Δ أ د ب = $\frac{1}{2} \times 8 \times 24 = 96$ سم²

---

3 راجع إجابتك في «100% إجابات»

---

4 ∵ د منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overline{مد} \perp \overline{أب}$

في Δ أ م ح ∵ م أ = ح م [أنصاف أقطار]

∴ ق(∠م أ ح) = ق(∠م ح أ) ← (1)

، ∵ ق(∠م أ ح) = ق(∠ب أ ح) [معطى] ← (2)

من (1) ، (2)

∴ ق(∠ب أ ح) = ق(∠م ح أ) وهما في وضع تبادل

∴ $\overline{أب} // \overline{مح}$ ، ∵ $\overline{مد} \perp \overline{أب}$ ∴ $\overline{مد} \perp \overline{مح}$

---

5 ∵ د منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overline{مد} \perp \overline{أب}$

∵ هـ منتصف $\overline{أح}$ ∴ $\overline{مهـ} \perp \overline{أح}$

في الشكل الرباعي: م د أ هـ

ق(∠د م هـ) = 360° − (90° + 90° + 120°) = 60°

∵ ق(∠س م ص) = ق(∠د م هـ) (بالتقابل بالرأس)

∴ ق(∠س م ص) = 60°

في Δ س م ص

∵ م س = م ص (أنصاف أقطار في الدائرة)

∴ ق(∠م س ص) = ق(∠م ص س) = 60°

∴ Δ س ص م متساوي الأضلاع.

---

6 نرسم $\overline{مس} \perp \overline{حد}$ ، $\overline{مص} \perp \overline{أب}$

∵ $\overline{مس} \perp \overline{حد}$

∴ حس = س د = 5 سم

∵ $\overline{مص} \perp \overline{أب}$

∴ أص = ص ب = 6 سم

في Δ م س ح باستخدام نظرية فيثاغورث

س م = $\sqrt{(7)^2 - (5)^2}$

∴ م س = $2\sqrt{6}$ سم

في Δ م ص ب باستخدام نظرية فيثاغورث

م ص = $\sqrt{(7)^2 - (6)^2}$

∴ م ص = $\sqrt{13}$ سم ، ∴ س و = $\sqrt{13}$ سم

في Δ م س و باستخدام نظرية فيثاغورث

م و = $\sqrt{(2\sqrt{6})^2 + (\sqrt{13})^2}$ ∴ م و = $\sqrt{37}$ سم

من **7** إلى **9** راجع إجابتك في «100% إجابات»

إجابة اختبر نفسك من أسئلة المحافظات على الدرس (1)

1 (1) قطرًا (2) سطح الدائرة م (3) 3 (4) $\overline{حد}$

---

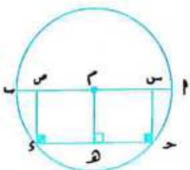
2 (1) العمل: نرسم $\overline{مأ}$

∵ $\overline{مس} \perp \overline{أب}$ ∴ س منتصف $\overline{أب}$

في Δ أ م س القائم الزاوية في س أ س = $\sqrt{(13)^2 - (5)^2} = 144$

∴ أ س = 12 سم ∴ أب = 24 سم

(2) نرسم $\overline{مهـ} \perp \overline{حد}$



∵ $\overline{مهـ} \perp \overline{حد}$

∴ حهـ = هـ د

∵ $\overline{سح} \perp \overline{حد}$

، $\overline{صد} \perp \overline{حد}$

∴ $\overline{سح} // \overline{مهـ} // \overline{صد}$ ، حهـ = هـ د

∴ س م = م ص ← (1)

∵ أ م = م ب = نق ← (2)

بطرح (1) من (2)

∴ أ س = ب ص (وهو المطلوب)

إجابة أسئلة س سؤال الدرس (٢)

١ ① (أ) ∵ أ تقع داخل الدائرة

∴ ٠ ⩽ م أ < نق

٠ ⩽ ٢س < ٦ (÷٢)

٠ ⩽ س < ٣ ، س ∈ [٠ ، ٣[

(ب) ∵ أ تقع على الدائرة ∴ أ م = نق

∴ س^{٢} − ٦ = ٣ ، س^{٢} = ٩ ⟸ س = ± ٣

② (أ) ∵ م أ > نق ∴ أ تقع خارج الدائرة

(ب) ∵ م أ < نق ∴ أ تقع داخل الدائرة

(جـ) ∵ م أ > نق ∴ أ تقع خارج الدائرة

(د) ∵ م أ = نق ∴ أ تقع على الدائرة

(هـ) ∵ م أ > نق ∴ أ تقع خارج الدائرة

---

٢ ① يقع خارج الدائرة م ② مماس للدائرة م

③ قاطع الدائرة م

---

٣ ∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠ م أ ب) = ١٨٠° − (٥٤° + ٣٦°) = ٩٠°

∵ $\overline{\text{م أ}}$ نصف قطر ∴ $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

∴ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ مماس للدائرة م عند أ

---

٤ ① ٣٥° ② ٣٠° ③ ١٣٠°

④ ٤ سم ⑤ ٦٠ سم ⑥ ٣٢ سم

---

٥ نق$_{١}$ + نق$_{٢}$ = ١٠ سم ، نق$_{١}$ − نق$_{٢}$ = ٤ سم

① ∵ م ن > نق$_{١}$ + نق$_{٢}$ ∴ الدائرتان متباعدتان

② ∵ م ن = نق$_{١}$ − نق$_{٢}$ ∴ الدائرتان متماستان من الداخل

③ ∵ م ن < نق$_{١}$ − نق$_{٢}$ ∴ الدائرتان متداخلتان

④ ∵ م ن = نق$_{١}$ + نق$_{٢}$ ∴ الدائرتان متماستان من الخارج

⑤ ∵ م ن = صفر ∴ الدائرتان متحدتا المركز

⑥ ∵ نق$_{١}$ − نق$_{٢}$ < م ن < نق$_{١}$ + نق$_{٢}$ ∴ الدائرتان متقاطعتان.

---

٦ ① (أ) ب حـ = ٩ − ٣ = ٦ سم (ب) ق(∠ هـ م ن) = ١١٠°

(جـ) أ ب = ١٠ سم

② ∵ $\overleftarrow{\text{حـ س}}$ مماس للدائرة م عند حـ ، $\overline{\text{م حـ}}$ نصف قطر في الدائرة م

∴ ق(∠ م حـ هـ) = ٩٠°

∵ $\overleftrightarrow{\text{م ن}}$ خط المركزين ، $\overline{\text{أ ب}}$ وتر مشترك

∴ ق(∠ م و أ) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل هـ حـ م و الداخلة = ٣٦٠° (شكل رباعي)

∴ ق(∠ حـ م و) + ق(∠ حـ هـ و) = ١٨٠° ← ①

∵ $\overleftrightarrow{\text{حـ س}}$ خط مستقيم

∴ ق(∠ حـ هـ و) + ق(∠ س هـ و) = ١٨٠° ← ②

من ① ، ②

∴ ق(∠ س هـ و) = ق(∠ حـ م ن)

إجابة تدريبات الأضواء الدرس (٢)

أولًا: موضع نقطة بالنسبة لدائرة:

١ ① > ② داخل الدائرة ③ خارج الدائرة

④ ٣ ⑤ ٢ ⑥]$\frac{٢}{٣}$ ، ٢[

---

٢ ① خارج ② داخل ③ ٣$\sqrt{٧}$

④ ١١ ⑤ خارج

---

٣ ∵ النقطة أ تقع داخل الدائرة

∴ ٠ ⩽ م أ < نق

٠ ⩽ ٢س − ٣ < ٥ (بإضافة ٣ لجميع الأطراف)

٣ ⩽ ٢س < ٨ (بقسمة جميع الأطراف ÷ ٢)

$\frac{٣}{٢}$ ⩽ س < ٤ ∴ س ∈ [$\frac{٣}{٢}$ ، ٤[

ثانيًا: موضع مستقيم بالنسبة لدائرة:

٤ ① متوازيين ② ٣ ③ قاطعًا للدائرة

④]٥ ، ∞[⑤]٣ ، ∞[⑥ مماس للدائرة

⑦ خارجًا ⑧ ٧٠° ⑨ ٥٠

⑩ ١٢ ⑪ ٢ ⑫ ٣٠

---

٥ ① خارج الدائرة م ② مماسًا ③ $\overline{\text{حـ ء}}$

④ ٧٠ ⑤ ٥سم ، ١سم ، ٢ سم

---

٦ ∵ محيط الدائرة = ٢ π نق

∴ ٤٤ = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × نق ∴ نق = ٧سم

∵ $\overline{\text{ب حـ}}$ مماس للدائرة م ∴ ق(∠ أ ب حـ) = ٩٠°

∵ ق(∠ حـ) = ٣٠° ∴ أ ب = $\frac{١}{٢}$ أ حـ

∵ أ ب = ١٤سم ∴ أ حـ = ٢٨سم

∴ ب حـ = $\sqrt{(٢٨)^{٢} - (١٤)^{٢}}$ = ١٤$\sqrt{٣}$ سم

---

٧ ∵ $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ فإن أ هـ = هـ ب = ٤ سم

في المثلث م أ هـ

∵ ق(∠ أ م هـ) = ١٨٠° − ١٥٠° = ٣٠°

∴ م أ = ٢ أ هـ ∴ م أ = ٢ × ٤ = ٨سم

∴ طول القطر $\overline{\text{حـ ء}}$ = ٢ × ٨ = ١٦سم

٨ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

٩ ∵ ء حـ مماس للدائرة م عند حـ ، م حـ نصف قطر

∴ ق(∠م حـ ء) = ٩٠°

∴ ق(∠حـ م ء) = ١٨٠° − (٩٠° + ٢٠°) = ٧٠°

∵ ب ا // م ء

∴ ق(∠ا) = ق(∠م هـ حـ) = ٨٠° بالتناظر

∴ ق(∠هـ حـ م) = ١٨٠° − (٧٠° + ٨٠°) = ٣٠°

١٠ ∵ ق(∠ا ب م) = ١٨٠° − ١٢٤° = ٥٦°

، ق(∠ا م ب) = ق(∠حـ م ء) = ٣٤° (بالتقابل بالرأس)

فى △ م ا ب

∴ ق(∠ا) = ١٨٠° − (٥٦° + ٣٤°) = ٩٠°

∴ ا ب مماس للدائرة م

١١ ∵ م ع = م س = نق = ٥ سم ∴ م ص = ٥ + ٨ = ١٣ سم

∵ (م ص)² = (١٣)² = ١٦٩

، (م س)² + (س ص)² = (٥)² + (١٢)² = ٢٥ + ١٤٤ = ١٦٩

∴ (م ص)² = (م س)² + (س ص)²

∴ ق(∠م س ص) = ٩٠° ∴ م س ⊥ س ص

∴ س ص مماس للدائرة م عند س

من ١٢ إلى ١٤ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

١٥ العمل: نرسم م هـ ⊥ ب حـ

ونرسم م حـ ، م ء ، م ا

البرهان:

∵ ا حـ = ١٢ سم ، ا ب = ٤ سم

∴ ب حـ = ٨ سم

∵ م هـ ⊥ ب حـ

∴ حـ هـ = ب هـ = ٤ سم

∵ طول نصف قطر الدائرة م يساوى ٥ سم ⩽ م حـ = ٥ سم

∵ △ م هـ حـ فيه ق(∠م هـ حـ) = ٩٠°

∴ م هـ = √(٢٥ − ١٦) = ٣ سم

(١) ∴ بُعد الوتر ب حـ عن مركز الدائرة يساوى ٣ سم.

△ م هـ ا فيه: ق(∠م هـ ا) = ٩٠°

∴ (م ا)² = (٣)² + (٨)² = ٧٣ ∴ م ا = √٧٣ سم

∵ ا ء مماس للدائرة ∴ م ء ⊥ ا ء

فى △ ا ء م ∵ ق(∠ا ء م) = ٩٠°

(٢) ∴ ا ء = √(٧٣ − ٢٥) = √٤٨ = ٤√٣ سم

ثالثًا: وضع دائرة بالنسبة لدائرة أخرى:

١٦
١ م ن	٢ متماستان من الخارج	٣ ٢
٤ ١	٥ متقاطعتان	٦ ٥
٧ ٤	٨ ٤	٩ متماستان من الخارج
١٠ متقاطعتين	١١ ٦ π	١٢ {٤ ، ١٠}

١٧ ∵ ا ب مماس مشترك للدائرتين م ، ن

∴ ا ب ⊥ م ن ← (١)

∵ م ا = ن ا = نق ← (٢)

من (١) ، (٢)

∴ △ ب م ن متساوى الساقين ∴ ب م = ب ن ← (٣)

∵ حـ م = ء ن = نق ← (٤)

من ٣ ، ٤ بالطرح ∴ ب حـ = ب ء

١٨ ∵ ء ا مماس للدائرة م عند ا

∴ ق(∠ء ا م) = ٩٠°

∵ م ، ن دائرتان متقاطعتان فى ب ، حـ

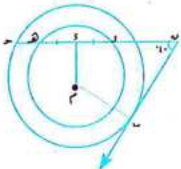
∴ م ن ⊥ ب حـ ∴ ق(∠م هـ ء) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعى = ٣٦٠°

∴ ق(∠ا م هـ) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٥٠°) = ١٣٠°

من ١٩ إلى ٢١ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

٢٢ البرهان:



∵ ء منتصف و هـ

∴ م ء ⊥ و هـ ، ق(∠و ء م) = ٩٠°

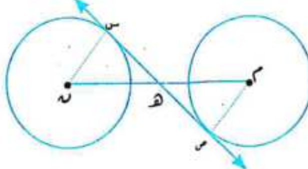
∵ ن ب مماس للدائرة م

∴ ق(∠ن ب م) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعى = ٣٦٠°

∴ ق(∠ء م ب) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٤٠° + ٩٠°) = ١٤٠°

٢٣ العمل: نرسم كلًا من م ص ، ن س نصفى قطرين



البرهان:

∵ س ص مماس للدائرتين م ، ن

∴ م ص ⊥ س ص ، ن س ⊥ س ص

∴ ق(∠م ص هـ) = ق(∠ن س هـ) = ٩٠°

∵ ق(∠م هـ ص) = ق(∠ن هـ س) بالتقابل بالرأس

∴ ق(∠م) = ق(∠ن)

∴ ∆∆ م ص هـ ، ن س هـ

فيهما: { م ص = ن س = نق (الدائرتان متطابقتان)
ق(∠ م ص هـ) = ق(∠ ن س هـ) = ٩٠°
ق(∠م) = ق(∠ن) }

∴ ∆ م ص هـ ≡ ∆ ن س هـ وينتج أن: م هـ = ن هـ ، ص هـ = س هـ

∴ هـ منتصف كلٍّ من $\overline{م ن}$ ، $\overline{س ص}$

تفكير إبداعى TIMSS

٢٤ ∵ الدوائر متماسة

∴ ن م = ٢ + ٣ = ٥ سم ، ء ن = ٣ سم ، ء م = ٤ سم

∵ (ن م)² = ٢٥ ، (ء ن)² + (ء م)² = ٩ + ١٦ = ٢٥

∴ (ن م)² = (ء ن)² + (ء م)²

∴ ∆ ء م ن قائم الزاوية فى ء

∴ مساحة ∆ ن ء م = ½ × ٤ × ٣ = ٦ سم²

---

٢٥ ∵ الدائرتان م ، ن متماستان من الخارج

∴ م ن = ٥ + ٨ = ١٣ سم

∵ $\overleftrightarrow{ن حـ}$ مماس للدائرة م ∴ ق(∠ن حـ م) = ٩٠°

فى ∆ ن حـ م القائم الزاوية فى حـ

ن حـ = √((١٣)² − (٨)²) = √١٠٥ سم

---

٢٦ ∵ $\overleftrightarrow{أ ب}$ مماس للدائرة م ∴ ق(∠أ ب م) = ٩٠°

∵ م ب = م ء = نق

∴ ق(∠م ب ء) = ق(∠م ء ب) = (٢ س)°

∵ (∠أ م ب) خارجة عن ∆ ء م ب

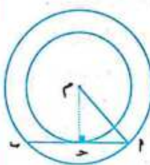
∴ ق(∠أ م ب) = (٢س)° + (٢س)° = (٤س)°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ (س)° + (٤س)° = (٩٠)° ∴ س = ١٨

---

٢٧ نرسم $\overline{م حـ}$ ، $\overline{م أ}$



∵ $\overline{أ ب}$ مماس للدائرة الصغرى

∴ $\overline{م حـ}$ ⊥ $\overline{أ ب}$

∴ حـ منتصف $\overline{أ ب}$

∴ أ حـ = ب حـ = ٧ سم

فى ∆ أ حـ م : (أ حـ)² = (أ م)² − (م حـ)² (١)

∴ مساحة الجزء المحصور بين الدائرتين = مساحة الدائرة الكبرى − مساحة الدائرة الصغرى

= π(أ م)² − π(م حـ)² = π[(أ م)² − (م حـ)²]

من (١) = π × (أ حـ)² = ٤٩ π

إجابة تدريبات الكتاب المدرسى الدرس (٢)

١ (أ) مماسًا للدائرة (ب) متماستان من الخارج (جـ)]١ ، ٧[

(د) خارج (هـ)]٣ ، ∞[(و) قاطعًا للدائرة

---

٢ (أ) ص م = ٤سم ، حـ س = ٨سم ، حـ ء = ٢٤ سم.

(ب) نعم، محيط ∆ أ ن م = ٦ + ٨ + ١٠ = ٢٤سم ، طول $\overline{حـ ء}$ = ٢٤سم

(جـ) ق(∠ن أ م) = ٩٠° ؛ لأن (أ ن)² + (أ م)² = (ن م)²

(د) مساحة سطح المثلث ن أ م = ½ × ٦ × ٨ = ٢٤سم²

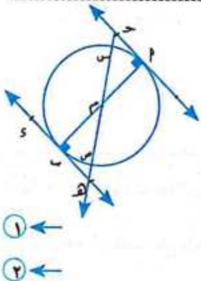
(هـ) أ ب = ٢ × (٦ × ٨)/١٠ = ٩,٦سم

---

٣ ، ٤ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

---

٥ البرهان: فى ∆ هـ ب م ، ∆ حـ أ م



فيهما { م ب = م أ (أنصاف أقطار)
ق(∠أ م حـ) = ق(∠ب م هـ)
ق(∠حـ أ م) = ق(∠ هـ ب م) }

∴ ∆ هـ ب م ≡ ∆ حـ أ م

وينتج من ذلك أن: م حـ = م هـ ← (١)

، ∵ م س = م ص أنصاف أقطار ← (٢)

بطرح (٢) من (١)

∴ م حـ − م س = م هـ − م ص ∴ حـ س = هـ ص

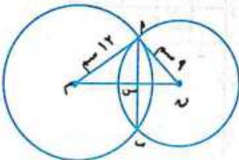
---

٦ فى ∆ ن أ م نجد أن:

(ن أ)² + (أ م)² = (٩)² + (١٢)² = ٢٢٥ = (١٥)² = (م ن)²

∴ ق(∠ن أ م) = ٩٠°

، ∵ $\overleftrightarrow{م ن}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ وينصفه



• باستخدام نظرية إقليدس:

فى ∆ أ ن م

∴ أ س = (١٢ × ٩)/١٥ = ٧,٢ سم ∴ أ ب = ٢ × ٧,٢ = ١٤,٤ سم

إجابة اختبر نفسك من أسئلة المحافظات حتى الدرس (٢)

١ (١) مماسًا (٢) متقاطعتين (٣) ٨π (٤) خارج

---

٢ (١) (أ) متماستان من الخارج م ن = نق١ + نق٢ ∴ م ن = ١٤ سم

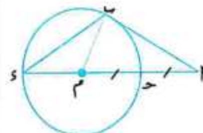
(ب) متماستان من الداخل م ن = نق١ − نق٢ ∴ م ن = ٢ سم

(حـ) الدائرتان متحدتان فى المركز ∴ م ن = صفر

(٢) العمل: نصل $\overline{ب م}$

البرهان: ∵ $\overleftrightarrow{أ ب}$ مماس للدائرة م

∴ ق(∠أ ب م) = ٩٠° ← (١)



فى Δ أ ب م

∵ م حـ = م ب = حـ أ = نق

∴ أ م = ٢ م ب

∴ ق(∠أ) = ٣٠°

، ق(∠أ م ب) = ٦٠°

∵ م ب = م ء = نق ∴ ق(∠ء) = ق(∠م ب ء)

∵ (∠أ م ب) خارجة عن Δ م ب ء

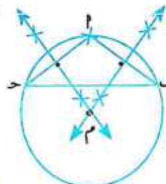
∴ ق(∠م ب ء) = $\frac{٦٠°}{٢}$ = ٣٠° ← (٢)

من (١)، (٢) ∴ ق(∠أ ب ء) = ٩٠° + ٣٠° = ١٢٠°

إجابة أسئلة س سؤال الدرس (٣)

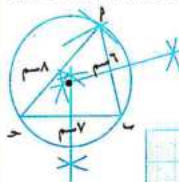
١ ∵ المثلث منفرج الزاوية

∴ م تقع خارج المثلث

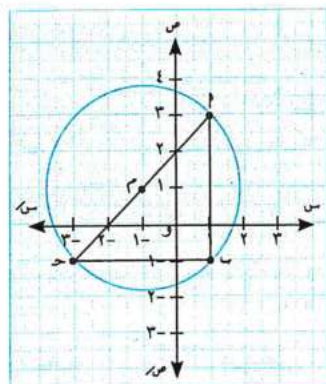


٢ ١ • نوع المثلث حاد الزوايا

• مركز الدائرة يقع داخل المثلث



٢



(أ ب)^2 = (١ - ١)^2 + (٣ + ١)^2 = ١٦

(ب حـ)^2 = (١ + ٣)^2 + (-١ + ١)^2 = ١٦

(أ حـ)^2 = (١ + ٣)^2 + (٣ + ١)^2 = ٣٢

∵ (أ ب)^2 + (ب حـ)^2 = (أ حـ)^2

∴ Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى ب

وإحداثى م يقع عند منتصف الوتر $\overline{أحـ}$ ، ومن الرسم إحداثى م (-١ ، ١)

٣ ∵ نق > $\frac{١}{٢}$ أ ب

∴ يمكن رسم دائرتين طول نصف قطر

كل منهما يساوى ٤سم

وتمر بالنقطتين أ ، ب



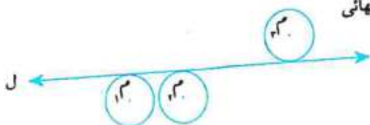
إجابة تدريبات الأضواء الدرس (٣)

أولًا: رسم دائرة تمر بنقطة معلومة:

١ ١ عدد لا نهائى من الدوائر ٢ مركزها وطول نصف قطرها

٣ مركزها وإحدى نقاطها

٢ عدد لا نهائى



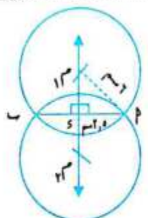
ثانيًا: رسم دائرة تمر بنقطتين معلومتين:

٣ ١ عددًا لا نهائيًا من الدوائر ٢ يساوى ٣ عددًا لا نهائيًا

٤ محور $\overline{أب}$ ٥ ٣سم ٦ ١

٧ ٢٢سم ٨ ٩π

٤ يمكن رسم دائرتين.



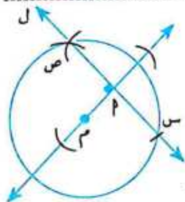
٥ نرسم المستقيم $\overleftrightarrow{أم}$

نرسم من أ

المستقيم ل ⊥ $\overleftrightarrow{أم}$

ليقطع الدائرة فى س، ص

فيكون $\overline{سص}$ هو الوتر المار بـ أ، أ منتصف $\overline{سص}$



٦ فى Δ أ ء م :

∵ $\overline{أء}$ ⊥ $\overline{مء}$

∴ ء منتصف $\overline{أب}$

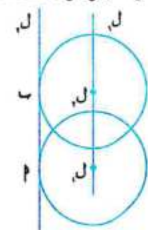
∴ أ ء = $\frac{١}{٢}$ أ ب = $\frac{١}{٢}$ × ٦ = ٣ سم

∵ ق(∠أ ء م) = ٩٠° ، ق(∠أ) = ٦٠°

∴ ق(∠أ م ء) = ١٨٠° - (٩٠° + ٦٠°) = ٣٠°

∴ أ م = ٢ أ ء = ٢ × ٣ = ٦ سم (وهو المطلوب)

٧ يمكن رسم عدد لا نهائى من الدوائر طول نصف قطرها = ٣سم.



ثالثًا: رسم دائرة تمر بثلاث نقاط معلومة.

٨ (١) ١ (٢) ١ (٣) المستطيل

(٤) متوازى الأضلاع (٥) محاور تماثل أضلاعه

(٦) منتصف $\overline{أ ح}$ (٧) قطريه

٩ نوع المثلث حاد الزوايا

١٠ أ ح = ١٠ سم

∴ طول نصف قطر الدائرة = ٥ سم.

١١ ء منتصف $\overline{أ ب}$

∴ أ ء = ٣ سم

∴ $\overline{م ء} \perp \overline{أ ب}$

فى △ أ ء م:

∴ $(م ء)^2 = ٥^2 - ٣^2 = ١٦$

∴ م ء = ٤ سم

تفكير إبداعى TIMSS

١٢

نرسم △ أ ب ح بالمعلومات المعطاة، ثم نرسم محورى التماثل للضلعين $\overline{أ ح}$ ، $\overline{ب ح}$ ونستنتج مركز الدائرة م ونستطيع قياس طول نصف القطر $\overline{م ب}$ فنجده يساوى ٧ سم.

مساحة الدائرة = $\pi نق^2 = \frac{٢٢}{٧} \times (٧)^2 = ١٥٤$ سم^2

١٣

١٤

نفرض أن أنصاف الأقطار للدوائر هى $نق_1$ ، $نق_2$، $نق_3$

$نق_1$: $نق_2$: $نق_3$

٥ : ٧ : ٩

٢,٥ : ... : ...

$نق_2 = \frac{٧ \times ٢,٥}{٥} = ٣,٥$ سم $\qquad نق_3 = \frac{٩ \times ٢,٥}{٥} = ٤,٥$ سم

محيط الدائرة الثانية = $٢ \pi نق_2 = ٧ \pi$ سم

محيط الدائرة الثالثة = $٢ \pi نق_3 = ٩ \pi$ سم

مجموع محيطى الدائرتين = $٧\pi + ٩\pi = ١٦ \pi$ سم

إجابة تدريبات الكتاب المدرسى الدرس (٣)

١

يمكن رسم عدد لا نهائى من الدوائر طول نصف قطرها ٢ سم وتمر بالنقطة أ

٢ (أ) ∵ نق > $\frac{١}{٢}$ أ ب

∴ يمكن رسم دائرتين مركزاهما $م_1$ ، $م_2$

(ب) ∵ نق = $\frac{١}{٢}$ أ ب

∴ يمكن رسم دائرة واحدة مركزها م

(حـ) ∵ نق < $\frac{١}{٢}$ أ ب ∴ لا يمكن رسم دائرة

٣ (أ) نوع المثلث س ص ع بالنسبة لزواياه «منفرج الزاوية».

لأن $(س ع)^2 > (ع ص)^2 + (ص س)^2$

(ب) مركز الدائرة يقع خارج المثلث.

٤ مركز الدائرة يقع فى منتصف الوتر $\overline{أ ح}$

٥ (أ) مركز الدائرة هو نقطة تقاطع ارتفاعات المثلث وهى نفسها نقطة تقاطع متوسطات المثلث وهى نفسها نقطة تقاطع منصفات زوايا رءوس المثلث.

(ب) عدد محاور التماثل للمثلث = ٣ محاور للتماثل.

٦ * Δ أ ب حـ حاد الزوايا

* مركز الدائرة يقع داخل المثلث أ ب حـ

إجابة اختبر نفسك من أسئلة المحافظات حتى الدرس (٣)

١ (١) ٤ (٢) صفر (٣) ٢ (٤) ١

٢ (١) (أ) ∵ أب مماس للدائرة م عند أ ، م أ نصف قطر

∴ م أ ⊥ أ ب ∴ ق(∠م أ ب) = ٩٠°

فى Δ م أ ب

∵ ق(∠ب) = ٣٠° ∴ م أ = ١/٢ م ب

∴ م ب = ١٦ سم

∴ أ ب = $\sqrt{(١٦)^٢ - (٨)^٢}$ = ٨ $\sqrt{٣}$ سم

(ب) ∵ مجموع قياسات زوايا Δ الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠م) = ١٨٠° − (٩٠° + ٣٠°) = ٦٠°

∵ م أ = م س = نق

∴ Δ م أ س متساوى الأضلاع

∵ ق(∠م أ ب) = ٩٠° ، ق(∠م أ س) = ٦٠°

∴ ق(∠س أ ب) = ٩٠° − ٦٠° = ٣٠°

∴ ق(∠س أ ب) = ق(∠ب) = ٣٠°

∴ Δ س أ ب متساوى الساقين

٢ طول نصف قطر الدائرة = ٤ سم

إجابة أسئلة س سؤال الدرس (٤)

١ (١) (أ) ∵ س منتصف أب ∴ م س ⊥ أب

∴ ق(∠م س أ) = ٩٠°

∵ ص منتصف أحـ ∴ م ص ⊥ أحـ

∴ ق(∠م ص أ) = ٩٠°

∴ ق(∠أ) = ٥٠°

∴ ق(∠س م ص) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٥٠°) = ١٣٠°

(ب) فى المثلث أ ب حـ

∵ ق(∠ب) = ٦٥°

∴ ق(∠حـ) = ١٨٠° − (٦٥° + ٥٠°) = ٦٥°

∴ ق(∠ب) = ق(∠حـ)

∴ أ ب = أ حـ ∴ م س = م ص

٢ (أ) ∵ س منتصف أ ب ∴ م س ⊥ أ ب

∵ م ص ⊥ أ حـ ∵ أ ب = أ حـ

∴ م س = م ص (١)

∵ م ء = م هـ = نق (٢)

من (١) ، (٢) بالطرح

∴ م ء − م س = م هـ − م ص

∴ س ء = ص هـ (وهو المطلوب)

(ب) نرسم س ص

∵ م س = م ص

فى Δ م س ص

∴ ق(∠م س ص) = ق(∠م ص س) ← (٣)

، ∵ ق(∠م س ب) = ق(∠م ص حـ) = ٩٠° ← (٤)

من (٣) ، (٤) بالجمع

∴ ق(∠ص س ب) = ق(∠س ص حـ) (وهو المطلوب)

٣ فى الدائرة الكبرى

∵ ق(∠أ ب هـ) = ق(∠أ هـ ب) ∴ أ ب = أ هـ

∵ م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ أ هـ ∴ م س = م ص

فى الدائرة الصغرى

∵ م س = م ص ∴ حـ ء = ع ل (وهو المطلوب)

إجابة تدريبات الأضواء الدرس (٤)

أولاً: نظرية:

١ ١ متساوية ٢ متساوية ٣ متساوية ٤ أب

٥ أب ، حـ ء ٦ م ص ٧ ٣ ٨ ١٣

٩ ٣٣ ١٠ ١٠٠ ، ٣ ١١ ١٠٠

٢ العمل: نرسم س م ، ص م

∵ س منتصف أ ب

∴ م س ⊥ أ ب

∵ ص منتصف حـ ء

∴ م ص ⊥ حـ ء

∵ أ ب = حـ ء ∴ م س = م ص

∴ ق(∠م س ص) = ق(∠م ص س) ← ١

∵ ق(∠أ س م) = ق(∠حـ ص م) = ٩٠° ← ١

بطرح ١ من ٢ ∴ ق(∠أ س ص) = ق(∠حـ ص س)

٣ ∵ $\overleftrightarrow{مـ ن}$ هو خط المركزين للدائرتين م ، ن

∴ $\overleftrightarrow{مـ ن} \perp \overline{أب}$ ∵ س منتصف $\overline{أحـ}$

∴ $\overline{ن س} \perp \overline{أحـ}$ ∵ أب = أحـ

∴ ن ص = ن س

---

٤ ∵ الدائرتان م ، ن متطابقتان ، أب = حـ ء

∴ م س = ن ص

∵ ق(∠ أ س م) = ق(∠ حـ ص ن) = ٩٠° وهما في وضع تناظر

∴ $\overline{م س}$ // $\overline{ن ص}$

∵ م س = ن ص ، $\overline{م س}$ // $\overline{ن ص}$

∴ الشكل م س ص ن متوازي أضلاع

∵ ق(∠ حـ ص ن) = ٩٠°

∴ الشكل م س ص ن مستطيل

---

٥ ∵ أب = حـ ء

∵ $\overline{م هـ} \perp \overline{أب}$ ، $\overline{م و} \perp \overline{حـ ء}$

∴ م هـ = م و

∴ ق(∠ م هـ و) = ق(∠ م و هـ)

∵ ق(∠ أ هـ و) = ٦٥° ∴ ق(∠ م و هـ) = ٩٠° - ٦٥° = ٢٥°

من ٦ إلى ٩ راجع إجابتك في «100% إجابات»

ثانيًا: عكس النظرية:

١٠ (١) متساوية (٢) ٣ (٣) متساوي الأضلاع

(٤) ٨ (٥) ٧٠° (٦) ٤٠°

(٧) ٧٠ (٨) ٤ سم

---

١١ ∵ م و = م هـ أنصاف أقطار ← (١)

، و س = هـ ص ← (٢)

من (١) ، (٢) بالطرح

∴ م و - و س = م هـ - هـ ص

∴ م س = م ص

∵ س منتصف $\overline{أحـ}$ ∴ $\overline{م س} \perp \overline{أحـ}$

∵ ص منتصف $\overline{ب حـ}$ ∴ $\overline{م ص} \perp \overline{ب حـ}$

∵ م س = م ص ∴ أحـ = ب حـ

∵ ق(∠ أ) = ٦٠° ∴ Δ أ ب حـ متساوي الأضلاع.

---

١٢ ∵ $\overline{م س} \perp \overline{أب}$ ، $\overline{م ص} \perp \overline{حـ ء}$

∵ م س = م ص ∴ أب = حـ ء

∵ $\overline{م س} \perp \overline{أب}$ ∴ س منتصف $\overline{أب}$

∴ أب = ٦ سم ∴ حـ ء = ٦ سم

---

١٣ ∵ ء منتصف $\overline{أب}$ ∴ $\overline{م ء} \perp \overline{أب}$

∵ هـ منتصف $\overline{أحـ}$ ∴ $\overline{م هـ} \perp \overline{أحـ}$

∵ م هـ = م هـ ∴ أب = أحـ

∴ Δ أ ب حـ متساوي الساقين

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي أ ء م هـ = ٣٦٠°

∴ ق(∠ أ) = ٣٦٠° - (٩٠° + ٩٠° + ١٢٠°) = ٦٠°

∴ Δ أ ب حـ متساوي الأضلاع

---

١٤ ∵ ب حـ = ء هـ (أوتار متساوية) ، $\overline{م س} \perp \overline{ب حـ}$ ، $\overline{م ص} \perp \overline{ء هـ}$

∴ م س = م ص (أبعاد متساوية)

Δ Δ أ س م ، أ ص م

فيهما { م س = م ص ، $\overline{أ م}$ ضلع مشترك ، ق(∠ أ س م) = ق(∠ أ ص م) = ٩٠° }

∴ Δ أ س م ≡ Δ أ ص م وينتج أن: أ س = أ ص ← (١)

∵ $\overline{م س} \perp \overline{ب حـ}$ ∴ ب س = حـ س

∵ $\overline{م ص} \perp \overline{ء هـ}$ ∴ ء ص = هـ ص

∵ ب حـ = ء هـ

∴ ب س = ء ص ← (٢)

من (١) ، (٢) بالطرح

∴ أ س - ب س = أ ص - ء ص ∴ أ ب = أ ء

من ١٥ إلى ١٧ راجع إجابتك في «100% إجابات»

---

١٨ ∵ ق(∠ م هـ س) = ق(∠ ن هـ ص) بالتقابل بالرأس

∴ ق(∠ م س هـ) = ق(∠ ن ص هـ) = ٩٠°

∴ ق(∠ س م هـ) = ق(∠ ص ن هـ)

Δ Δ م س هـ ، ن ص هـ

فيهما { م هـ = ن هـ ، ق(∠ م هـ س) = ق(∠ ن هـ ص) ، ق(∠ س م هـ) = ق(∠ ص ن هـ) }

∴ Δ ≡ Δ وينتج أن:

م س = ن ص

∵ الدائرتين م ، ن متطابقتان

∴ أب = حـ ء (وهو المطلوب)

---

١٩ ∵ $\overleftrightarrow{مـ ن}$ // $\overleftrightarrow{ب حـ}$ ، $\overleftrightarrow{م س} \perp \overleftrightarrow{ب حـ}$ ، $\overleftrightarrow{ن ص} \perp \overleftrightarrow{ب حـ}$

∴ الشكل م س ص ن مستطيل. ∴ م س = ن ص أبعاد متساوية

∴ أب = أحـ أوتار متساوية

تفكير إبداعي TIMSS

٢٠ العمل: نرسم م س ⊥ ء ب ، ن ص ⊥ ب هـ

البرهان:

∵ م ن // ء هـ

، ق(∠م س ص) = ق(∠ن ص س) = ٩٠°

∴ م س // ن ص ∴ الشكل م س ص ن مستطيل

∴ م ن = س ص

∵ م س ⊥ ء ب ∴ ء س = س ب

∵ ن ص ⊥ ب هـ ∴ ب ص = ص هـ

∵ م ن = س ص ، س ص = س ب + ب ص

∴ م ن = س ب + ب ص ← (١)

∵ ء هـ = ء س + س ب + ب ص + ص هـ

∴ ء هـ = س ب + س ب + ب ص + ب ص

= ٢ س ب + ٢ ب ص = ٢(س ب + ب ص)

من (١) ∴ ء هـ = ٢ م ن

---

٢١ ∵ م س = م ص = م ع (أنصاف أقطار في الدائرة الصغرى)،

م س ⊥ أ ب ، م ص ⊥ ب ح ، م ع ⊥ أ ح

∴ أ ب = ب ح = أ ح

∴ Δ أ ب ح متساوي الأضلاع

∵ أ ص = أ م + م ص = ٤ + ٢ = ٦ سم

∴ مساحة Δ أ ب ح = $\frac{١}{٢}$ ب ح × أ ص

= ٢√٣ × ٦ = ١٢√٣ سم²

٢٢

العمل: نرسم أ س ⊥ و هـ ، ء ص ⊥ ب ح

البرهان: أ ح // و ء ، أ س ⊥ و هـ ، ء ص ⊥ ب ح

∴ الشكل أ س ء ص مستطيل

∴ أ س = ء ص ← (١)

∵ أ م = ء ن = نق (دائرتان متطابقتان) ← (٢)

من (١) ، (٢) بالطرح

∴ م س = ن ص أبعاد متساوية

(أ) ∴ هـ و = ب ح ∵ م س ⊥ و هـ

∴ س منتصف و هـ ∵ ن ص ⊥ ب ح

∴ ص منتصف ب ح ∴ س هـ = ص ب

∵ أ ص = س ء ∴ أ ص − ص ب = س ء − س هـ

(ب) ∴ أ ب = هـ ء

---

٢٣ ∵ م ء ⊥ أ ب ، م هـ ⊥ أ ح ، ء م = هـ م

∴ أ ب = أ ح ، ق(∠ب) = ق(∠ح)

في الشكل الرباعي أ ء م هـ

، ق(∠أ) = ٣٦٠° − [١٢٠° + ٩٠° + ٩٠°] = ٦٠°

في Δ أ ب ح

∴ ق(∠ب) = ق(∠ح) = $\frac{١٨٠° - ٦٠°}{٢}$ = ٦٠°

∴ Δ أ ب ح متساوي الأضلاع

، مساحة Δ أ ب ح = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ٥√٣ = ٢٥√٣ سم²

إجابة تدريبات الكتاب المدرسي الدرس (٤)

١ (أ) ∵ ص منتصف أ ح

∴ م ص ⊥ أ ح

∵ س منتصف أ ب

∴ م س ⊥ أ ب

∴ ق(∠ء م هـ) = ٣٦٠° − (٧٠° + ٩٠° + ٩٠°) = ١١٠°

(ب) ∵ أ ب = أ ح

∴ م س = م ص ← (١)

، ∵ م ء = م هـ (أنصاف أقطار) ← (٢)

بطرح (١) من (٢)

∴ م ء − م س = م هـ − م ص

∴ س ء = ص هـ (وهو المطلوب)

---

٢ ∵ س، ص منتصفا أ ب ، أ ح

∴ م س ⊥ أ ب

، م ص ⊥ أ ح

∵ أ ب = أ ح (أوتار متساوية)

∴ م س = م ص (أبعاد متساوية)

∴ Δ م س ص متساوي الساقين (وهو المطلوب أولًا)

∵ ق(∠أ س م) = ٩٠° ، ق(∠م س ص) = ٣٠°

∴ ق(∠أ س ص) = ٦٠°

∵ أ ب = أ ح

∴ أ س = أ ص

∴ Δ أ س ص متساوي الأضلاع. (وهو المطلوب ثانيًا)

---

٣ ، **٤** راجع إجابتك في «100% إجابات»

٥ العمل: نرسم م س ⊥ أب ، ن ص ⊥ حـ ء

البرهان: ∵ م ن // أ ء ، م س ⊥ أب

، ن ص ⊥ حـ ء

∴ الشكل م س ص ن مستطيل ∴ م س = ن ص

∵ الدائرتين م ، ن متطابقتان ∴ أب = حـ ء

بإضافة طول ب حـ للطرفين

∴ أحـ = ب ء (وهو المطلوب)

---

٦ ∵ س منتصف أب ∴ م س ⊥ أب

∵ ق(∠ب) = ق(∠حـ) ∴ أب = أحـ

∵ م س ⊥ أب ، م ص ⊥ أحـ ∴ م س = م ص (وهو المطلوب)

من ٧ إلى ٩ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

إجابة اختبر نفسك من أسئلة المحافظات حتى الدرس (٤)

١ (١) داخل (٢) ٥ (٣) ٤٥ (٤) ١

---

٢ (١) (أ) ∵ م س ⊥ أب ∴ س منتصف أب

∵ م ص ⊥ أحـ ∴ ص منتصف أحـ

∵ س منتصف أب ، ص منتصف أحـ

∴ س ص // ب حـ

(ب) ∵ م س = م ص

∴ أب = أحـ

∴ ق(∠ب) = ق(∠حـ) = ٧٠°

∵ س ص // ب حـ

∴ ق(∠أ ص س) = ق(∠حـ) = ٧٠° (بالتناظر)

∵ ق(∠أ ص م) = ٩٠°

∴ ق(∠ص س م) = ق(∠س ص م) = ٩٠° − ٧٠° = ٢٠°

(٢) (أ) ∵ أب = أحـ ، م ء ⊥ أب ، م هـ ⊥ أحـ

∴ م ء = م هـ

∵ م س = م ص = نق

∴ م س − م ء = م ص − م هـ

∴ ء س = هـ ص

(ب) ∵ ء منتصف أب ، هـ منتصف أحـ

∴ أ ء = أ هـ

∆∆ أ ء س ، أ هـ ص

فيهما { ء س = هـ ص ، أ ء = أ هـ ، ق(∠أ ء س) = ق(∠أ هـ ص) }

∴ ∆ ≡ ∆ وينتج أن:

∴ ق(∠س أ ب) = ق(∠ص أ حـ)

إجابة اختبار الأضواء على الوحدة الرابعة

١ (١) قاطع للدائرة (٢) ١٢ (٣) معين

(٤) ٤ (٥) ١ (٦) ٥

(٧) ٤ (٨) أب (٩) ٣√٣ س

---

٢ (١) فى ∆ م أ ء

∵ م أ = م ء

∴ ق(∠م أ ء) = ٢٥°

∴ ق(∠ء أ حـ) = ٤٠° + ٢٥° = ٦٥°

فى ∆ حـ ء أ

ق(∠حـ ء أ) = ١٨٠° − [٦٥° + ٢٥°] = ٩٠°

∴ ء حـ ⊥ أب

∵ م ∈ ء حـ

∴ حـ فى منتصف أب

من ٢ إلى ٤ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

إجابة اختبار الكتاب المدرسى الوحدة الرابعة

١ (١) دائرة وحيدة (٢) خط المركزين م ن (٣) $\frac{٤٩}{٤}\pi$

(٤) ٤ سم (٥) ٣

---

٢ ∵ أ ء مماس للدائرة م

∴ ق(∠م ء أ) = ٩٠°

∵ هـ منتصف ب حـ

∴ ق(∠م هـ أ) = ٩٠°

∴ ق(∠ء م هـ) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٥٦°) = ١٢٤°

---

٣ ، ٤ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

إجابات الوحدة الخامسة

الزوايا والأقواس فى الدائرة

إجابة أسئلة س سؤال الدرس (١)

١ ق(⌢أد) : ق(⌢دجـ) = ٤ : ٧

∴ ق(⌢أد) = (٤س)° ، ق(⌢دجـ) = (٧س)°

∵ قياس الدائرة = ٣٦٠° ∴ ٦٠° + ٨٠° + ١١س° = ٣٦٠°

١١س° = ٢٢٠ (÷١١)

∴ س = ٢٠° ∴ ق(⌢أد) = ٤ × ٢٠° = ٨٠°

∵ ق(⌢بجـ) = ٨٠° ∴ ق(⌢أد) = ق(⌢بجـ)

---

٢ ١ قياس القوس = $\frac{٢}{٣}$ × ٣٦٠° = ٢٤٠°

٢ قياس القوس = $\frac{٥}{١٨}$ × ٣٦٠° = ١٠٠°

٣ قياس القوس = $\frac{٧}{٢٤}$ × ٣٦٠° = ١٠٥°

---

٣ طول القوس = $\frac{\text{قياس القوس}}{٣٦٠°}$ × محيط الدائرة

١٦ = $\frac{١٤٤°}{٣٦٠°}$ × محيط الدائرة

محيط الدائرة = $\frac{١٦ \times ٣٦٠°}{١٤٤°}$ = ٤٠ سم

---

٤ ١ ∵ ق(⌢أجـ) = ١٢٠° ∴ ق(∠أمجـ) = ١٢٠°

∵ مأ = مجـ = نق

∴ ق(∠أجـم) = ق(∠أ) = $\frac{١٨٠° - ١٢٠°}{٢}$ = ٣٠°

٢ ∵ مجـ = مب

∴ ق(∠ب) = ق(∠مجـب)

∵ (∠أمجـ) خارجة عن △ مبجـ

∴ ق(∠مجـب) = $\frac{١٢٠°}{٢}$ = ٦٠°

∴ ق(∠أجـب) = ٣٠° + ٦٠° = ٩٠°

∴ $\overline{\text{أجـ}}$ ⊥ $\overline{\text{بجـ}}$

---

٥ ∵ $\overline{\text{أد}}$ // $\overline{\text{بجـ}}$

∴ ق(⌢أب) = ق(⌢دجـ) ← (١)

∵ $\overleftrightarrow{\text{بهـ}}$ // $\overline{\text{أجـ}}$

∴ ق(⌢أب) = ق(⌢بجـ) ← (٢)

من (١) ، (٢)

∴ ق(⌢دجـ) = ق(⌢بجـ) ∴ دجـ = بجـ

∴ △ بجـد متساوى الساقين.

---

٦ ١ ∵ أب = أد

∴ ق(⌢أب) = ق(⌢أد)

∵ $\overline{\text{أجـ}}$ قطر فى الدائرة م

∴ ق(⌢أبجـ) = ق(⌢أدجـ)

∴ ق(⌢أبجـ) - ق(⌢أب) = ق(⌢أدجـ) - ق(⌢أد)

∴ ق(⌢بجـ) = ق(⌢دجـ) ∴ بجـ = دجـ

٢ ∵ أجـ = بد ∴ ق(⌢أبجـ) = ق(⌢بجـد)

بحذف ق(⌢بجـ) من الطرفين

∴ ق(⌢أب) = ق(⌢جـد)

∴ أب = جـد ∴ ٣س - ٥ = س + ٣

٢س = ٨ ⟸ س = ٤

∴ أب = ٣ × ٤ - ٥ = ٧ سم

إجابة تدريبات الأضواء الدرس (١)

أولاً: الزاوية المركزية وقياس القوس:

١ ١ يساوى ٢ ٩٠° ٣ ١٨٠° ٤ ٥٢°

٥ ١٠٠° ٦ ٣٦° ٧ ٩٠

---

٢ ١ مركز الدائرة، نصف قطر فى الدائرة

٢ ٣٦٠ ، ٢ π نق ٣ المركزية

٤ (أ) ق(⌢أجـ) = ٨٥° (ب) ق(⌢أجـهـ) = ١٣٥°

(جـ) ق(⌢أجـد) = ٢٦٥° (د) ق(⌢أدهـ) = ٢٢٥°

٥ (أ) س = ٢٥ (ب) ق(⌢أجـ) = ٥٠°

(جـ) ق(⌢أد) = ١٠٠° (د) ق(⌢بجـ) = ١٣٠°

(هـ) ق(⌢جـأد) = ١٥٠° (و) ق(⌢جـبد) = ٢١٠°

(ز) ق(⌢أجـد) = ٢٦٠° (ح) ق(⌢أدجـ) = ٣١٠°

٦ ١٢٠

---

٣ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

ثانيًا: طول القوس:

٤ ١ π نق ٢ ١٢٠ ٣ ٩٠°

٤ $\frac{١}{٤}$ ٥ $\frac{١}{٢}$ π نق ٦ ٦٠°

٧ ٦٠ ٨ ١ ٩ $\frac{٨}{٣}$ π

---

٥ ١ ١٨٠° ، π نق ٢ ٣٦٠ ٣ ١٤٤ ، $\frac{٢٨ π}{٥}$

---

٦ قياس القوس = $\frac{١}{٣}$ × ٣٦٠° = ١٢٠°

طول القوس ≃ $\frac{١}{٣}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٧ ≃ $\frac{٤٤}{٣}$ سم

---

٧ طول (⌢أب) = $\frac{١٠٨°}{٣٦٠°}$ × ٢ π نق = $\frac{١٠٨}{٣٦٠}$ × ١٠ × π

= ٣ × ٣,١٤ = ٩,٤٢ سم

ثالثا: نتائج هامة:

٨ ١) ٥٠° ٢) < ٣) ٦٠° ٤) ١٠٠° ٥) ٤٠°

٩ ∵ أ حـ = أ ب ∴ ق(أ حـ⌒) = ق(أ ب⌒)

∵ م أ = م ب أنصاف أقطار

ق(∠أ م ب) = ١٨٠° − (٤٠° + ٤٠°) = ١٠٠°

∴ ق(أ ب⌒) = ١٠٠° ∴ ق(أ حـ⌒) = ١٠٠°

١٠ ∵ أ ب // حـ ء

∴ ق(ب حـ⌒) = ق(أ ء⌒) بإضافة ق(أ ب⌒) إلى كل منهما

ق(أ ب حـ⌒) = ق(ب أ ء⌒) ∴ أ حـ = ب ء

من ١١ إلى ١٣ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

١٤ ∵ أ ب // حـ ء

∴ ق(أ حـ⌒) = ق(ب ء⌒) ← (١)

∵ أ ب = حـ ء

∴ ق(أ ب⌒) = ق(حـ ء⌒) ← (٢)

∵ قياس الدائرة = ٣٦٠°

∴ ق(أ حـ⌒) + ق(حـ ء⌒) + ق(ء ب⌒) + ق(ب أ⌒) = ٣٦٠°

من (١)، (٢)

∴ ٢ ق(أ حـ⌒) + ٢ ق(حـ ء⌒) = ٣٦٠° (÷٢)

∴ ق(أ حـ⌒) + ق(حـ ء⌒) = ١٨٠°

∴ ق(أ حـ ء⌒) = ١٨٠° ∴ أ ء قطر فى الدائرة

١٥ ∵ ق(∠أ م ب) = ١٠٠° ∴ ق(أ ب⌒) = ١٠٠°

∵ حـ ء ↔ // أ ب

∴ ق(أ حـ⌒) = ق(ب ء⌒) = $\frac{٣٦٠° - ١٠٠°}{٢}$ = ١٣٠°

TIMSS تفكير إبداعي

١٦ ∵ أ ب // ء هـ ∴ ق(أ حـ⌒) = ق(ب حـ⌒)

، ∵ أ ب قطر فى الدائرة م، ء هـ مماس للدائرة عند حـ

∴ ق(أ حـ⌒) = ٩٠°، ق(ب حـ⌒) = ٩٠°

∵ س منتصف (أ حـ⌒) ∴ ق(حـ س⌒) = $\frac{٩٠°}{٢}$ = ٤٥°،

∵ ق(ب ص⌒) = ٢ ق(حـ ص⌒) ∴ ق(حـ ص⌒) = $\frac{٩٠°}{٣}$ = ٣٠°

∴ ق(س حـ ص⌒) = ٤٥° + ٣٠° = ٧٥° ∴ ق(∠ء م هـ) = ٧٥°

١٧ ١) ق(ب حـ⌒) = ٦٠° ٢) ق(∠ب ن حـ) = ١٢٠°

إجابة تدريبات الكتاب المدرسى الدرس (١)

١ (أ) ٧٥° (ب) ١٤٠° (جـ) ٢٥٥° (د) ٢٢٠°

٢ (أ) ق(ب ء⌒) = ٥٠°، ق(أ ء⌒) = ١٣٠°

(ب) ٢٤٠°

٣ نرسم م حـ، م ء

∵ ق(أ حـ⌒) = ٨٠°

∴ ق(∠أ م حـ) = ٨٠°

فى △ حـ م هـ

(∠أ م حـ) زاوية خارجة عن △ حـ م هـ

∴ ق(∠م حـ هـ) = ٨٠° − ٣٠° = ٥٠°

، ∵ م حـ = م ء أنصاف أقطار

∴ △ م حـ ء متساوى الساقين يكون فيه ق(∠م حـ ء) = ق(∠م ء حـ) = ٥٠°

∴ ق(∠حـ م ء) = ١٨٠° − (٥٠° + ٥٠°) = ٨٠° ∴ ق(حـ ء⌒) = ٨٠°

٤ (أ) نرسم م أ، م هـ

∵ أ ب حـ ء هـ خماسى منتظم

∴ أ ب = أ هـ = ء هـ = حـ ء = ب حـ

∴ ق(أ ب⌒) = ق(أ هـ⌒) = ق(ء هـ⌒)

= ق(حـ ء⌒) = ق(ب حـ⌒)

∵ قياس الدائرة = ٣٦٠° ∴ ق(أ هـ⌒) = $\frac{٣٦٠°}{٥}$ = ٧٢°

(ب) ∵ ق(∠أ م هـ) = ٧٢°

∵ أ س مماس، م أ نصف قطر ∴ ق(∠س أ م) = ٩٠°

∵ هـ س ↔ مماس، م هـ نصف قطر ∴ ق(∠س هـ م) = ٩٠°

∵ الشكل أ س هـ م رباعى

∴ ق(∠أ س هـ) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٧٢°) = ١٠٨°

من ٥ إلى ٧ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

إجابة اختبر نفسك من أسئلة المحافظات على الدرس (١)

١ ١) ١٨٠° ٢) {٤، ١٠} ٣) ٣٠°

٤) ق(أ حـ⌒) = ٤٠°، س = ٢٥

٢ ١) قياس القوس = $\frac{٤}{٩}$ × ٣٦٠° = ١٦٠°

طول القوس = $\frac{٤}{٩}$ × ٢ π نق

∴ طول القوس = $\frac{٤}{٩}$ × ٢ × ٤,٥ π = ٤ π سم

٢) ∵ أ ب = حـ ء

∴ ق(أ ء ب⌒) = ق(ء ب حـ⌒)

بحذف ق(ء ب⌒) من الطرفين

∴ ق(أ ء⌒) = ق(ب حـ⌒) ∴ أ ء = ب حـ

إجابة أسئلة س سؤال الدرس (٢)

١ ١ ق(∠أ جـ ب) = ٥٠°   ٢ ق(∠أ جـ ب) = ٤٠°

٣ ق(∠أ جـ ب) = ٣٥°

---

٢ ١ ٦٣°   ٢ ٢٧°   ٣ ٥٠°

٤ ٢٣°   ٥ ٦٧°

---

٣ ١ س + ١ = ½ × ٩٢°

س + ١ = ٤٦ ⟸ س = ٤٥°

ق(أ ب⌒) = ٣٦٠° − (٩٢° + ١١٠°) = ١٥٨°

٢ ق(∠أ) = ½ × ١٤٠° = ٧٠°

ق(أ جـ⌒) = ٣٦٠° − (١٢٠° + ١٤٠°) = ١٠٠°

٣ ق(∠جـ) = ٦٠°

٤ ق(∠هـ ب جـ) = ½ × ١٠٤° = ٥٢°

∵ ∠هـ ب جـ خارجة عن Δ أ ب هـ ، ب أ = ب هـ

∴ ق(∠هـ أ جـ) = ½ × ٥٢° = ٢٦°

٥ ق(أ ب⌒) = ٢ × ٣٠° = ٦٠°

∴ ق(∠د جـ ب) = ½ × (٩٠° + ٦٠°) = ٧٥°

٦ ق(∠ب م جـ) = ٢ ق(∠أ) = ٢ × ٧٠° = ١٤٠°

---

٤ ١ (أ) س = ١٠°، ص = ٤٠°

(ب) س = ٥٠°، ص = ٩٠°

(جـ) س = ٩٠°، ص = ٥٠°

٢ ∵ ∠ب م جـ المركزية، ∠ب هـ جـ المحيطية

مشتركتان في (ب جـ⌒)

∴ ق(∠ب هـ جـ) = ½ ق(∠ب م جـ) = ½ (١١٠°) = ٥٥°

∵ ق(∠ب م جـ) = ق(ب أ جـ⌒) = ١١٠°

∴ ق(ب جـ⌒) الأكبر = ٣٦٠° − ١١٠° = ٢٥٠°

∵ ق(∠ب أ جـ) المحيطية = ½ ق(ب جـ⌒) الأكبر = ½ × ٢٥٠° = ١٢٥°

---

٥ ١ ١٠٠   ٢ ٨٦   ٣ ١٤٠

---

٦ ∵ ق(∠جـ د هـ) = ٧٠°

∴ ق(جـ هـ⌒) = ٢ × ٧٠° = ١٤٠°

∴ جـ ب⟵ ∩ هـ د⟵ = {أ}

∴ ق(∠أ) = ½ [ق(جـ هـ⌒) − ق(ب د⌒)]

٣٦° = ½ [١٤٠° − ق(ب د⌒)]

∴ ق(ب د⌒) = ١٤٠° − ٢ × ٣٦° = ١٤٠° − ٧٢ = ٦٨°

إجابة تدريبات الأضواء على الدرس (٢)

أولاً: نظرية (١):

١ ١ نصف   ٢ ضعف   ٣ ٢ : ٤   ٤ حادة

٥ ١٠٠   ٦ ٢٥   ٧ ٨٠°   ٨ ٦٠°

٩ ٣٠°   ١٠ ١٤٠°   ١١ ٥٠

---

٢ ١ ١٦   ٢ ١٠   ٣ ١١٠°

---

٣ ١ ٤٠   ٢ ٦٢½   ٣ ١١٧½   ٤ ١٣٥

---

٤ ∵ م ب = م جـ = نق

∴ ق(∠م ب جـ) = ق(∠م جـ ب) = ٤٠°

∴ ق(∠ب م جـ) = ١٨٠° − (٤٠° + ٤٠°) = ١٠٠°

∵ ∠ب م جـ المركزية، ∠ب أ جـ المحيطية مشتركتان في القوس ب جـ

∴ ق(∠ب م جـ) = ½ × ١٠٠° = ٥٠°

---

٥ ∵ ق(∠ب أ جـ) = ½ (∠ب م جـ)

∴ ق(∠ب أ جـ) = ٦٠°

∵ م ب = م جـ = نق

∴ ق(∠م ب جـ) = ق(∠م جـ ب) = (١٨٠° − ١٢٠°) / ٢ = ٣٠°

∴ ق(∠أ ب جـ) = ٤٠° + ٣٠° = ٧٠°

في Δ أ ب جـ

∴ ق(∠أ جـ ب) = ١٨٠° − (٦٠° + ٧٠°) = ٥٠°

---

٦ ∵ م أ = م ب = نق ، م جـ ⊥ أ ب

∴ ق(∠أ م جـ) = ق(∠ب م جـ) = ½ ق(∠أ م ب) ← (١)

∵ ∠أ د ب المحيطية، ∠أ م ب المركزية مشتركتان في (أ ب⌒)

∴ ق(∠أ د ب) = ½ ق(∠أ م ب) ← (٢)

من (١)، (٢)

∴ ق(∠أ م جـ) = ق(∠أ د ب)

---

٧ ق(∠أ جـ ب) = ½ × ١٣٢° = ٦٦°

∠أ جـ ب خارجة عن Δ جـ د ب، ق(∠د) + ق(∠جـ ب د) = ٦٦°

، ∵ جـ د = جـ ب   ∴ ق(∠د) = ق(∠د ب جـ) = ٣٣°

---

٨ في Δ م ب جـ

∵ م ب = م جـ (أنصاف أقطار)

∴ ق(∠م جـ ب) = ق(∠م ب جـ) = (١٨٠° − ١٠٠°) / ٢ = ٤٠° ← (١)

، ∵ ق(∠د) = ½ × ١٠٠° = ٥٠°

، ∵ ∠أ ب د خارجة عن المثلث د ب جـ

∴ ق(∠د جـ ب) = ١٢٠° − ٥٠° = ٧٠° ← (٢)

من (١)، (٢)

∴ ق(∠د جـ م) = ٧٠° − ٤٠° = ٣٠°

٩ في Δ م ا ب

∵ م ب = م ا (أنصاف أقطار)

∴ ق(∠م ب ا) = ق(∠ب ا م) = ٣٠°

∴ ق(∠ب م ا) = ١٨٠° − (٣٠° + ٣٠°) = ١٢٠°

∴ ق(∠ب حـ ا) = ١/٢ × ١٢٠° = ٦٠°

∴ (٢س + ٢٠)° = ٦٠° ∴ ٢س = ٤٠°

∴ قيمة س = ٢٠°

١٠، ١١ راجع إجابتك في «100% إجابات»

ثانيًا: نتائج على النظرية (١) وتمارين مشهورة عليها:

١٢

١ قائمة	٢ حادة	٣ ١٣٥
٤ نصف	٥ ٤٠°	٦ ١٢٠°
٧ ٤٥°	٨ ٢/٣ π س	٩ ١٠٠
١٠ ٢٤	١١ ٣٠	١٢ ٦٠°
١٣ ٢٥°	١٤ ٣٠°	١٥ ٢٠
١٦ ١٨٠	١٧ ١٤٠°	١٨ (٥٠°، ٣٠°)
١٩ ٧٠	٢٠ ١٢٠	٢١ <

١٣

١ منفرجة	٢ نصف	٣ ٦٠°
٤ ٢٥	٥ ٢٠	٦ ٤٥°
٧ ٨٠	٨ ١٦	٩ ١٨

---

١٤ ١ ق(∠حـ ا ء) = ١/٢ ق(∠حـ م ء) = ٢٥°، لأنهما مشتركتان في (حـ ء)

٢ ∵ ب حـ قطر ∴ ق(∠ب ا حـ) = ٩٠°

∴ ق(∠ب ا ء) = ٢٥° + ٩٠° = ١١٥°

من ١٥ إلى ١٧ راجع إجابتك في «100% إجابات»

---

١٨ ∵ ا ب قطر في الدائرة ∴ ق(∠ا حـ ب) = ٩٠°

∴ ق(∠ا ب حـ) = ٤٢° ∴ ق(∠حـ ا ب) = ٤٨°

∵ ء م // ا حـ

∴ ق(∠حـ ا ب) = ق(∠ا م ء) = ٤٨° (بالتبادل)

∵ ∠ا م ء المركزية، ∠ا حـ ء المحيطية مشتركتان في (ا ء)

∴ ق(∠ا حـ ء) = ١/٢ × ٤٨° = ٢٤°

من ١٩ إلى ٢٢ راجع إجابتك في «100% إجابات»

---

٢٣ ١ ∵ ق(∠ا) = ٣٠° ∴ ق(ب حـ) = ٢ × ٣٠° = ٦٠°

∵ ا حـ ∩ ب ء = {هـ}

∴ ق(∠هـ) = ١/٢ [ق(ا ء) − ق(ب حـ)]

∴ ٥٠° = ١/٢ [ق(ا ء) − ٦٠°]

∴ ق(ا ء) = ١٠٠° + ٦٠° = ١٦٠°

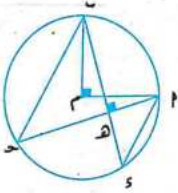
٢ ∵ ا ب ∩ حـ ء = {س}

∴ ق(∠ا س ء) = ١/٢ [١٦٠° + ٦٠°] = ١١٠°

من ٢٤ إلى ٢٦ راجع إجابتك في «100% إجابات»

تفكير إبداعي TIMSS

٢٧ ∵ م ا ، م ب نصفا قطرين متعامدان



∴ ق(∠ا م ب) = ٩٠° ∴ ق(ا ب) = ٩٠°

∵ ا حـ ∩ ب ء = {هـ}

∴ ق(∠ا هـ ب) = ١/٢ [ق(حـ ء) + ق(ا ب)]

∴ ق(حـ ء) = ٢ × ٩٠° − ٩٠° = ٩٠°

١ ∴ ق(∠حـ ب ء) = ١/٢ ق(حـ ء) = ١/٢ × ٩٠° = ٤٥°

∵ ق(∠ا حـ ب) = ١/٢ ق(ا ب) = ٤٥°

، ق(∠حـ ا ء) = ١/٢ ق(حـ ء) = ٤٥°

∴ ق(∠ا حـ ب) = ق(∠حـ ا ء) وهما في وضع تبادل

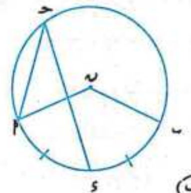
٢ ∴ ا ء // ب حـ (وهو المطلوب)

---

٢٨ طول نصف قطر الدائرة = ٦ سم.

---

٢٩ ∵ ء منتصف (ا ب)



ق(ا ء) = ق(ء ب)

∴ ق(ا ء) = ١/٢ ق(ا ب)

∵ ق(∠حـ) = ١/٢ ق(ا ء)

∴ ق(∠حـ) = ١/٢ × ١/٢ ق(ا ب) = ١/٤ ق(ا ب)

∴ ق(∠حـ) = ١/٤ ق(∠ا ن ب) (وهو المطلوب)

إجابة تدريبات الكتاب المدرسي الدرس (٢)

١

١ ٨٠	٢ ٢٠	٣ ٢٠
٤ ١١٠	٥ ٢٥	٦ ٣٠

---

٢ ق(∠ب) = ١/٢ ق(∠ا م حـ) مشتركتان في ا حـ ← ١

∵ م حـ // ا ب

∴ ق(∠ا) = ق(∠ا م حـ) بالتبادل ← ٢

∴ من ١، ٢ نستنتج أن:

∴ ق(∠ب) = ١/٢ ق(∠ا)

في Δ ا هـ ب

∵ ق(∠ا) > ق(∠ب)

∴ هـ ب > ا هـ (وهو المطلوب)

من ٣ إلى ٥ راجع إجابتك في «100% إجابات»

إجابة اختبر نفسك من أسئلة المحافظات حتى الدرس (٢)

١ ١ ٩٠° ٢ منفرجة ٣ ٢٠° ٤ ٨٠°

٢ ١ ∵ ق(∠ب م د) المنعكسة + ق(∠ب م د) = ٣٦٠°

، ٢ق(∠حـ) + ق(∠حـ) = ٣٦٠°

∴ ق(∠حـ) = ١٢٠°

∴ ق(∠أ) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ب م د) = ٦٠°

٢ ∵ أب قطر

∴ ق(أحـب⌒) = ١٨٠°

∵ أب // حـد

∴ ق(أحـ⌒) = ق(ب د⌒) = $\frac{١٨٠° - ٨٠°}{٢}$ = ٥٠°

(أ) ∴ ق(∠د هـ ب) = $\frac{١}{٢}$ × ٥٠° = ٢٥°

(ب) ∴ ق(∠أ هـ د) = $\frac{١}{٢}$ [١٠٠° + ٥٠°] = $\frac{١}{٢}$ × ١٥٠° = ٧٥°

إجابة أسئلة س سؤال الدرس (٣)

١ ١ ∵ أب قطر في الدائرة م

∴ ق(∠أحـب) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠ب أحـ) = ١٨٠° − (٩٠° + ٣٠°) = ٦٠°

∵ أحـ // م د

∴ ق(∠د م ب) = ق(∠ب أحـ) = ٦٠° بالتناظر

∵ ∠د حـ ب المحيطية ، ∠د م ب المركزية مشتركتان في (د ب⌒)

∴ ق(∠د حـ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠د م ب) = $\frac{١}{٢}$ × ٦٠° = ٣٠°

∵ (∠د أ ب) المحيطية ، (∠د حـ ب) المحيطية مشتركتان في (د ب⌒)

∴ ق(∠د أ ب) = ق(∠د حـ ب) = ٣٠°

٢ ق(∠أحـد) = ٩٠° + ٣٠° = ١٢٠°

٢ في Δ هـ د حـ:

∵ هـ د = هـ حـ

∵ ق(∠د) = ق(∠حـ) ← (١)

∵ ق(∠أ) = ق(∠د) محيطيتان مشتركتان في (ب حـ⌒)

، ق(∠ب) = ق(∠حـ) محيطيتان مشتركتان في (أ د⌒)

من (١)

∴ ق(∠أ) = ق(∠ب)

∴ أهـ = ب هـ (هو المطلوب)

٣ في Δ أ ن حـ:

∵ أن = حـ ن

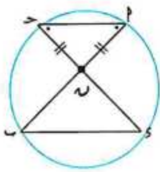
∴ ق(∠أ حـ ن) = ق(∠حـ أ ن)

∴ ق(أ د⌒) = ق(حـ ب⌒)

بإضافة ق(د ب⌒) إلى الطرفين

∴ ق(أ د ب⌒) = ق(حـ ب د⌒)

∴ أب = حـ د (وهو المطلوب)



٤ ∵ أب = ب حـ = حـ أ ∴ ق(∠حـ) = ٦٠°

∵ ∠د ب هـ خارجة عن Δ د ب أ

∴ ق(∠د) = ١٤٠° − ٨٠° = ٦٠°

∴ ق(∠حـ) = ق(∠د) = ٦٠°

وهما مرسومتان على القاعدة أب وفي جهة واحدة منها

∴ النقط أ ، ب ، حـ ، د تقع على دائرة واحدة

٥ ١ ∵ أد // ب حـ

∴ ق(∠أ د ب) = ق(∠د ب حـ) = ٣٢° (بالتبادل)

∴ ∠د م حـ خارجة عن Δ أ م د

∴ ق(∠د أ حـ) = ٦٤° − ٣٢° = ٣٢°

∵ ق(∠د أ حـ) = ق(∠د ب حـ) = ٣٢°

مرسومتان على القاعدة د حـ وفي جهة واحدة منها

∴ النقط أ ، ب ، حـ ، د تمر بها دائرة واحدة.

٢ ∵ ∠ب هـ حـ خارجة عن Δ أ ب هـ

∴ ق(∠أ ب هـ) = ٨٥° − ٥٠° = ٣٥°

∵ ق(∠أ ب د) = ق(∠أ حـ د) = ٣٥°

مرسومتان على القاعدة أ د وفي جهة واحدة منها

∴ النقط أ ، ب ، حـ ، د تمر بها دائرة واحدة.

إجابة تدريبات الأضواء الدرس (٣)

أولاً: الزوايا المحيطية المرسومة على نفس القوس:

١

١ ٣٥°	٢ ٤٠°	٣ ٧٠°
٤ ٢٠	٥ ٢٠	٦ ١٢٢
٧ ٥٠°	٨ ٤٠°	٩ ٩٠°

٢ ١ متساوية في القياس. ٢ متساوية في القياس. ٣ ٤٩

٣ ١ ق(∠حـ) = ٥٠° ، ق(∠ب) = ٢٥°

٢ ق(∠ب د حـ) = ٩٠° ، ق(∠د ب حـ) = ٥٠° ، ق(∠حـ) = ٤٠°

٣ ق(∠ب هـ د) = ٢٠° ، ق(∠أ ب هـ) = ١١٧°

٤ ١ س = ١٤ ٢ ص = ١٠ ٣ ع = ٢٥

٥ ∵ أب قطر فى الدائرة م ∴ و(∠ب ء أ) = ٩٠°

فى Δ أ ء ب

∵ و(∠أ ب ء) = ٣٥° ∴ و(∠ب أ ء) = ٩٠° − ٣٥° = ٥٥°

∵ و(∠ب ح ء) = و(∠ب أ ء) لأنهما تشتركان فى (ب ء⌒)

∴ و(∠ب ح ء) = ٥٥°

---

٦ ∵ ∠أ و ء خارجة عن Δ ء و ح

∴ و(∠ح) = ١١٠° − ٧٠° = ٤٠°

∵ ∠أ ح ء المحيطية ، ∠ب المحيطية مشتركتان فى (أ ء⌒)

∴ و(∠ب) = و(∠ح) = ٤٠°

---

٧ ∵ أب // ح ء ∴ و(أ ح⌒) = و(ب ء⌒)

∴ و(∠ب أ ء) = $\frac{1}{2}$ و(ب ء⌒) ، و(∠أ هـ ح) = $\frac{1}{2}$ و(أ ح⌒)

∴ و(∠ب أ ء) = و(∠أ هـ ح) = ٢٠°

∴ ٣س − ٧ = ٢٠ ، ٣س = ٢٧ ← س = ٩

---

٨ ∵ أح قطر فى الدائرة م

∴ و(∠أ ب ح) = ٩٠° ، ∵ و(∠أ ب ء) = ٦٠°

∴ و(∠ح ب ء) = ٩٠° − ٦٠° = ٣٠°

∴ و(∠ح ب ء) = و(∠ح أ ء) = ٣٠°

(محيطيتان مرسومتان على ح ء⌒)

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ و(∠ح أ ب) = ١٨٠° − (٩٠° + ٥٠°) = ٤٠°

∴ و(∠ب أ ء) = ٣٠° + ٤٠° = ٧٠°

---

٩ ∵ و(∠و) = $\frac{1}{2}$ و(أ ح⌒) ، و(∠هـ) = $\frac{1}{2}$ و(ب ح⌒) ← ①

فى Δ أ م ب

∵ م أ = م ب = نق ، ء منتصف أب

∴ م ء ينصف (∠أ م ب) ∴ و(أ ح⌒) = و(ح ب⌒)

من ①

∴ و(∠و) = و(∠هـ) محيطيتان تحصران أقواسًا متساوية (وهو المطلوب)

من **١٠** إلى **١٢** راجع إجابتك فى «100% إجابات»

---

١٣ ∵ س ص قطر فى الدائرة م ∴ و(س أ ب ص⌒) = ١٨٠°

∵ و(س أ⌒) = و(أ ب⌒) = و(ب ص⌒) = $\frac{١٨٠°}{٣}$ = ٦٠°

∴ و(س أ ب⌒) = و(أ ب ص⌒) = ١٢٠°

∴ و(∠س) = $\frac{1}{2}$ و(أ ب ص⌒) = ٦٠°

، و(∠ص) = $\frac{1}{2}$ و(س أ ب⌒) = ٦٠°

∴ Δ ح س ص متساوى الأضلاع

---

١٤ ∵ و(∠ح) = و(∠أ) = ٢٥° مشتركتان فى (ب ء⌒)

∵ أب قطر فى الدائرة ، ب هـ مماس لها

∴ و(∠أ ب هـ) = ٩٠°

فى Δ أ هـ ب

و(∠أ هـ ب) = ٩٠° − ٢٥° = ٦٥°

---

١٥ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

ثانيا: عكس النظرية:

١٦ فى Δ أ ب ء

∵ أ ء = أ ب

∴ و(∠أ ب ء) = و(∠ء) = $\frac{١٨٠° - ٨٠°}{٢}$ = ٥٠°

∵ و(∠ء) = و(∠ح) وهما مرسومتان على القاعدة أب وفى جهة واحدة منها.

∴ النقط أ ، ب ، ح ، ء تمر بها دائرة واحدة

---

١٧ ① يمكن لأن : و(∠أ ء ح) = و(∠ء ب ح) = ٤٦°

② يمكن لأن : و(∠أ ب ء) = و(∠أ ح ء) = ٣٢°

③ لايمكن لأن : و(∠أ) ≠ و(∠ء)

---

١٨ ∵ أ ء // ب ح

∴ و(∠أ ح ب) = و(∠ء أ ح) = ٣٠° (بالتبادل)

فى Δ ب هـ ح :

∴ و(∠هـ ب ح) = ١٨٠° − (١٢٠° + ٣٠°) = ٣٠°

∵ و(∠ء أ ح) = و(∠ء ب ح) = ٣٠°

وهما مرسومتان على القاعدة ء ح وفى جهة واحدة منها.

∴ النقط أ ، ب ، ح ، ء تمر بها دائرة واحدة.

---

١٩ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

TIMSS تفكير إبداعى

٢٠ ∵ أب قطر ∴ و(∠أ ح ب) = ٩٠°

∴ و(∠ب ح ء) = ١٨٠° − (٩٠° + ٥٠°) = ٤٠°

∵ (∠أ ح ب) خارجة عن Δ ح ب ء

∴ و(∠ح ب أ) = ٣٠° + ٤٠° = ٧٠°

---

٢١ ∵ أب قطر فى الدائرة م

∴ و(∠أ هـ ب) = ٩٠° ، و(∠ء هـ ب) = ٩٠°

∵ ح ء ⊥ أب

∴ و(∠ء ح ب) = ٩٠°

∵ و(∠ء هـ ب) = و(∠ء ح ب) = ٩٠°

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة ب ء وفى جهة واحدة منها.

∴ النقط ء ، هـ ، ح ، ب تمر بها دائرة واحدة.

٢٢ العمل نرسم ء م ، ن م ، ن ا ، ء ا

١ ∵ ∠ ء هـ ن ، ∠ ء ا ن محيطيتان

مشتركتان فى (⌒ء ن)

∴ ق(∠ ء ا ن) = ٣٠°

٢ ∵ ∠ ء هـ ن المحيطية ، ∠ ء م ن المركزية

مشتركتان فى (⌒ء ن)

∴ ق(∠ ء م ن) = ٢ × ٣٠° = ٦٠°

∴ ء م = ن م = نق

∴ Δ ء م ن متساوى الأضلاع

∴ نق = ٥ سم

∵ محيط الدائرة = ٢ π نق

∴ محيط الدائرة = ٢ × ٥ × π = ١٠ π سم

إجابة تدريبات الكتاب المدرسى الدرس (٣)

١ فى الدائرة م

∵ ق(∠ هـ ب حـ) = ق(∠ هـ ا حـ) ← ①

محيطيتان مرسومتان على (⌒هـ حـ) فى الدائرة ن

∵ ق(∠ و ب ء) = ق(∠ و ا ء) ← ②

محيطيتان مرسومتان على (⌒و ء)

∵ هـ و ∩ حـ ء = {ا}

∴ ق(∠ هـ ا حـ) = ق(∠ و ا ء) بالتقابل بالرأس ← ③

من ① ، ② ، ③

∴ ق(∠ هـ ب حـ) = ق(∠ و ب ء)

---

٢ ∵ ا ب = حـ ء

∴ ق(⌒ا ء ب) = ق(⌒حـ ب ء) بحذف ق(⌒ء ب) من الطرفين

∴ ق(⌒ا ء) = ق(⌒ب حـ) ← ①

∵ ق(∠ حـ) = ½ ق(⌒ا ء)

، ق(∠ ا) = ½ ق(⌒ب حـ)

من ①

∴ ق(∠ حـ) = ق(∠ ا)

∴ Δ ا حـ هـ متساوى الساقين

---

٣ ∵ ا حـ = ا ب

∴ ق(⌒ا حـ) = ق(⌒ا ب) ← ①

∵ ق(∠ ا هـ حـ) = ½ ق(⌒ا حـ)

∵ ق(∠ ا هـ ب) = ½ ق(⌒ا ب)

من ①

∴ ق(∠ ا هـ ب) = ق(∠ ا هـ حـ)

من ٤ إلى ١٠ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

إجابة اختبر نفسك من أسئلة المحافظات حتى الدرس (٣)

١ ١ $\frac{١}{٦}$ ٢ ٢٠٠° ٣ ٥٠ ٤ ٣٠

---

٢ ١ ∵ ا ب قطر فى الدائرة م ∴ ق(⌒ا ء ب) = ١٨٠°

∵ ق(⌒ا ء) = ق(⌒ء ب) ∴ ق(⌒ا ء) = ق(⌒ء ب) = $\frac{١٨٠°}{٢}$ = ٩٠°

∵ ق(⌒ء ب) = ٣ ق(⌒ا حـ) ∴ ق(⌒ا حـ) = $\frac{١}{٣}$ × ٩٠° = ٣٠°

∵ ا ب ∩ حـ ء = {هـ}

∴ ق(∠ ا هـ حـ) = $\frac{١}{٢}$ [٣٠° + ٩٠°] = ٦٠°

٢ فى Δ س ص ل

∵ س ص = ل ص

∴ ق(∠ س) = ق(∠ ص ل س) = $\frac{١٨٠° - ١٠٠°}{٢}$ = ٤٠°

∵ ق(∠ س) = ق(∠ ع) = ٤٠°

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة ص ل وفى جهة واحدة منها

∴ النقط س ، ص ، ع ، ل تمر بها دائرة واحدة.

إجابة أسئلة س سؤال الدرس (٤)

١ ١ (ا) س = ٥٠° ، ص = ٣٠° (ب) س = ٤٠° ، ص = ٤٠°

٢ شكل (ا): ∵ ا ء // ب حـ

∴ ق(∠ ء ب حـ) = ق(∠ ا ء ب) = ٤٠° بالتبادل

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠ هـ حـ ب) = ١٨٠° - (٩٥° + ٤٠°) = ٤٥°

∵ ق(∠ ا ء ب) ≠ ق(∠ ا حـ ب)

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة ا ب وفى جهة واحدة منها

∴ الشكل ا ب حـ ء ليس رباعيًا دائريًا

شكل (ب): فى Δ ا ب حـ

∵ ق(∠ ا ب حـ) = ٤٧° ، ق(∠ ا حـ ب) = ٤٣°

∴ ق(∠ ب ا حـ) = ١٨٠° - (٤٧° + ٤٣°) = ٩٠°

، ∵ ق(∠ ب ء حـ) = ٩٠°

∴ ق(∠ ب ا حـ) = ق(∠ ب ء حـ) = ٩٠°

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة ب حـ وفى جهة واحدة منها

∴ الشكل ا ب حـ ء رباعى دائرى.

---

٢ فى Δ ا هـ حـ

∵ ق(∠ ا) = ٦٠° ، ق(∠ ا حـ هـ) = ٣٠°

∴ ق(∠ ا هـ حـ) = ١٨٠° - (٦٠° + ٣٠°) = ٩٠°

∵ ∠ ا هـ ب مستقيمة

∴ ق(∠ ب هـ حـ) = ١٨٠° - ٩٠° = ٩٠°

فى Δ ء ب حـ

∵ ب ء ⊥ ا حـ

∴ ق(∠ ب ء حـ) = ٩٠°

∵ ق(∠ ب هـ حـ) = ق(∠ ب ء حـ) = ٩٠°

وهما مرسومتان على القاعدة ب حـ وفى جهة واحدة منها

∴ الشكل هـ ب حـ ء رباعى دائرى

إجابة تدريبات الأضواء الدرس (٤)

الشكل الرباعى الدائرى:

١ ١ مستطيل ٢ ب ء حـ ٣ $\overline{ء و}$ ٤ ٦٠
٥ ٦٠ ٦ ٧٠ ٧ ١٠٠ ٨ ٩٠

٢ ١ ٣٥ ٢ ٨٠ ٣ ٦٠

٣ ١ رباعى دائرى.

التفسير: ق(∠ ء أ حـ) = ق(∠ ء ب حـ) = ٥٠°

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة $\overline{حـ ء}$ وفى جهة واحدة منها.

٢ ليس رباعيًا دائريًا.

التفسير: لأن الشكل أ ب حـ ء معين

وبالتالى فإن ق(∠ ب أ حـ) ≠ ق(∠ ب ء حـ)

٣ ليس رباعيًا دائريًا.

التفسير: لأن ق(∠ أ ء ب) ≠ ق(∠ أ حـ ب)

٤ رباعى دائرى

التفسير: لأن ق(∠ أ) = ق(∠ ء) = ٩٠°

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة $\overline{ب حـ}$ وفى جهة واحدة منها

٥ رباعى دائرى

التفسير: لأن الشكل شبه منحرف متساوى الساقين

وبالتالى فإن ق(∠ ب أ حـ) = ق(∠ ب ء حـ)

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة $\overline{ب حـ}$ وفى جهة واحدة منها.

٦ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

٤ ∵ $\overline{س هـ}$ قطعة مماسة، $\overline{م س}$ نصف قطر

∴ ق(∠ هـ س ص) = ٩٠° ← ①

∵ ص ل = ل ع ∴ $\overline{ل م} \perp \overline{ع ص}$

∴ ق(∠ هـ ل ص) = ٩٠° ← ②

من ①، ② نستنتج أن:

∴ ق(∠ هـ س ص) = ق(∠ هـ ل ص) = ٩٠°

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة $\overline{ص هـ}$ وفى جهة واحدة منها.

∴ الشكل س ل ص هـ رباعى دائرى

٥ فى Δ أ ب حـ

∵ أ ب = ب حـ ∴ ق(∠ ب أ حـ) = ق(∠ ب حـ أ)

∴ ق(∠ ب أ حـ) = $\frac{١٨٠° - ٧٠°}{٢}$ = ٥٥°

∵ ق(∠ ب أ حـ) = ق(∠ ب ء حـ) = ٥٥°

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة $\overline{ب حـ}$ وفى جهة واحدة منها.

∴ الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى

من ٦ إلى ١٢ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

١٣ ∵ $\overline{أ ء} \perp \overline{ب حـ}$ ، $\overline{ب هـ} \perp \overline{أ حـ}$

∴ ق(∠ أ ء ب) = ق(∠ أ هـ ب) = ٩٠°

وهما مرسومتان على القاعدة $\overline{أ ب}$ وفى جهة واحدة منها.

∴ الشكل أ ب ء هـ رباعى دائرى

، ق(∠ أ ب هـ) = ق(∠ أ ء هـ) ← ①

∵ س منتصف $\overline{ب ن}$، ص منتصف $\overline{أ ن}$ فى Δ أ ن ب

∴ $\overline{س ص}$ // $\overline{أ ب}$

∴ ق(∠ ص س هـ) = ق(∠ أ ب هـ) بالتناظر ← ②

من ①، ② نستنتج أن:

ق(∠ ص س هـ) = ق(∠ أ ء هـ) وهما مرسومتان على القاعدة $\overline{ص هـ}$ وفى جهة واحدة منها.

∴ الشكل س ص هـ ء رباعى دائرى.

١٤ ١ ∵ $\overline{أ ء} \cap \overline{ب حـ}$ = {هـ}

∴ ق(∠ أ هـ ب) = $\frac{١}{٢}$ [ق($\overset{\frown}{أ ب}$) + ق($\overset{\frown}{حـ ء}$)]

∵ أ ب = حـ ء

∴ ق($\overset{\frown}{أ ب}$) = ق($\overset{\frown}{حـ ء}$)

∴ ق(∠ أ هـ ب) = $\frac{١}{٢}$ [٢ ق($\overset{\frown}{أ ب}$)] = ق($\overset{\frown}{أ ب}$) ← ①

∵ ق(∠ أ م ب) المركزية = ق($\overset{\frown}{أ ب}$) ← ②

من ①، ②

∴ ق(∠ أ هـ ب) = ق(∠ أ م ب) وهما مرسومتان على قاعدة واحدة $\overline{أ ب}$ وفى جهة واحدة منها.

∴ الشكل أ ب م هـ رباعى دائرى

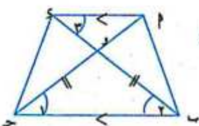
٢ ∵ ق(∠ أ ب حـ) = ق(∠ أ م هـ) = ٤٠° من خواص الرباعى الدائرى

∵ ∠ أ ب حـ المحيطية، ∠ أ ء حـ المحيطية مشتركتان فى ($\overset{\frown}{أ حـ}$)

∴ ق(∠ أ ء حـ) = ٤٠°

تفكير إبداعى TIMSS

١٥ ∵ $\overline{أ ء}$ // $\overline{ب حـ}$



∴ ق(∠ ٣) = ق(∠ ٢) بالتبادل ← ①

∵ و حـ = و ب

فى Δ ب و حـ

∴ ق(∠ ١) = ق(∠ ٢) ← ①

من ①، ② نستنتج أن:

∴ ق(∠ ٣) = ق(∠ ١) وهما مرسومتان على قاعدة واحدة $\overline{أ ب}$ وفى جهة واحدة منها.

∴ الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى

16 ∵ س ب م ص مربع ، ع ص ء حـ مربع

Δ Δ م ص ع ، س ص ء

فيهما:
- م ص = س ص
- ع ص = ص ء
- ق(∠م ص ع) = ق(∠س ص ء)

∴ Δ م ص ع ≡ Δ س ص ء

وينتج من التطابق أن:

ق(∠1) = ق(∠2)

وهما زاويتان مرسومتان على قاعدة واحدة ص و وفى جهة واحدة منها

1 ∴ الشكل م س و ص رباعى دائرى

∴ ق(∠م ص س) = ق(∠م و س) = 90°

2 ∴ م ع ⊥ س ء (وهو المطلوب)

إجابة تدريبات الكتاب المدرسى الدرس (4)

1 ∵ م ب = م حـ ∴ ق(∠ب) = ق(∠حـ)

∵ ب س ينصف (∠ب) ، حـ ص ينصف (∠حـ)

∴ ق(∠ص ب س) = ق(∠ص حـ س)

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة ص س وفى جهة واحدة منها.

∴ الشكل ب حـ س ص رباعى دائرى (أولاً)

∴ ق(∠ص س ب) = ق(∠ص حـ ب)

ولكن ق(∠ص حـ ب) = ق(∠س ب حـ)

∴ ق(∠ص س ب) = ق(∠س ب حـ)

وهما فى وضع تبادل

∴ س ص // ب حـ (ثانيًا)

2 ∵ م ب حـ ء متوازى أضلاع

∴ ق(∠ب م ء) = ق(∠حـ) ← (1)

∵ م ء = ب هـ ∴ ب هـ = ب حـ

∴ ق(∠ب هـ حـ) = ق(∠حـ) ← (2)

من (1) ، (2) نستنتج أن:

ق(∠ب م ء) = ق(∠ب هـ ء)

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة ب ء فى جهة واحدة منها.

∴ الشكل م ب ء هـ رباعى دائرى.

3 ∵ م ب قطر فى الدائرة م ∴ ق(∠م حـ ب) = 90°

∴ ق(∠م حـ هـ) = ق(∠م ء هـ) = 90°

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة م هـ وفى جهة واحدة منها.

∴ الشكل م حـ ء هـ رباعى دائرى (وهو المطلوب)

من 4 إلى 6 راجع إجابتك فى «100% إجابات»

إجابة اختبر نفسك من أسئلة المحافظات حتى الدرس (4)

1 1) 90 2) 1 3) 30 4) $\frac{1}{2}\pi$ س

2 م ب حـ ء رباعى دائرى

∴ ق(∠ء م حـ) = ق(∠ء ب حـ) ← (1)

∵ م ء // س ص

∴ ق(∠ء م حـ) = ق(∠ص س حـ) بالتناظر ← (2)

من (1) ، (2)

∴ ق(∠ء ب حـ) = ق(∠ص س حـ) وهما مرسومتان على قاعدة ص حـ وفى جهة واحدة منهما

(أ) ∴ الشكل ب س ص حـ رباعى دائرى،

(ب) ∴ ق(∠س ب ص) = ق(∠س حـ ص) (وهو المطلوب)

3 ∵ هـ منتصف (قوس م ب)

∴ ق(قوس م هـ) = ق(قوس هـ ب) ← (1)

∵ م ب // ء حـ

∴ ق(قوس م ء) = ق(قوس ب حـ) ← (2)

بجمع (1) ، (2)

∴ ق(قوس هـ م ء) = ق(قوس هـ ب حـ)

∴ هـ ء = هـ حـ (وهو المطلوب)

إجابة أسئلة س سؤال الدرس (5)

1 1) 110 2) 115 3) 120

2 1) س = 43° 2) س = 70°

3 1 (أ) ليس رباعيًا دائريًا؛ لأن ق(∠م ء هـ) ≠ ق(∠ب)

(ب) ليس رباعيًا دائريًا؛ لأن ق(∠ب) ≠ ق(∠م ء هـ)

(جـ) رباعى دائرى؛ لأن ق(∠م ء هـ) = ق(∠ب) = 125°

2 م ب مماس، مَ ب نصف قطر

∴ ق(∠م ب مَ) = 90° ← (1)

∵ هـ منتصف حـ ء ∴ مَ هـ ⊥ حـ ء

∴ ق(∠مَ هـ حـ) = 90° ← (2)

من (1) ، (2)

∵ ق(∠م ب مَ) + ق(∠مَ هـ حـ) = 180°

∴ الشكل م ب مَ هـ رباعى دائرى.

3 ∵ مَ نَ خط المركزين ، م ب وتر مشترك

∴ مَ نَ ⊥ م ب ∴ ق(∠م و نَ) = 90°

∵ حـ ء مماس للدائرة نَ عند ء ، نَ ء نصف قطر

∴ ق(∠حـ ء نَ) = 90°

∵ ق(∠م و نَ) + ق(∠حـ ء نَ) = 90° + 90° = 180°

∴ الشكل حـ و نَ ء رباعى دائرى.

إجابة تدريبات الأضواء الدرس (٥)

أولاً: نظرية (٣) والنتيجة:

١

١ متكاملتان	٢ ١١٠	٣ ٦٠	٤ ١٣٥
٥ ٣٦	٦ ٩٠	٧ ٥٠°	٨ ١٠٠
٩ ١٠٨	١٠ ٧٠°	١١ ١١٠°	١٢ ٥٠°
١٣ ٢٥°	١٤ ١٦	١٥ (٤٠ ، ٢٠)	١٦ ٤٨°

---

٢ ١ متكاملتان

٢ يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة للمجاورة لها.

٣ ٩٠° ٤ ٨٠° ٥ ١٣٥°

٦ س = ٢٠ ، ص = ٦٠ ٧ س = ٦٠ ، ص = ٦٠ ٨ ١٠٥°

---

٣ ١ س = ٣٣ ، ص = ٢٠ ٢ س = ٥٠ ، ص = ٤٠

٣ س = ٥٥ ، ص = ٥٥

---

٤ ∵ أ ب حـ د رباعى دائرى

١ ∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − ١٤٠° = ٤٠°

∵ $\overline{أب}$ قطر للدائرة ∴ ق(∠أ د ب) = ٩٠°

∵ ب حـ = د حـ

∴ ق(∠ حـ د ب) = (١٨٠° − ١٤٠°) ÷ ٢ = ٢٠°

٢ ∴ ق(∠أ د حـ) = ٢٠° + ٩٠° = ١١٠°

---

٥ ∵ أ ب حـ د رباعى دائرى

∴ ق(∠حـ د أ) = ق(∠حـ ب هـ) = ٨٥°

∵ ق(∠أ د ب) = $\frac{1}{2}$ ق(⌒أ ب) = $\frac{1}{2}$ × ١١٠° = ٥٥°

∴ ق(∠ب د حـ) = ٨٥° − ٥٥° = ٣٠°

---

٦ ∵ أ ب حـ د رباعى دائرى ∴ ق(∠د) = ١٢٠°

∵ $\overline{ب حـ}$ قطر فى الدائرة ∴ ق(∠حـ أ ب) = ٩٠°

∴ ق(∠أ حـ ب) = ٣٠°

∵ طول (⌒أ د) = طول (⌒حـ د) ∴ حـ د = د أ

∴ △ حـ د أ متساوى الساقين

∴ ق(∠د حـ أ) = $\frac{١٨٠° - ١٢٠°}{٢}$ = ٣٠°

∴ ق(∠ب حـ د) = ٣٠° + ٣٠° = ٦٠°

∴ $\overleftarrow{حـ أ}$ ينصف (∠ب حـ د)

من **٧** إلى **١٠** راجع إجابتك فى «100% إجابات»

ثانيًا: عكس نظرية (٣) والنتيجة:

١١ ١ ق(∠أ) + ق(∠حـ) = ٨٣° + ٩٧° = ١٨٠°

∴ الشكل أ ب حـ د رباعى دائرى

٢ ∵ ق(∠ب) = ١٨٠° − (٥٠° + ٣٥°) = ٩٥°

∴ ق(∠ب) + ق(∠د) = ٨٥° + ٩٥° = ١٨٠°

∴ الشكل أ ب حـ د رباعى دائرى

٣ أ د = د حـ

ق(∠أ د حـ) = ١٨٠° − (٤٠° + ٤٠°) = ١٠٠°

∴ ق(∠ب) + ق(∠د) = ١٨٠°

∴ الشكل أ ب حـ د رباعى دائرى

٤ ∵ د منتصف $\overline{حـ هـ}$

∴ $\overline{م د}$ ⊥ $\overline{حـ هـ}$ ∴ ق(∠أ د حـ) = ٩٠°

∵ $\overleftrightarrow{ب حـ}$ مماس للدائرة م ، $\overline{م حـ}$ نصف قطر

∴ ق(∠م حـ ب) = ٩٠°

∵ $\overline{م حـ}$ // $\overline{أ ب}$ ∴ ق(∠أ ب حـ) = ٩٠°

∵ ق(∠أ د حـ) + ق(∠أ ب حـ) = ١٨٠°

∴ الشكل أ ب حـ د رباعى دائرى

٥ ∵ ق(∠أ) = ٦٠°

∴ ق(∠أ س ص) + ق(∠أ ص س) = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠°

∵ $\overleftarrow{س حـ}$ ينصف ∠س ، $\overleftarrow{ص حـ}$ ينصف ∠ص

∴ ق(∠ حـ س ص) + ق(∠ حـ ص س) = ٦٠°

فى △ س حـ ص

∴ ق(∠س حـ ص) = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠°

∴ ق(∠ ب حـ د) = ق(∠س حـ ص) = ١٢٠° بالتقابل بالرأس

، ∵ ق(∠أ) + ق(∠ب حـ د) = ٦٠° + ١٢٠° = ١٨٠°

∴ الشكل أ ب حـ د رباعى دائرى

٦ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

---

١٢ ∵ $\overline{أ د}$ // $\overline{ب حـ}$ ، $\overline{أ ب}$ قاطع ∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − ٨٠° = ١٠٠°

∵ $\overleftarrow{حـ و}$ ينصف ∠د حـ هـ ∴ ق(∠د حـ هـ) = ١٠٠°

∵ ق(∠د حـ هـ) = ق(∠أ) ∴ الشكل أ ب حـ د رباعى دائرى.

---

١٣ ∵ $\overleftarrow{د حـ}$ يمس الدائرة عند حـ ، $\overline{م حـ}$ نصف قطر

∴ ق (∠م حـ د) = ٩٠° بالمثل ق (∠م أ د) = ٩٠°

∴ ق (∠م حـ د) + ق (∠م أ د) = ١٨٠°

(١) ∴ الشكل أ م حـ د رباعى دائرى (وهو المطلوب أولًا)

فى △ د أ هـ: ق (∠د أ هـ) = ٩٠° ، ق (∠د) = ٤٥°

∴ ق(∠هـ) = ١٨٠° − (٩٠° + ٤٥°) = ٤٥° ← (١)

∴ ق(∠حـ م هـ) = ق (∠د) = ٤٥° ← (٢)

من (١)، (٢) نستنتج أن:

(٢) △ حـ م هـ متساوى الساقين (وهو المطلوب ثانيًا)

---

١٤ ∵ $\overleftrightarrow{أ حـ}$ مماس للدائرة عند أ ، $\overline{أ د}$ قطر

∴ ق(∠حـ أ م) = ٩٠° ← (١)

∵ $\overleftrightarrow{ب حـ}$ مماس للدائرة عند ب ، $\overline{م ب}$ نصف قطر

∴ ق(∠م ب حـ) = ٩٠° ← (٢)

من (١)، (٢) نستنتج أن:

∴ الشكل أ حـ ب م رباعى دائرى

∴ ∠د م ب خارجة عن الشكل الرباعى الدائرى

∴ ق(∠د م ب) = ق(∠أ حـ ب) (وهو المطلوب)

من ١٥ إلى ٢٣ راجع إجابتك في «100% إجابات»

٢٤ ∵ Δ أ ب جـ له ثلاثة محاور تماثل

∴ Δ أ ب جـ متساوي الأضلاع

∴ ق(∠أ ب جـ) = ق(∠أ جـ ب) = ق(∠ب أ جـ) = ٦٠°

∵ الشكل أ ب جـ د رباعي دائري

∴ ق(∠أ د جـ) = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠°

في Δ أ جـ د ∴ د أ = د جـ

∴ ق(∠د أ جـ) = ق(∠د جـ أ) = $\frac{١٨٠° - ١٢٠°}{٢}$ = ٣٠°

∴ ق(∠د جـ ب) = ٦٠° + ٣٠° = ٩٠°

∴ ق(∠ب أ د) = ١٨٠° − ٩٠° = ٩٠°

∴ ب د قطر في الدائرة المارة برءوس Δ أ ب د

---

٢٥ ١ ∵ ب د مماس للدائرة عند ب ، أ ب قطر في الدائرة

∴ ق(∠م ب د) = ٩٠°

∵ هـ منتصف أ جـ

∴ م هـ ⊥ أ جـ

∴ ق(∠م هـ د) = ٩٠°

∵ ق(∠م ب د) + ق(∠م هـ د) = ١٨٠°

∴ الشكل هـ م ب د رباعي دائري.

٢ ∵ ∠ب أ س المحيطية ، ∠ب م س المركزية مشتركتان في ب س

∴ ق(∠ب أ س) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ب م س) ← ①

∵ ق(∠ب م س) = ق(∠د) (من خواص الرباعي الدائري) ← ②

من ①، ②

∴ ق(∠ب أ س) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠د) (وهو المطلوب)

TIMSS تفكير إبداعي

٢٦ ∵ أ ب // هـ د ، أ د قاطع لهما

∵ ق(∠ب أ د) = ق(∠أ د هـ) (بالتبادل) ← ①

∵ ب جـ // د و ، د جـ قاطع لهما

∴ ق(∠ب جـ د) = ق(∠جـ د و) (بالتبادل) ← ②

∵ ق(∠أ د هـ) + ق(∠جـ د و) = ١٨٠° ← ③

من ①، ②، ③

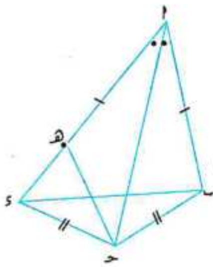
∴ ق(∠ب أ د) + ق(∠ب جـ د) = ١٨٠°

زاويتان متقابلتان متكاملتان

∴ الشكل أ ب جـ د رباعي دائري. (وهو المطلوب)

---

٢٧ خذ نقطة هـ ∈ أ د ، بحيث أ هـ = أ ب



Δ Δ أ ب جـ ، أ هـ جـ

فيهما: أ ب = أ هـ ، أ جـ (ضلع مشترك) ، ق(∠ب أ جـ) = ق(∠هـ أ جـ)

∴ Δ أ ب جـ ≡ Δ أ هـ جـ

∴ ق(∠أ ب جـ) = ق(∠أ هـ جـ) ،

هـ جـ = ب جـ

∵ ب جـ = جـ د (معطى)

∴ هـ جـ = جـ د ∴ Δ هـ د جـ متساوي الساقين.

∴ ق(∠جـ د هـ) = ق(∠د هـ جـ)

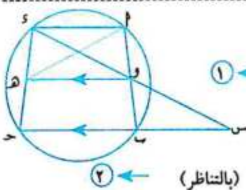
∵ ق(∠أ هـ جـ) + ق(∠د هـ جـ) = ١٨٠° ،

∴ ق(∠أ ب جـ) + ق(∠جـ د أ) = ١٨٠°

∴ أ ب جـ د رباعي دائري. (وهو المطلوب)

---

٢٨ ∵ أ ب جـ د رباعي دائري



∴ ق(∠أ) + ق(∠جـ) = ١٨٠° ← ①

∵ و هـ // ب جـ

∴ ق(∠جـ) = ق(∠د هـ و) (بالتناظر) ← ②

من ①، ② نستنتج أن:

∴ ق(∠أ) + ق(∠د هـ و) = ١٨٠°

١ ∴ الشكل أ و هـ د رباعي دائري.

٢ و هـ // س جـ

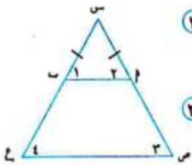
∴ ق(∠د و هـ) = ق(∠ب س و) (بالتناظر)

∵ ق(∠د و هـ) = ق(∠هـ أ د) من خواص الرباعي الدائري

∴ ق(∠ب س و) = ق(∠هـ أ د) (وهو المطلوب)

---

٢٩ ∵ أ س = ب س



∴ ق(∠١) = ق(∠٢) = ل ← ①

∵ س ع = س ص

∴ ق(∠٣) = ق(∠٤) = ن ← ②

١٨٠° − ٢ل = ١٨٠° − ٢ن

∴ ٢ل = ٢ن ∴ ل = ن

∴ ق(∠١) = ق(∠٣)

∴ الشكل أ ب ع ص رباعي دائري

إجابة تدريبات الكتاب المدرسى الدرس (٥)

١ (أ) ∵ أ ب جـ د رباعى دائرى

∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − ٧٠° = ١١٠°

∴ ق(∠أ ب د) = ١٨٠° − (٣٠° + ١١٠°) = ٤٠°

(ب) ∵ أ ب جـ د رباعى دائرى

∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٢ س)° ← ①

، ق(∠أ) = ١/٢ × (٢ س)° = س° ← ②

من ① ، ② نستنتج أن:

(٣ س)° = ١٨٠°   ∴ س = ٦٠

∴ ق(∠أ) = ٦٠°

(جـ) ق(⌒جـ ب) = ١٨٠° − (٦٠° + ٨٠°) = ٤٠°

ق(∠أ) = ١/٢ [٦٠° + ٤٠°] = ٥٠°

∴ ق(∠جـ) = ١٨٠° − ٥٠° = ١٣٠°

ق(∠ب) = ١/٢ (٦٠° + ٨٠°) = ٧٠°

∴ ق(∠د) = ١٨٠° − ٧٠° = ١١٠°

(د) ∵ أ ب جـ د ، أ ب هـ د أشكال رباعية دائرية

∴ ق(∠هـ) = ١٨٠° − ٩٥° = ٨٥°

∴ ق(∠جـ) = ق(∠هـ) = ٨٥°

∵ أد // هـ ب

، ق(∠أ ب هـ) = ١٨٠° − ٩٥° = ٨٥°

∴ ق(∠أ د جـ) = ١٨٠° − (٢٨° + ٨٥°) = ٦٧°

∴ ق(∠أ ب جـ) = ٨٥° + ٢٨° = ١١٣°

---

٢ (أ) س = ٧٥° ، ص = ١٠٠   (ب) س = ٧٨ ، ص = ٣٩

(جـ) س = ٦٠ ، ص = ١٢٥

---

٣ (أ) ∵ ق(∠د جـ ب) = ١٨٠° − ٩٤° = ٨٦°

∴ ق(∠د جـ ب) = ق(∠هـ أ د) = ٨٦°

∴ الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى

(ب) أ ب = أ د

∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٣٠° + ٣٠°) = ١٢٠°

∴ ق(∠أ) = ق(∠د جـ هـ) = ١٢٠°

∴ الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى

(جـ) أد // ب جـ

∴ ق(∠د) = ق(∠د جـ هـ) = (٥٣° + ٥٣°) = ١٠٦° (بالتبادل)

∴ ق(∠د) + ق(∠ب) = ١٠٦° + ٧٤° = ١٨٠°

∴ الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى

من ٤ إلى ٩ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

إجابة اختبر نفسك من أسئلة المحافظات حتى الدرس (٥)

١ ① ٢٣٠°   ② ١٣٠°   ③ ٨٠°   ④ ١١٦

---

٢ ① ∵ الشكل أ ب جـ د رباعى

∴ ق(∠أ) + ق(∠ب) + ق(∠جـ) + ق(∠د) = ٣٦٠°

∵ أس ، ب ص ، جـ ع ، د ل منصفات زواياه

∴ ١/٢ ق(∠أ) + ١/٢ ق(∠ب) + ١/٢ ق(∠جـ) + ١/٢ (∠د) = ١٨٠°

Δ أ ب س فيه (∠ص س ل) خارجة عنه.

∴ ق(∠ص س ل) = ١/٢ ق(∠أ) + ١/٢ (∠ب) ← ①

، بالمثل Δ جـ ع د فيه ∠ص ع د خارجة عنه

∴ ق(∠ص ع د) = ١/٢ ق(∠جـ) + ١/٢ ق(∠د) ← ②

بجمع من ① ، ②

∴ ق(∠ص س ل) + ق(∠ص ع د) = ١٨٠° ← ②

∴ الشكل س ص ع ل رباعى دائرى.   (وهو المطلوب)

② ∵ أ ب = أ د فى Δ أ ب د

∴ ق(∠أ ب د) = ق(∠أ د ب) = ٣٠°

∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٣٠° + ٣٠°) = ١٢٠°

∴ ق(∠أ) + ق(∠جـ) = ١٨٠°

∴ الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى   (وهو المطلوب)

إجابة أسئلة س سؤال الدرس (٦)

١ ① ∵ أب مماس ، م ب نصف قطر

∴ ق(∠أ ب م) = ٩٠°

∵ ق(∠م ب جـ) = ٣٠°

∴ ق(∠أ ب جـ) = ٩٠° − ٣٠° = ٦٠°

∵ أب ، أجـ مماسان للدائرة عند ب ، جـ

∴ أ ب = أ جـ

∴ ق(∠أ ب جـ) = ق(∠أ جـ ب) = ٦٠°

∴ ق(∠أ) = ١٨٠° − (٦٠° + ٦٠°) = ٦٠°

∵ ق(∠أ) = ق(∠أ ب جـ) = ق(∠أ جـ ب) = ٦٠°

∴ المثلث أ ب جـ متساوى الأضلاع

٢ (أ) ∵ أب ، أجـ قطعتان مماستان للدائرة

∴ أ ب = أ جـ

∴ ٢ س − ٣ = س + ٢

٢ س − س = ٣ + ٢ ⟸ س = ٥

(ب) ∵ محيط Δ أ ب جـ = أ ب + أ جـ + ب جـ

∴ محيط Δ أ ب جـ = (٢ × ٥ − ٣) + (٥ + ٢) + (١٣ − ٥)

= ٧ + ٧ + ٨ = ٢٢ سم

٢ ١ ∵ ق(∠ ب حـ ء) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق(∠ ب م ء) المركزية

مشتركتان فى ($\frown{بء}$)

∴ ق(∠ ب حـ ء) = $\frac{1}{2}$ × ١٤٠° = ٧٠°

∵ $\overline{أب}$ // $\overline{حـء}$

∴ ق(∠ أ ب حـ) = ق(∠ ب حـ ء) = ٧٠° (بالتبادل)

∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م

∴ أ ب = أ حـ

∴ ق(∠ أ ب حـ) = ق(∠ أ حـ ب) = ٧٠°

∴ ق(∠ أ) = ١٨٠° − (٧٠° + ٧٠°) = ٤٠°

٢ ∵ ق(∠ أ حـ ب) = ق(∠ ب حـ ء) = ٧٠°

∴ $\overleftarrow{حـب}$ ينصف (∠ أ حـ ء)

---

٣ ١ ∵ ء منتصف $\overline{بأ}$ ∴ $\overline{مء}$ ⊥ $\overline{بأ}$

∴ ق(∠ ب ء م) = ٩٠°

∵ $\overleftrightarrow{سم}$ ⊥ $\overline{بحـ}$ ∴ ق(∠ ب ص م) = ٩٠°

∵ ق(∠ ب ء م) + ق(∠ ب ص م) = ١٨٠°

∴ الشكل ب ص م ء رباعى دائرى.

٢ ∵ ق(∠ ص ب م) = ق(∠ ص ء م) = ٣٥° من خواص الرباعى الدائرى.

∵ $\overline{سب}$ مماس ، $\overline{بم}$ نصف قطر

∴ ق(∠ س ب م) = ٩٠°

∴ ق(∠ س ب حـ) = ٩٠° − ٣٥° = ٥٥°

∵ $\overline{سب}$ ، $\overline{سحـ}$ قطعتان مماستان للدائرة

∴ س ب = س حـ

∴ ق(∠ س ب حـ) = ق(∠ س حـ ب) = ٥٥°

∴ ق(∠ ب س حـ) = ١٨٠° − (٥٥° + ٥٥°) = ٧٠°

∵ ق(∠ م ء ص) = ٣٥°

∴ ق(∠ م ء ص) = $\frac{1}{2}$ ق(∠ ب س حـ)

---

٤ $\overline{هـأ}$ ، $\overline{هـحـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م

∴ هـ أ = هـ حـ ← ①

∵ $\overline{هـء}$ ، $\overline{هـب}$ قطعتان مماستان للدائرة ن

∴ هـ ء = هـ ب ← ②

من ① ، ② بالجمع

هـ أ + هـ ب = هـ حـ + هـ ء

∴ أ ب = حـ ء

إجابة تدريبات الأضواء الدرس (٦)

أولاً: نظرية (٤) ونتائجها:

١ ١ متوازيين ٢ متقاطعين ٣ متساويتان فى الطول

٤ يوازى ٥ = ٦ ٦٠° ٧ ٢٠°

٨ ٥٠° ٩ ١٢ ١٠ ٨٠

---

٢ ∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م

∴ أ ب = أ حـ ∴ ق(∠ أ ب حـ) = ق(∠ أ حـ ب)

∵ ق(∠ أ حـ م) = ٩٠° ∴ ق(∠ أ حـ ب) = ٦٠°

∴ ق(∠ أ ب حـ) = ٦٠° ∴ ق(∠ أ) = ٦٠°

∴ Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع

---

٣ ∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ قطعتان مماستان للدائرة عند ب ، حـ

∵ أ ب = أ حـ

∴ ق(∠ أ ب حـ) = ق(∠ أ حـ ب) = $\frac{١٨٠° - ٥٠°}{٢}$ = ٦٥°

∵ $\overline{بء}$ // $\overline{أحـ}$ ∴ ق(∠ حـ ب ء) = ٦٥° (بالتبادل)

∵ الشكل ب حـ هـ ء رباعى دائرى

١ ∴ ق(∠ هـ) = ١٨٠° − ٦٥° = ١١٥°

٢ ∵ ق(∠ حـ ء ب) = ق(∠ حـ ب ء) = ٦٥° ∴ ب حـ = حـ ء

---

٤ ∵ $\overline{أب}$ ، $\overline{أحـ}$ قطعتان مماستان للدائرة ∴ أ ب = أ حـ

∵ ق(∠ أ) = ٦٠° ∴ Δ أ ب حـ متساوى الأضلاع

∴ ب حـ = ٤سم

من **٥** إلى **١٠** راجع إجابتك فى «100% إجابات»

ثانيًا: الدائرة الداخلة للمضلع:

١١ ١ ١ ٢ ٣ ٣ منصفات زواياه الداخلة

٤ صفر ٥ ٢ ٦ ٣٦

---

١٢ فى الدائرة م

∵ $\overline{ءب}$ ، $\overline{ءأ}$ قطعتان مماستان للدائرة م

∴ ء ب = ء أ ← ①

فى الدائرة ن

∵ $\overline{ءأ}$ ، $\overline{ءحـ}$ قطعتان مماستان للدائرة ن

∴ ء أ = ء حـ ← ②

من ① ، ②

∴ ء ب = ء حـ

---

١٣ ∵ $\overleftarrow{وأ}$ ، $\overleftarrow{وحـ}$ مماسان للدائرة ن

∴ و أ = و حـ ← ①

∵ $\overleftarrow{وب}$ ، $\overleftarrow{وء}$ مماسان للدائرة م

∴ و ب = و ء ← ②

من ① ، ② بالطرح

∴ و أ − و ب = و حـ − و ء ∴ أ ب = حـ ء

---

١٤ ∵ $\overline{أء}$ ، $\overline{أو}$ قطعتان مماستان للدائرة م ∴ أ ء = أ و = ٥سم

∵ $\overline{بء}$ ، $\overline{بهـ}$ قطعتان مماستان للدائرة م ∴ ب ء = ب هـ = ٤سم

∵ $\overline{حـهـ}$ ، $\overline{حـو}$ قطعتان مماستان للدائرة م ∴ حـ هـ = حـ و = ٣سم

∵ محيط Δ أ ب حـ = أ ب + ب حـ + حـ أ

∴ محيط Δ أ ب حـ = ٩ + ٧ + ٨ = ٢٤سم

من **١٥** إلى **١٨** راجع إجابتك فى «100% إجابات»

تفكير إبداعي TIMSS

19 ∵ الدائرة م داخلة للشكل الرباعي أ ب حـ ء

∴ الدائرة م تمس أضلاع الشكل أ ب حـ ء في س، ص، ع، ل

∵ أس، أل قطعتان مماستان للدائرة م ∴ أس = أل ← (1)

∵ ب س، ب ص قطعتان مماستان للدائرة م ∴ ب س = ب ص ← (2)

بالمثل يكون حـ ع = حـ ص (3) ، ء ع = ء ل (4)

بجمع (1)، (2)، (3)، (4)

ينتج أن: (أس + ب س) + (حـ ع + ء ع) = أل + ب ص + حـ ص + ء ل

∴ أ ب + حـ ء = أ ء + ب حـ = $\frac{1}{2}$ محيط الشكل أ ب حـ ء

محيط الشكل أ ب حـ ء = 2 (9 + 12) = 42 سم

∴ مساحة الشكل أ ب حـ ء

= م(Δ أ م ب) + م(Δ ب م حـ) + م(Δ حـ م ء) + م(Δ أ م ء)

مساحة الشكل أ ب حـ ء

= $\frac{1}{2}$ أ ب × نق + $\frac{1}{2}$ ب حـ × نق + $\frac{1}{2}$ حـ ء × نق + $\frac{1}{2}$ أ ء × نق

= $\frac{1}{2}$ نق (أ ب + ب حـ + حـ ء + أ ء)

= $\frac{1}{2}$ محيط الشكل × نق = $\frac{1}{2}$ × 42 × 5 = 105 سم^2

---

20 ∵ أو، أهـ قطعتان مماستان ∴ أو = أهـ = س

بالمثل ب و = ب ء = ص ∴ حـ ء = حـ هـ = ع

∵ ب حـ + أو = ب ء + ء حـ + أو = ص + ع + س

∵ أ حـ + ب و = أهـ + هـ حـ + ب و = س + ع + ص

(1) ∴ ب حـ + أو = أ حـ + ب و

∵ أ ب = 7 سم ← أو + ب و = 7 ← س + ص = 7 ← (1)

ب حـ = 8 سم ← ب ء + ء حـ = 8 ← ص + ع = 8 ← (2)

أ حـ = 10 سم ← أهـ + هـ حـ = 10 ← س + ع = 10 ← (3)

بطرح (3) من (2) ص − س = −2

∵ ص + س = 7 بالجمع

2 ص = 5 ص = 2,5 سم

∴ س = 4,5 سم، ع = 5,5 سم

(2) ∴ أو = س = 4,5 سم، ء حـ = ع = 5,5 سم

إجابة تدريبات الكتاب المدرسي الدرس (6)

1 (أ) س = 65، ص = 25، ع = 130 (ب) س = 35، ص = 55، ع = 55

(جـ) س = 30، ص = 60، ع = 60

---

2 (أ) ∵ ق(∠ ب حـ ء) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق(∠ ب م ء) المركزية

مشتركتان في (ب ء)

∴ ق(∠ ب حـ ء) = $\frac{1}{2}$ × 130° = 65°

∵ أ ب // ء حـ

∴ ق(∠ أ ب حـ) = ق(∠ ب حـ ء) = 65° بالتبادل

∵ أ ب، أ حـ قطعتان مماستان ∴ أ ب = أ حـ

∴ ق(∠ أ ب حـ) = ق(∠ أ حـ ب) = 65°

∵ ق(∠ أ حـ ب) = ق(∠ ب حـ ء) = 65°

∴ حـ ب ينصف ∠ أ حـ ء

(ب) في Δ أ ب حـ

∴ ق(∠ أ ب حـ) = ق(∠ أ حـ ب) = 65°

∴ ق(∠ أ) = 180° − (65° + 65°) = 50°

---

3 ∵ م ء ⊥ ء حـ، م ن ⊥ أ حـ، ن هـ ⊥ حـ هـ، م حـ ⊥ ء أ، حـ ن ⊥ أ هـ

(أ) ∴ عدد الأشكال الرباعية الدائرية هو 3

وهي: حـ ء م أ، حـ أ ن هـ، حـ س أ ص، وهي أشكال رباعية دائرية.

لاحظ أن: حـ ء = حـ أ، حـ أ = حـ هـ

(ب) ∴ حـ ء = حـ أ = حـ هـ

∴ حـ هي مركز الدائرة التي تمر بالنقط ء، أ، هـ

---

4 (أ) س = 12، ص = 8 (ب) س = 9، ص = 17

(جـ) س = 4، ص = 3

---

5 ∵ أ ب = أ حـ ∴ م أ ينصف (∠ حـ أ ب)

∴ ق(∠ أ) = 25° × 2 = 50°

∴ ق(∠ أ ب حـ) = ق(∠ أ حـ ب) = $\frac{180° - 50°}{2}$ = $\frac{130°}{2}$ = 65° (أولًا)

∴ ق(∠ حـ م ب) = 180° − 50° = 130° (مركزية)

∴ ق(∠ ب هـ حـ) = $\frac{130°}{2}$ = 65° (ثانيًا)

محيطية مشتركة مع ∠ حـ م ب في (ب حـ)

من 6 إلى 10 راجع إجابتك في «100% إجابات»

إجابة اختبر نفسك من أسئلة المحافظات حتى الدرس (6)

1 (1) 70 (2) 3 (3) 3 (4) 1

---

2 (1) ∵ أس، أع مماستان

∴ أس = أع = 3 سم ∴ ع حـ = 8 − 3 = 5 سم

، ∵ ب س، ب ص مماستان ∴ ب س = ب ص = 4 سم

، ∵ حـ ص، حـ ع مماستان ∴ حـ ص = حـ ع = 5 سم

∴ طول ب حـ = ب ص + ص حـ = 4 + 5 = 9 سم

∴ محيط Δ أ ب حـ = أ ب + ب حـ + أ حـ = 7 + 9 + 8 = 24 سم

٢ ∵ $\overleftrightarrow{أ ء}$ ، $\overleftrightarrow{أ ب}$ مماسان في الدائرة الكبرى

∴ أ ء = أ ب ← (١)

، $\overleftrightarrow{أ ح}$ ، $\overleftrightarrow{أ ب}$ مماسان في الدائرة الصغرى

∴ أ ح = أ ب ← (٢)

∴ أ ء = أ ح   ∴ س + ٧ = ١٠

(أ) ∴ طول $\overline{أ ب}$ = ١٠ سم   (ب) ∴ قيمة س = ٣

إجابة أسئلة س سؤال الدرس (٧)

١ | ١ ∵ قياس الدائرة = ٣٦٠°

∴ ق(⌒ أ ء) = ق(⌒ ء و) = $\frac{٣٦٠° - ١٦٠°}{٢}$ = ١٠٠°

∴ ق(∠ ء أ ب) = $\frac{1}{2}$ ق(⌒ أ ء) = $\frac{1}{2}$ × ١٠٠° = ٥٠°

٢ ∵ ق(∠ ء أ ب) = $\frac{1}{2}$ ق(⌒ أ ب)

∴ ق(⌒ أ ب) = ٢ × ٧٠° = ١٤٠°

∵ ق(⌒ ب ح) = ١٠٠°

∴ ق(⌒ أ ح) = ٣٦٠° − (١٠٠° + ١٤٠°) = ١٢٠°

∵ ق(∠ هـ أ ح) = $\frac{1}{2}$ ق(⌒ أ ح)

∴ ق(∠ هـ أ ح) = $\frac{1}{2}$ × ١٢٠° = ٦٠°

٣ (أ) ∵ قياس الدائرة = ٣٦٠°

∴ ق(⌒ ب ح) = ٣٦٠° − ٢٠٠° = ١٦٠°

∵ ق(∠ أ ب ح) = $\frac{1}{2}$ ق(⌒ ب ح)

∴ ق(∠ أ ب ح) = $\frac{1}{2}$ × ١٦٠° = ٨٠°

(ب) ∵ $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ ح}$ مماسان للدائرة

∴ ق(∠ أ ب ح) = ق(∠ أ ح ب) = ٨٠°

∴ ق(∠ أ) = ١٨٠° − (٨٠° + ٨٠°) = ٢٠°

٢ ∵ ∠ و أ ح المماسية ، ∠ أ ب ح المحيطية مشتركتان في (⌒ أ ح)

∴ ق(∠ و أ ح) = ق(∠ أ ب ح) ← (١)

∴ الشكل ب ح ء هـ رباعي دائري ، ∠ أ ب ح خارجة عنه

∴ ق(∠ أ ب ح) = ق(∠ ء) ← (٢)

من (١) ، (٢)

∴ ق(∠ و أ ح) = ق(∠ ء) وهما في وضع تبادل

∴ $\overleftrightarrow{أ و}$ // $\overleftrightarrow{هـ ء}$

٣ ١ س = ٥٠° ، ص = ٥٠° ، ع = ٥٠°

٢ س = ١٢٠° ، ص = ٦٠° ، ع = ١٢٠°

٣ س = ٨٠° ، ص = ١٦٠°

٤ س = ٦٠° ، ص = ٦٠°

٥ س = ١٤٠° ، ص = ٧٠° ، ع = ٢٢٠°

٦ س = ١١٠° ، ص = ٥٥° ، ع = ٣٥°

٤ ١ ق(∠ أ ء ح) = ٧٠°   ٢ ق(∠ ح أ ء) = ٦٥°

٥ ∵ ∠ ح ء ب المحيطية تكمل ∠ أ ب ح المماسية

∴ ق(∠ ح ء ب) = ١٨٠° − ١٣٥° = ٤٥°

∵ $\overline{ء ح}$ قطر في الدائرة م   ∴ ق(∠ ء ب ح) = ٩٠°

∴ ق(∠ ء ب أ) = ١٣٥° − ٩٠° = ٤٥°

∴ ق(∠ ح ء ب) = ق(∠ ء ب أ) وهما في وضع تبادل

∴ $\overline{ح ء}$ // $\overleftrightarrow{ب أ}$

٦ ∆ أ ب ح قائم الزاوية في أ   ∴ ب ح = $\sqrt{(٥)^2 + (٥\sqrt{٣})^2}$ = ١٠ سم

∴ أ ح = $\frac{1}{2}$ ب ح   ∴ ق(∠ ب) = ٣٠°

∴ ق(∠ ء أ ح) = ق(∠ ب) = ٣٠°

∴ $\overleftrightarrow{أ ء}$ مماس للدائرة المارة برءوس المثلث أ ب ح

إجابة تدريبات الأضواء الدرس (٧)

أولًا: نظرية (٥) والنتيجة عليها:

١ | ١ وتر ومماس   ٢ ١٤٠°   ٣ ٩٠°

٤ ١ : ٢   ٥ ٢٢٠°   ٦ ١٢٠°

٧ ٦٠°   ٨ ٤٥°   ٩ ٦٠°

١٠ ٥٥°   ١١ ١١٠   ١٢ ٦٠

١٣ ٧٠°   ١٤ ٣٠

٢ | ١ زاوية محصورة بين وتر ومماس

٢ الزاوية المحيطية   ٣ الزاوية المركزية   ٤ ٤٥

٣ | ١ ٦٥°   ٢ ٩٠°   ٣ ٦٠°

٤ | ١ س = ٧٠ ، ص = ١٤٠   ٢ س = ٦٠ ، ص = ٦٠

٣ س = ٦٥ ، ص = ١١٥

٥ | ١ ∵ $\overleftrightarrow{ب ح}$ مماس للدائرة عند ب

∴ ق(∠ أ ب ح) = ق(∠ ء)

زاوية مماسية وزاوية محيطية مشتركتان في ⌒ أ ب

∴ ق(∠ ء) = ٧٠°

٢ ∵ ق(∠ أ ب ح) = $\frac{1}{2}$ ق(⌒ أ ب)

∴ ق(⌒ أ ب) الأصغر = ٢ × ٧٠° = ١٤٠°

٦ | ∵ س + ٢ س + ٦ س = ١٨٠

٩ س = ١٨٠   ∴ س = ٢٠

ق(∠ ب أ ح) = ٢ (س)° = ٢ × ٢٠° = ٤٠°

٧ | ∵ $\overleftrightarrow{أ ب}$ ، $\overleftrightarrow{أ ح}$ مماسان للدائرة عند ب ، ح

∴ أ ب = أ ح   ∴ ق(∠ أ ب ح) = ق(∠ أ ح ب)

∵ ق(∠ أ ب ح) = ق(∠ ء) = ٦٠°

∴ ∆ أ ب ح متساوي الأضلاع

من ٨ إلى ١٠ راجع إجابتك في «100% إجابات»

١١ ١ ∵ أب ، أجـ مماسان للدائرة عند ب ، جـ

∴ أب = أجـ

∴ ق(∠ أ ب جـ) = ق(∠ أ جـ ب) = (١٨٠° − ٧٠°) ÷ ٢ = ٥٥°

∵ ∠ أ جـ ب المماسية ، ∠ جـ هـ ب المحيطية مشتركتان فى ⌒ب جـ

∴ ق(∠ جـ هـ ب) = ق(∠ أ جـ ب) = ٥٥°

∵ الشكل ب جـ د هـ رباعى دائرى

∴ ق(∠ جـ ب هـ) = ١٨٠° − ١٢٥° = ٥٥°

∵ ق(∠ جـ هـ ب) = ق(∠ جـ ب هـ)

∴ جـ ب = جـ هـ

٢ ∵ ق(∠ أ جـ ب) = ق(∠ جـ ب هـ) = ٥٥° (وهما فى وضع تبادل)

∴ أجـ // ب هـ

من ١٢ إلى ١٤ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

---

١٥ ∵ أب قطر ∴ ق(∠ أ جـ ب) = ٩٠°

∵ د هـ ⊥ أب ∴ ق(∠ أ د هـ) = ٩٠°

∵ ق(∠ أ جـ ب) + ق(∠ أ د هـ) = ١٨٠°

∴ الشكل أ د هـ جـ رباعى دائرى. (وهو المطلوب أولًا)

∵ ق(∠ و جـ هـ) المماسية = ق(∠ أ) المحيطية ← ①

∵ (∠ و هـ جـ) خارجة عن الشكل الرباعى الدائرى أ د هـ جـ

، ق(∠ و هـ جـ) = ق(∠ أ) ← ②

من ① ، ②

∴ ق(∠ و جـ هـ) = ق(∠ و هـ جـ) ∴ و جـ = و هـ

∴ المثلث و هـ جـ متساوى الساقين. (وهو المطلوب ثانيًا)

---

١٦ ∵ أب ، أجـ قطعتان مماستان من نقطة أ

∴ أب = أجـ

١ ∴ ق(∠ أ ب جـ) = ق(∠ أ جـ ب) = (١٨٠° − ٤٠°) ÷ ٢ = ٧٠°

∵ جـ د // أب

∴ ق(∠ ب جـ د) = ق(∠ أ ب جـ) = ٧٠° (بالتبادل)

، ق(∠ ب د جـ) = ٧٠° (زاوية محيطية)

٢ ∴ ب جـ = ب د

٣ ∴ ق(∠ هـ ب د) = ق(∠ ب جـ د) = ٧٠° (مماسية ومحيطية مشتركتان فى (⌒ب د))

٤ ∵ ق(∠ ب جـ د) = ½ ق(⌒ب د)

∴ ق(⌒ب د) = ٢ × ٧٠° = ١٤٠°

من ١٧ إلى ١٩ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

ثانيًا عكس نظرية (٥):

٢٠ ∵ ب د قطر ∴ ق(∠ ب أ د) = ٩٠°

∵ ق(∠ ب) = ٥٠° ∴ ق(∠ د) = ٤٠°

∵ ق(∠ جـ أ ب) = ق(∠ د) = ٤٠° ∴ أجـ يمس الدائرة م عند أ

من ٢١ إلى ٢٤ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

---

٢٥ ١ ∵ أب قطر فى الدائرة م ∴ ق(∠ أ جـ ب) = ٩٠°

∵ ق(∠ أ جـ ب) = ق(∠ أ د هـ) = ٩٠°

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة أهـ وفى جهة واحدة منها.

∴ الشكل جـ د هـ أ رباعى دائرى.

٢ ∵ الشكل جـ د هـ أ رباعى دائرى

∴ ق(∠ جـ هـ د) = ق(∠ جـ أ د) ← ①

، ق(∠ د أ هـ) = ق(∠ د جـ هـ) ← ②

∵ ق(∠ د جـ ب) المماسية = ق(∠ جـ أ ب) المحيطية ← ③

من ① ، ② ، ③

∴ ق(∠ جـ هـ د) = ق(∠ د أ هـ)

∴ د هـ مماس للدائرة المارة برءوس المثلث أ ب هـ

---

٢٦ ∵ ب س مماس للدائرة عند ب

∴ ق(∠ جـ ب س) = ق(∠ ب أ جـ) ← ①

∵ أد // ب س

∴ ق(∠ جـ ب س) = ق(∠ جـ د أ) (بالتبادل) ← ②

من ① ، ②

∴ ق(∠ ب أ جـ) = ق(∠ جـ د أ)

∴ أب مماس للدائرة المارة برءوس △ أ جـ د

---

٢٧ ، ٢٩ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

---

٣٠ ∵ ب د مماس للدائرة م ، أب قطر

∴ ق(∠ أ ب د) = ٩٠°

∵ أب قطر

∴ ق(∠ أ جـ ب) = ق(∠ ب جـ د) = ٩٠°

∵ ∠ جـ ب د تتمم ∠ أ ب جـ ، ∠ جـ ب د تتمم ∠ د

∴ ق(∠ أ ب جـ) = ق(∠ د)

١ ∴ أب مماس للدائرة المارة برءوس △ جـ ب د

فى △ أ ب د القائم فى ب

∵ ب جـ ⊥ أد

∴ أد = √((٦)² + (٨)²) = ١٠ سم

٢ ∴ ب جـ = (٦ × ٨) ÷ ١٠ = ٤,٨ سم

---

٣١ ∵ ن جـ ⊥ أب

∴ ق(∠ أ جـ ن) = (١٨٠° − ٩٠°) ÷ ٢ = ٤٥° ← ①

∵ ق(∠ أ هـ جـ) المحيطية = ½ ق(∠ أ ن جـ) المركزية مشتركتان فى (⌒أ جـ)

∴ ق(∠ أ هـ جـ) = ٤٥° ← ②

من ① ، ②

∴ ق(∠ أ جـ ن) = ق(∠ أ هـ جـ)

∴ أجـ مماس للدائرة الخارجة للمثلث جـ د هـ

تفكير إبداعي TIMSS

٣٢ ∵ $\overline{أل}$ ، $\overline{أجـ}$ قطعتان مماستان

∴ أل = أجـ = ٧ سم ، ق(∠ل) = ق(∠جـ) = ٤٥°

∵ أ نقطة تقاطع المماسين ، م مركز الدائرة

∴ $\overline{أم} \perp \overline{لجـ}$ ∴ $\overrightarrow{أم}$ ينصف (∠ل أ جـ)

∴ ق(∠ل أ م) = ق(∠جـ أ م) = ٤٥°

∴ ق(∠ل أ ن) = ق(∠جـ)

∴ $\overleftarrow{أل}$ مماس للدائرة المارة برءوس △ أ ن جـ

٣٣ ١ ∵ △ أ ب جـ متساوي الأضلاع

∴ ق(∠أ جـ ب) = ٦٠° ← (١)

∵ △ ء جـ هـ متساوي الأضلاع

∴ ق(∠هـ ء جـ) = ٦٠° ← (٢)

من (١)، (٢)

∴ ق(∠أ جـ ب) = ق(∠هـ ء جـ)

∴ $\overline{أجـ}$ مماس للدائرة المارة برءوس △ جـ هـ ء

٢ ∵ هـ منتصف $\overline{بجـ}$ ∴ ق(∠و هـ جـ) = ٩٠°

∵ جـ هـ = ء هـ = ب هـ ∴ ء هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ

∴ ق(∠ب ء جـ) = ٩٠°

∵ ق(∠و هـ جـ) + ق(∠و ء جـ) = ١٨٠°

∴ الشكل جـ ء و هـ رباعي دائري.

٣ ∵ ق(∠و ء جـ) = ٩٠°

∴ مركز الدائرة المارة برءوس الشكل جـ ء و هـ يقع في منتصف $\overline{وجـ}$

٣٤ راجع إجابتك في «100% إجابات»

إجابة تدريبات الكتاب المدرسي الدرس (٧)

١ (أ) س = ٥٠ ، ص = ١٠٠ (ب) س = ٨٠ ، ص = ٥٠

(جـ) س = ٦٥ ، ص = ١٠٠

٢ (أ) ٨٠ (ب) ٧٠ (جـ) ٥٠

من ٣ إلى ٥ راجع إجابتك في «100% إجابات»

٦ ∵ الشكل أ ب جـ ء متوازي أضلاع

∴ ق(∠ب أ جـ) = ق(∠أ جـ ء)

(بالتبادل) ← (١)

∵ أ جـ = ب جـ

∴ ق(∠ب أ جـ) = ق(∠ب) ← (٢)

من (١)، (٢)

∴ ق(∠أ جـ ء) = ق(∠ب)

∴ $\overleftrightarrow{جـء}$ مماس للدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ

إجابة اختبر نفسك من أسئلة المحافظات حتى الدرس (٧)

١ ١ ٧٠° ٢ ٨٠° ٣ ٥٠° ٤ ٣٥°

٢ ∵ $\overleftrightarrow{ص س}$ // $\overleftrightarrow{ب ء}$

∴ ق(∠ء ب س) = ق(∠ب س ص) بالتبادل ← (١)

∵ ق(∠ء ب أ) المماسية = ق(∠جـ) المحيطية

مشتركتان في (⌒أب) ← (٢)

من (١)، (٢)

∴ ق(∠ب س ص) = ق(∠جـ)

، ∠ب س ص خارجة عن الشكل أ س ص جـ

∴ الشكل أ س ص جـ رباعي دائري.

إجابة اختبار الأضواء الوحدة الخامسة

١ ١ ٦٠° ٢ ٦٠° ٣ ٥٠° ٤ ٤٠° ٥ ١٢٠° ٦ ٧

٢ ١ نرسم $\overline{مء} \perp \overline{بجـ}$

في △ م ء ب

∵ ق(∠م ء ب) = ٩٠°

∴ م ء = $\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(3)^2}$ = $\sqrt{3}$ سم

في المثلث م ء ب القائم الزاوية في ء

∵ م ء = $\frac{1}{2}$ م ب

∴ ق(∠م ب ء) = ٣٠° ، ق(∠ب م ء) = ٦٠°

∴ ق(∠ب م جـ) = ٢ × ٦٠° = ١٢٠°

∴ ق(∠ب أ جـ) = $\frac{1}{2}$ × ١٢٠° = ٦٠°

٢ ق(∠أ) = $\frac{1}{2}$ [ق(⌒بجـ) − ق(⌒ءهـ)]

∴ ١٤٠° = ١٨٠° − ق(⌒ءهـ) ∴ ق(⌒ءهـ) = ١٨٠° − ١٤٠°

ق(⌒ءهـ) = ٤٠°

∵ $\overline{ءهـ}$ // $\overline{بجـ}$

∴ ق(⌒بء) = ق(⌒هـجـ) = $\frac{١٨٠° - ٤٠°}{٢}$ ∴ ق(⌒بء) = ٧٠°

٣ ، ٤ راجع إجابتك في «100% إجابات»

إجابة اختبار الكتاب المدرسي الوحدة الخامسة

١ ١ متكاملتان ٢ منصفات زواياه

٢ ١ ٩٠° ٢ ١١ سم ٣ ١٤ سم²

٣ ∵ ق(∠أ جـ ب) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق(∠أ م ب) المركزية لأنهما مشتركتان في (⌒أب)

∴ ق(∠أ جـ ب) = ٦٠° ← (١)

∵ $\overleftrightarrow{جء}$ // $\overline{أب}$ ∴ ق(⌒أجـ) = ق(⌒بجـ)

∴ أ جـ = ب جـ ← (٢)

من (١) و (٢)

∴ △ أ ب جـ متساوي الأضلاع

٤ ، ٥ راجع إجابتك في «100% إجابات»

إجابة أسئلة هامة على الوحدة الأولى من امتحانات المحافظات السابقة

١
١ الربع الرابع ٢ نقطة الأصل ٣ (٤ ، ٣)
٤ الثانى ٥ −٥ ٦ واحد
٧ ١٢ ٨ صفر ٩ {(−١ ، ٣)}
١٠ متوازيين ١١ {−٢ ، ٤} ١٢ ٣
١٣ ٣ ١٤ منطبقان ١٥ ٧
١٦ منطبقين ١٧ ٥ ١٨ عدد لا نهائى
١٩ ٤ ٢٠ ١١ ٢١ ٤
٢٢ {(٣ ، ٥)} ٢٣ −٤ ٢٤ ٢
٢٥ {(١ ، ١) ، (−١ ، −١)} ٢٦ {(٢ ، −١)} ٢٧ {(٣ ، ١)}
٢٨ ٣ ، ٥ ٢٩ (٠ ، ح) ٣٠ س + ١٠ص
٣١ ٢ ٣٢ عدد لا نهائى
٣٣ س + ص = ١ ٣٤ ١ ، ٢

٢
١ س = ٧ − ٣ص ← ①

بالتعويض فى المعادلة: ٥س − ص = ٣

∴ ٥ (٧ − ٣ص) − ص = ٣

٣٥ − ١٥ص − ص = ٣ ٣٥ − ١٦ص = ٣

∴ −١٦ص = ٣ − ٣٥

−١٦ص = −٣٢ ÷ (−١٦) ∴ ص = ٢

بالتعويض فى ① ∴ س = ٧ − ٣(٢)

∴ س = ٧ − ٦ ⇐ س = ١ ∴ م.ح = {(١ ، ٢)}

٢ س + ص = ٢ ← ①

−س + ص = ٢ ← ②

بجمع المعادلتين ① ، ②

٢ص = ٤ ∴ ص = ٢

بالتعويض فى المعادلة ①

∴ س + ٢ = ٢ ∴ س = ٢ − ٢

∴ س = صفر ∴ م.ح = {(صفر ، ٢)}

٣ ٢س − ص = ٣ ← ① ، س + ٢ص = ٤ ← ②

بضرب المعادلة ٢ × −٢ ثم جمع المعادلتين

٢س − ص = ٣

−٢س − ٤ص = −٨

−٥ص = −٥ ÷ (−٥)

∴ ص = ١

بالتعويض فى المعادلة ②

∴ س + ٢ = ٤ ∴ س = ٤ − ٢

∴ س = ٢ ∴ م.ح = {(٢ ، ١)}

٤ ، ٥ ، ٦ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

٣
١ ص = ٤ − س ، ص = ٢س − ٢

س	٠	١	٢
ص	٤	٣	٢

س	٠	١	٢
ص	−٢	٠	٢

∴ من الرسم

م.ح = {(٢ ، ٢)}

٢ ص = ٢س − ٣ ، ص = $\frac{٤ - س}{٢}$

س	٠	١	٢
ص	−٣	−١	١

س	−٢	٠	٢
ص	٣	٢	١

∴ من الرسم

م.ح = {(٢ ، ١)}

٣ ، ٤ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

٤
١ س٢ − ٣س + ١ = صفر

∴ أ = ١ ، ب = −٣ ، ح = ١

∴ $س = \frac{٣ \pm \sqrt{(-٣)^{٢} - ٤ \times ١ \times ١}}{٢ \times ١} = \frac{٣ \pm \sqrt{٥}}{٢}$

∴ $س = \frac{٣ + \sqrt{٥}}{٢}$ أو $س = \frac{٣ - \sqrt{٥}}{٢}$

س ≃ ٢,٦ س ≃ ٠,٤

∴ م.ح = {٢,٦ ، ٠,٤}

٢ ٢س٢ − ٥س + ١ = ٠

∴ أ = ٢ ، ب = −٥ ، ح = ١

$س = \frac{٥ \pm \sqrt{(-٥)^{٢} - ٤ \times ٢ \times ١}}{٢ \times ٢} = \frac{٥ \pm \sqrt{١٧}}{٤}$

$س = \frac{٥ + \sqrt{١٧}}{٤}$ أو $س = \frac{٥ - \sqrt{١٧}}{٤}$

س ≃ ٢,٣ س ≃ ٠,٢

∴ م.ح = {٢,٣ ، ٠,٢}

من ٣ إلى ٧ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

٨ س/٣ = ١/(س - ٥) ∴ ٥س - س² = ٣

∴ س² - ٥س + ٣ = ٠ ∴ أ = ١ ، ب = -٥ ، جـ = ٣

∴ س = (٥ ± √((-٥)² - ٤ × ١ × ٣)) / (٢ × ١) = (٥ ± √١٣) / ٢

∴ س = (٥ + √١٣) / ٢ أو س = (٥ - √١٣) / ٢

س ≃ ٤,٣٠ س ≃ ٠,٧٠

∴ م.ح = {٤,٣٠ ، ٠,٧٠}

٩ ١ - ٢/س = ٢/س² بضرب المعادلة (× س²)

∴ س² - ٢س = ٢ ∴ س² - ٢س - ٢ = ٠

∴ أ = ١ ، ب = -٢ ، جـ = -٢

∴ س = (٢ ± √((-٢)² - ٤ × ١ × (-٢))) / (٢ × ١) = (٢ ± ٢√٣) / ٢ = ١ ± √٣

∴ س = ١ + √٣ أو س = ١ - √٣

س ≃ ٢,٧٣٢ أو س ≃ -٠,٧٣٢

∴ م.ح = {٢,٧٣٢ ، -٠,٧٣٢}

٣ س = ١ ← (١)

س² + ص² = ١٠ ← (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢)

(١)² + ص² = ١٠

∴ ص² = ١٠ - ١ ∴ ص² = ٩

∴ ص = ٣ ، ص = -٣

∴ م.ح = {(١ ، ٣) ، (١ ، -٣)}

من ٤ إلى ٦ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

٧ ص + ٢س = ٧ ← (١)

(ص + ٢س - ٨)² + س² = ٥ ← (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢)

∴ (٧ - ٨)² + س² = ٥ ∴ ١ + س² = ٥

∴ س² = ٤ ∴ س = ±٢

عندما س = ٢ ∴ ص = ٧ - ٤ = ٣

عندما س = -٢ ∴ ص = ٧ + ٤ = ١١

∴ م.ح = {(٢ ، ٣) ، (-٢ ، ١١)}

---

٥ ١ س = ص ← (١)

∵ س² + س ص + ص² = ٢٧ ← (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢)

(ص)² + ص × ص + ص² = ٢٧

ص² + ص² + ص² = ٢٧

٣ص² = ٢٧ بقسمة الطرفين على ٣

ص² = ٩ ∴ ص = ٣ أو ص = -٣

بالتعويض فى (١)

∴ س = ٣ أو س = -٣

∴ م.ح = {(٣ ، ٣) ، (-٣ ، -٣)}

٢ س = ١ + ص ← (١)

س² - ص² = ٢٥ ← (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢)

(١ + ص)² - ص² = ٢٥

١ + ٢ص + ص² - ص² = ٢٥

∴ ٢ص = ٢٥ - ١

∴ ٢ص = ٢٤ بقسمة الطرفين على ٢

∴ ص = ١٢

بالتعويض فى (١)

س = ١ + ١٢ س = ١٣

∴ م.ح = {(١٣ ، ١٢)}

---

٦ ∵ (-٣ ، ١) حل للمعادلتين

∴ -٣أ + ب = ٥ ← (١)

-٩أ + ب = ١٧ ← (٢)

بطرح (٢) من (١)

٦أ = -١٢ ∴ أ = -٢

بالتعويض فى (١) -٣ (-٢) + ب = ٥

∴ ٦ + ب = ٥ ∴ ب = -١

∴ أ = -٢ ، ب = -١

---

٧ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

---

٨ نفرض أن الزاويتين الحادتين هما س ، ص

∴ س + ص = ٩٠° ← (١) لأن Δ قائم الزاوية

س - ص = ٥٠° ← (٢)

بالجمع

٢س = ١٤٠°

∴ س = ٧٠°

بالتعويض فى (١)

∴ ٧٠° + ص = ٩٠° ∴ ص = ٢٠°

∴ قياس الزاويتين ٧٠° ، ٢٠°

---

٩ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

١٠ نفرض أن آحاد العدد س وعشراته ص

∴ س + ص = ١١ ← ①

∴ العدد الأصلى س + ١٠ ص

وعكس وضع الرقمين ص + ١٠ س

∴ ص + ١٠ س − (س + ١٠ ص) = ٢٧

∴ ص + ١٠ س − س − ١٠ ص = ٢٧

٩ س − ٩ ص = ٢٧ بالقسمة على (٩)

∴ س − ص = ٣ ← ②

س + ص = ١١ ← ①

بالجمع

٢ س = ١٤

س = ٧

بالتعويض فى ①

∴ ٧ + ص = ١١ ∴ ص = ٤

∴ العدد هو ٤٧

---

١١ نفرض أن طول المستطيل = س سم

وعرض المستطيل = ص سم

∴ س − ص = ٣ ← ①

∵ محيط المستطيل = ٣٠ سم ∴ س + ص = نصف محيط المستطيل

∴ س + ص = ١٥ ← ②

بجمع ①، ②

∴ ٢ س = ١٨ ∴ س = ٩

بالتعويض فى ②

∴ ص = ١٥ − ٩ = ٦

∴ مساحة المستطيل = س × ص = ٩ × ٦ = ٥٤ سم^{٢}

---

١٢ نفرض أن طول المستطيل = س سم

وعرض المستطيل = ص سم

∴ س = ٢ ص ← ①

∵ مُحيط المستطيل = ١٨ سم ∴ س + ص = نصف محيط المستطيل

∴ س + ص = ٩ ← ②

بالتعويض من ① فى ②

∴ ٢ ص + ص = ٩ ∴ ٣ ص = ٩

∴ ص = ٣

∴ عرض المستطيل = ٣ سم، طول المستطيل = ٢ × ٣ = ٦ سم

∴ مساحة المستطيل = س × ص = ٦ × ٣ = ١٨ سم^{٢}

---

١٣ نفرض العددين هما س، ص

∴ س + ص = ٧

∴ س = ٧ − ص ← ①

س^{٢} + ص^{٢} = ٣٧ ← ②

بالتعويض من ① فى ②

(٧ − ص)^{٢} + ص^{٢} = ٣٧

٤٩ − ١٤ ص + ص^{٢} + ص^{٢} = ٣٧ ٢ ص^{٢} − ١٤ ص + ٤٩ − ٣٧ = ٠

٢ ص^{٢} − ١٤ ص + ١٢ = ٠ بالقسمة على (٢)

∴ ص^{٢} − ٧ ص + ٦ = ٠ ∴ (ص − ٦)(ص − ١) = ٠

∴ ص = ٦ أو ص = ١

عندما ص = ٦ ∴ س = ١

عندما ص = ١ ∴ س = ٦

∴ العددان هما ٦ ، ١

١٤، ١٥ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

---

١٦ ص = ٢ س^{٢} بالتعويض فى ٥ س − ٢ ص = ١

∴ ٥ س − ٤ س^{٢} = ١ ∴ ٤ س^{٢} − ٥ س + ١ = ٠

∴ (٤ س − ١)(س − ١) = ٠

∴ ٤ س − ١ = ٠ أو س − ١ = ٠

∴ س = $\frac{١}{٤}$ أو س = ١

∴ ص = ٢ $\left(\frac{١}{٤}\right)^{٢}$ أو ص = ٢ (١)^{٢}

∴ ص = $\frac{١}{٨}$ أو ص = ٢

∴ إحداثى هذه النقطة: $\left(\frac{١}{٤}، \frac{١}{٨}\right)$، (١، ٢)

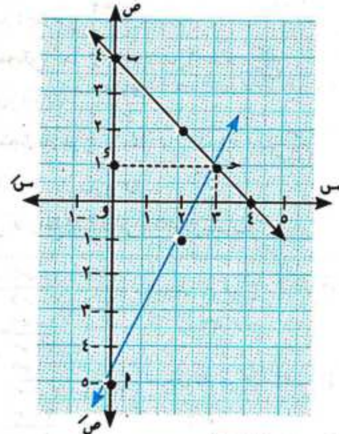
---

١٧ ٢ س − ص = ٥ ، س + ص = ٤

∴ ص = ٢ س − ٥ ص = ٤ − س

س	٠	٢	٣
ص	−٥	−١	١

س	٠	٢	٤
ص	٤	٢	٠



من الرسم ∴ م.ح = {(٣، ١)}

طول قاعدة المثلث $\overline{أب}$ = ٩ وحدات طولية

وارتفاع المثلث $\overline{حد}$ = ٣ وحدات طولية

∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × ٩ × ٣ = $\frac{٢٧}{٢}$ وحدة مساحة = ١٣,٥ وحدة مساحة

إجابة أسئلة هامة على الوحدة الثانية من امتحانات المحافظات السابقة

١

١ {٠}	٢ ∅	٣ {٠، ١}
٤ {٠، ١}	٥ ∅	٦ {٤، −٤}
٧ {٢، ٣}	٨ {١، −٢}	٩ {٠، −٣، ٣}
١٠ ح	١١ {١}	١٢ {٣}
١٣ {٢، −٢}	١٤ −٤	١٥ {٣}
١٦ {−١}	١٧ −٢	١٨ {٢، −١}
١٩ ح	٢٠ ح − {١}	٢١ ح − {٥}
٢٢ ح − {٠}	٢٣ ح − {−٥}	٢٤ ح
٢٥ ح − {٠}	٢٦ {١، ٦}	٢٧ ح − {٥}
٢٨ ح − {−٢، ٣}	٢٩ −٥	٣٠ ح − {−١}
٣١ ح − {١، −١}	٣٢ $\frac{\text{س}}{\text{س}^٢ + ١}$	٣٣ ح − {٥، ٣}
٣٤ ح − {٣}	٣٥ ح − {٣، ٥}	٣٦ ح − {−١، ٣}
٣٧ غير معرف	٣٨ ح − {−٢، ٢، ٣}	٣٩ ح − {١}
٤٠ ٢أ − ١	٤١ ٣	٤٢ ٨
٤٣ $\frac{-٢}{\text{س} + ١}$	٤٤ −١	٤٥ ٥
٤٦ ٥	٤٧ −٣	٤٨ $\frac{٣\text{س}}{\text{س} + ١}$
٤٩ $\frac{-\text{س}}{٢}$		

٢

١ $\text{ن}_١(\text{س}) = \frac{(\text{س} - ١)(\text{س}^٢ + \text{س} + ١)}{\text{س}(\text{س}^٢ + \text{س} + ١)}$

المجال ن₁ هو ح − {٠} ، $\text{ن}_١(\text{س}) = \frac{\text{س} - ١}{\text{س}}$ ← (١)

$\text{ن}_٢(\text{س}) = \frac{(\text{س} - ١)(\text{س}^٢ + ١)}{\text{س}(\text{س}^٢ + ١)}$

المجال ن₂ هو ح − {٠} ، $\text{ن}_٢(\text{س}) = \frac{\text{س} - ١}{\text{س}}$ ← (٢)

من (١) ، (٢) ∴ $\text{ن}_١ = \text{ن}_٢$

٢ ∵ $\text{ن}_١(\text{س}) = \frac{٢\text{س}}{٢(\text{س} + ٤)}$

∴ المجال ن₁ هو ح − {−٤} ، $\text{ن}_١(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س} + ٤}$ ← (١)

، ∵ $\text{ن}_٢(\text{س}) = \frac{\text{س}(\text{س} + ٤)}{(\text{س} + ٤)^٢}$

∴ المجال ن₂ هو ح − {−٤} ، $\text{ن}_٢(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س} + ٤}$ ← (٢)

من (١) ، (٢) ∴ $\text{ن}_١ = \text{ن}_٢$

من ٣ إلى ٥ راجع إجابتك في «100% إجابات»

---

٣ $\text{ن}_١(\text{س}) = \frac{(\text{س} + ٢)(\text{س} - ٢)}{(\text{س} + ٣)(\text{س} - ٢)}$ ، المجال ن₁ هو ح − {−٣ ، ٢}

$\text{ن}_١(\text{س}) = \frac{\text{س} + ٢}{\text{س} + ٣}$ ← (١)

$\text{ن}_٢(\text{س}) = \frac{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٢)}{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)}$ ، المجال ن₂ هو ح − {٣ ، −٣}

$\text{ن}_٢(\text{س}) = \frac{\text{س} + ٢}{\text{س} + ٣}$ ← (٢)

من (١) ، (٢)

∵ $\text{ن}_١(\text{س}) = \text{ن}_٢(\text{س})$ ، مجال ن₁ ≠ مجال ن₂

∴ $\text{ن}_١ \neq \text{ن}_٢$

---

٤ $\frac{\text{س} - ٤}{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٣)}$ $\frac{٢\text{س}}{\text{س}(\text{س} + ٣)(\text{س} - ٣)}$

مجال الكسر الأول هو ح − {٢ ، ٣} مجال الكسر الثانى هو ح − {٠ ، −٣ ، ٣}

∴ المجال المشترك للكسرين الجبريين = ح − {٢ ، ٣ ، ٠ ، −٣}

---

٥ $\text{ن}_١(\text{س}) = \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)}{(\text{س} + ٣)(\text{س} - ٢)}$ ، $\text{ن}_٢(\text{س}) = \frac{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٢)}{(\text{س} - ٣)(\text{س} + ٣)}$

مجال ن₁ هو ح − {−٣ ، ٢} ، مجال ن₂(س) هو ح − {٣ ، −٣}

$\text{ن}_١(\text{س}) = \frac{\text{س} + ٢}{\text{س} + ٣}$ ، $\text{ن}_٢(\text{س}) = \frac{\text{س} + ٢}{\text{س} + ٣}$

∴ $\text{ن}_١(\text{س}) \neq \text{ن}_٢(\text{س})$

المجال المشترك هو ح − {−٣ ، ٢ ، ٣}

٦

١ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٥}{\text{س} - ٣} + \frac{٤}{-(\text{س} - ٣)}$

المجال هو ح − {٣}

$\text{ن}(\text{س}) = \frac{٥ - ٤}{\text{س} - ٣} = \frac{١}{\text{س} - ٣}$

٢ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س} + ٣} + \frac{٣\text{س}}{\text{س}(\text{س} + ٣)}$

المجال هو ح − {−٣ ، ٠}

$\text{ن}(\text{س}) = \frac{٢}{\text{س} + ٣} + \frac{٣}{\text{س} + ٣} = \frac{٥}{\text{س} + ٣}$

من ٣ إلى ٥ راجع إجابتك في «100% إجابات»

٦ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}^٢ + \text{س} + ١}{(\text{س} - ١)(\text{س}^٢ + \text{س} + ١)} - \frac{\text{س}(\text{س} + ١)}{(\text{س} + ١)(\text{س} - ١)}$

∴ المجال هو ح − {١ ، −١}

∴ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{١}{\text{س} - ١} - \frac{\text{س}}{\text{س} - ١} = \frac{١ - \text{س}}{\text{س} - ١} = \frac{-(\text{س} - ١)}{(\text{س} - ١)} = -١$

٧ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٣)}{(\text{س} - ٣)(\text{س} - ٣)} - \frac{-(\text{س} - ٤)}{\text{س} - ٣}$

المجال هو ح − {٣}

∴ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ٢}{\text{س} - ٣} + \frac{\text{س} - ٤}{\text{س} - ٣} = \frac{٢\text{س} - ٦}{\text{س} - ٣} = \frac{٢(\text{س} - ٣)}{\text{س} - ٣} = ٢$

٨ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}(\text{س} + ١)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ١)} - \frac{٢(\text{س} + ٢)}{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ٢)}$

المجال هو ح − {٢ ، −١ ، −٢}

∴ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س} - ٢} - \frac{٢}{\text{س} - ٢} = \frac{\text{س} - ٢}{\text{س} - ٢} = ١$

٩ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٣(\text{س} - ٥)}{\text{س} + ٣} \times \frac{٤(\text{س} + ٣)}{٥(\text{س} - ٥)}$

المجال هو ح − {−٣ ، ٥}

∴ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٣(\text{س} - ٥)}{\text{س} + ٣} \times \frac{٤(\text{س} + ٣)}{٥(\text{س} - ٥)} = \frac{١٢}{٥}$

١٠ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س} - ١)(\text{س}^٢ + \text{س} + ١)}{\text{س} - ١} \times \frac{\text{س} + ٣}{(\text{س}^٢ + \text{س} + ١)}$

المجال هو ح − {١}

∴ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س} - ١)(\text{س}^٢ + \text{س} + ١)}{\text{س} - ١} \times \frac{\text{س} + ٣}{\text{س}^٢ + \text{س} + ١} = \text{س} + ٣$

١١ $ن(س) = \frac{٦}{(س-٣)(س+٣)} \times \frac{١}{س+٣}$

المجال هو ح − {٣ ، −٣}

$\therefore ن(س) = \frac{٦}{(س-٣)(س+٣)^{٢}}$

١٢ ، ١٣ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

١٤ $ن(س) = \frac{س(س+٢)}{(س-٢)(س^{٢}+٢س+٤)} \div \frac{س+٢}{س^{٢}+٢س+٤}$

المجال هو ح − {٢ ، −٢}

$\therefore ن(س) = \frac{س(س+٢)}{(س-٢)(س^{٢}+٢س+٤)} \times \frac{س^{٢}+٢س+٤}{(س+٢)} = \frac{س}{س-٢}$

١٥ $ن(س) = \frac{(س-١)(س^{٢}+س+١)}{(س-١)^{٢}} \div \frac{س^{٢}+س+١}{٢(س-١)}$

المجال هو ح − {١}

$\therefore ن(س) = \frac{(س-١)(س^{٢}+س+١)}{(س-١)^{٢}} \times \frac{٢(س-١)}{س^{٢}+س+١} = ٢$

١٦ $ن(س) = \frac{س-٥}{(س+٣)(س-٥)} \div \frac{٨}{٢(س+٣)}$

المجال هو ح − {−٣ ، ٥}

$\therefore ن(س) = \frac{س-٥}{(س+٣)(س-٥)} \times \frac{٢(س+٣)}{٨} = \frac{٢}{٨} = \frac{١}{٤}$

---

٧ $ن(س) = \frac{٣س}{(س-٢)(س+١)} + \frac{س-١}{-(س+١)(س-١)}$

مجال ن = ح − {٢ ، −١ ، ١}

$ن(س) = \frac{٣س}{(س-٢)(س+١)} - \frac{١}{س+١}$

$ن(س) = \frac{٣س-(س-٢)}{(س-٢)(س+١)}$

$ن(س) = \frac{٣س-س+٢}{(س-٢)(س+١)} = \frac{٢س+٢}{(س-٢)(س+١)} = \frac{٢(س+١)}{(س-٢)(س+١)} = \frac{٢}{س-٢}$

---

٨ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

---

٩ $ن(س) = \frac{(س^{٢}+٢س+٤)}{(س-٢)(س^{٢}+٢س+٤)} - \frac{-(س-٣)(س+٣)}{(س+٣)(س-٢)}$

المجال هو ح − {٢ ، −٣}

$ن(س) = \frac{١}{س-٢} + \frac{س-٣}{س-٢}$

$ن(س) = \frac{١+س-٣}{س-٢} = \frac{س-٢}{س-٢} = ١$

---

١٠ ، ١١ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

---

١٢ $ن(س) = \frac{(س-٣)(س-٢)}{(س-٢)(س-٢)} \div س(س-٣)$

مجال ن هو ح − {٢ ، ٠ ، ٣}

$ن(س) = \frac{(س-٣)(س-٢)}{(س-٢)(س-٢)} \times \frac{١}{س(س-٣)}$

$ن(س) = \frac{١}{س(س-٢)}$

∴ ن(٣) غير معرف لأن ٣ ∉ مجال ن

---

١٣ ∵ $\frac{ك-٥-س^{٢}}{س^{٢}-٣س}$ معكوس جمعى للكسر $\frac{س}{س-٣}$

$\therefore \frac{ك-٥-س^{٢}}{س(س-٣)} + \frac{س}{(س-٣)} =$ صفر $\therefore \frac{ك-٥-س^{٢}+س^{٢}}{س(س-٣)} = ٠$

$\therefore \frac{ك-٥}{س(س-٣)} = ٠$ ∴ ك − ٥ = ٠ ⇐ **ك = ٥**

---

١٤ ∵ مجال ن هو ح − {٠ ، ٤}   ∴ ٤ + أ = صفر

∴ أ = −٤ $\therefore ن(س) = \frac{ب}{س} + \frac{٩}{س-٤}$

∵ ن(٥) = ٢ $\therefore \frac{ب}{٥} + \frac{٩}{٥-٤} = ٢$

$\frac{ب}{٥} + ٩ = ٢$ $\therefore \frac{ب}{٥} = -٧$

∴ ب = −٣٥

---

١٥ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

---

١٦ ∵ مجال ن هو ح − {٣}   ∴ أصفار المقام هى ٣

∴ ٢(٣) − ب = ٠   ∴ ٦ − ب = ٠   ∴ ب = ٦

---

١٧ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

---

١٨ ١ $ن(س) = \frac{س(س-٢)}{(س-٣)(س-٢)}$

مجال $ن^{-١}$ = ح − {٠ ، ٣ ، ٢}

$\therefore ن^{-١}(س) = \frac{(س-٣)(س-٢)}{س(س-٢)} = \frac{س-٣}{س}$

٢ $ن(س) = \frac{(س+٢)(س-٢)}{(س-٢)(س-١)}$

∴ مجال $ن^{-١}$ = ح − {٢ ، ١ ، −٢}

$\therefore ن^{-١}(س) = \frac{(س-٢)(س-١)}{(س+٢)(س-٢)} = \frac{(س-١)}{(س+٢)}$

٣ $ن(س) = \frac{(س+٢)(س-٢)}{(س-٢)(س^{٢}+٢س+٤)}$

∴ مجال $ن^{-١}$ = ح − {٢ ، −٢}

$\therefore ن^{-١}(س) = \frac{(س-٢)(س^{٢}+٢س+٤)}{(س+٢)(س-٢)} = \frac{س^{٢}+٢س+٤}{س+٢}$

٤ ، ٥ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

---

١٩ ، ٢٠ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

---

٢١ ١ $ن(س) = \frac{س(س-٢)}{(س+٢)(س-٢)}$

مجال $ن^{-١}$ = ح − {−٢ ، ٢ ، ٠}

$ن^{-١}(س) = \frac{(س+٢)(س-٢)}{س(س-٢)} = \frac{س+٢}{س}$

٢ ∵ $ن^{-١}(س) = ٣$ $\therefore \frac{س+٢}{س} = ٣$

∴ ٣س = س + ٢   ∴ ٢س = ٢

∴ س = ١

إجابة أسئلة هامة على الوحدة الثالثة من امتحانات المحافظات السابقة

١
١ صفر ٢ ١ ٣ صفر ٤ ل(أ) ٥ ١
٦ ٠,٧ ٧ $\frac{١}{٣}$ ٨ $\frac{١}{٣}$ ٩ ١٠٪ ١٠ صفر
١١ $\frac{٣}{٧}$ ١٢ $\frac{١}{٣}$ ١٣ $\frac{١}{٤}$ ١٤ ٠,٤ ١٥ ٠,٤
١٦ صفر ١٧ $\frac{١}{٢}$ ١٨ ٠,٦ ١٩ $\frac{٣}{٤}$ ٢٠ ٠,٨
٢١ $\frac{١}{٣}$ ٢٢ ف ٢٣ $\frac{١}{٢}$

---

٢ ١ $\frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$ ٢ $\frac{١}{٦}$ ٣ ل(أ′) $= \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

---

٣ ١ ل(أ ∩ ب) = صفر
٢ ل(أ) = ١ − ل(أ′) = ١ − ٠,٥ = ٠,٥
٣ ل(ب) = ل(أ ∪ ب) − ل(أ) = ٠,٨ − ٠,٥ = ٠,٣

---

٤ ١ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب) = ٠,٣ + ٠,٤ − صفر = ٠,٧
٢ ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب) = ٠,٣ − صفر = ٠,٣

---

٥ ١ ل(أ − ب) = ل(أ) − ل(أ ∩ ب) = ٠,٧ − ٠,٣ = ٠,٤
٢ ل(ب′) = ١ − ل(ب) = ١ − ٠,٤ = ٠,٦
٣ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب) = ٠,٧ + ٠,٤ − ٠,٣ = ٠,٨

---

٦ ١ ل(أ ∪ ب) $= \frac{٢}{٣} + \frac{١}{٢} - \frac{١}{٦} = \frac{٦}{٦} = ١$
٢ ل(أ − ب) $= \frac{٢}{٣} - \frac{١}{٦} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

---

٧ ١ ل(أ) = ل(أ ∪ ب) + ل(أ ∩ ب) − ل(ب) $= \frac{١}{٣}$ + صفر $- \frac{١}{١٢} = \frac{٣}{١٢} = \frac{١}{٤}$
٢ ل(أ) = ل(أ ∪ ب) + ل(ب) − ل(ب) = ل(أ ∪ ب) $= \frac{١}{٣}$

---

٨ ١ ل(أ ∩ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∪ ب) $= \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} - \frac{١٧}{٢٤} = \frac{٣}{٢٤} = \frac{١}{٨}$
٢ ل(أ − ب) $= \frac{١}{٢} - \frac{١}{٨} = \frac{٣}{٨}$

---

٩ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

---

١٠ ١ ∵ ل(أ ∩ ب) $= \frac{١}{٨}$ ∴ ل(أ ∪ ب) $= \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٨} = \frac{١٧}{٢٤}$
٢ ∵ أ ، ب حدثان متنافيان ∴ ل(أ ∩ ب) = صفر
∴ ل(أ ∪ ب) $= \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} = \frac{٥}{٦}$

---

١١ ∵ ل(أ) = ل(أ′) ∴ ل(أ) $= \frac{١}{٢}$
١ ل(أ ∪ ب) $= \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٥} = \frac{١٩}{٣٠}$
٢ ل(ب − أ) $= \frac{١}{٣} - \frac{١}{٥} = \frac{٢}{١٥}$

---

١٢ ١ ل(أ ∪ ب) = ٠,٤ + ٠,٥ − ٠,٢ = ٠,٧
٢ ل(أ − ب) = ٠,٤ − ٠,٢ = ٠,٢
٣ ل(ف − ب) = ل(ب′) = ١ − ٠,٥ = ٠,٥

---

١٣ ل(أ ∩ ب) = ٠,٧ − ٠,٥ = ٠,٢

١٤ ١ ل(أ′) = ١ − ل(أ) $= ١ - \frac{٣}{٨} = \frac{٥}{٨}$
٢ ل(ب ∩ أ)′ = ١ − ل(ب ∩ أ) $= ١ - \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}$
٣ ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) − ل(أ ∩ ب) $= \frac{٣}{٨} + \frac{١}{٢} - \frac{١}{٤} = \frac{٥}{٨}$

إجابة مهارات تراكمية أساسية فى الجبر والاحتمال

١ ٢ ٢ صفر ٣ ١٦ ٤ ٤
٥ ±٦ ٦ $\frac{١}{٢}$ ٧ س = ٧ ٨ $\frac{١}{\sqrt{٣}}$
٩ ٥ ١٠ ±٥ ١١ '٢ ١٢ صفر
١٣ ٣ ١٤ الثانية ١٥ ٢ ١٦ ٢
١٧ الثالث ١٨ ٥٠ ١٩ ٤٥ ٢٠ ∅
٢١ ١٥ ٢٢ ٢٢ ٢٣ ٩ − س ٢٤ ٧٢
٢٥ $\frac{ن}{ن + ١}$ ٢٦ ١٠٠ ٢٧ = ٢٨ ±٢٥
٢٩]−∞ ، ٢[٣٠ ٢ ٣١ ٥ ٣٢ ٥
٣٣ $\frac{٢}{٣}$ ٣٤ $\frac{١}{٥}$ ٣٥ ١ ٣٦ ٥
٣٧ −٤٠ ٣٨ ٣ ٣٩ $\sqrt{٢} - ١$ ٤٠ ^٣

إجابة نماذج اختبارات الجبر والاحتمال من الكتاب المدرسى

النموذج الأول

١ ١ ح − {١} ٢ صفر ٣ ٥
٤ ١ : ٤ ٥ س = صفر ٦ $\frac{١}{٣}$

---

٢ (أ) أ = ٢ ، ب = −٥ ، حـ = ١
∴ س $= \frac{٥ \pm \sqrt{٢٥ - ٤(٢)(١)}}{٢(٢)} = \frac{٥ \pm \sqrt{١٧}}{٤}$
∴ م.ح = {٢,٣ ، ٠,٢}
(ب) ن(س) $= \frac{(س - ٣)}{(س - ٣)(س - ٤)} - \frac{٤}{س(س - ٤)}$ مجال ن = ح − {٣ ، ٤ ، ٠}
ن(س) $= \frac{١}{(س - ٤)} - \frac{٤}{س(س - ٤)} = \frac{س - ٤}{س(س - ٤)}$
∴ ن(س) $= \frac{١}{س}$

من **٣** إلى **٥** راجع إجابتك فى «100% إجابات»

النموذج الثانى

١ ١ {(٣ ، ٤)} ٢ ∅ ٣ صفر ٤ ح − {−٢ ، ٣} ٥ نقطة الأصل

---

٢ (أ) أ = ٣ ، ب = −٥ ، حـ = ١
∴ س $= \frac{٥ \pm \sqrt{٢٥ - ٤(٣)(١)}}{٢ \times ٣} = \frac{٥ \pm \sqrt{١٣}}{٦}$
∴ م.ح = {١,٤٣ ، ٠,٢٣}
(ب) ن(س) $= \frac{(س - ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{(س + ٣)(س - ٢)} \times \frac{(س + ٣)}{(س^٢ + ٢س + ٤)}$
مجال ن = ح − {−٣ ، ٢} ∴ ن(س) = ١

من **٣** إلى **٥** راجع إجابتك فى «100% إجابات»

النموذج الثالث (لطلاب الدمج)

راجع إجابتك فى «100% إجابات»

إجابة امتحانات المحافظات على الجبر والاحتمال ٢٠٢٤ / ٢٠٢٥

١ محافظة القاهرة

١

(1) ٣ (2) -١ (3) {٤}

(4) ٥ (5) ح (6) $\frac{١}{٢}$

(7) ١ (8) يوجد عدد لا نهائى من الحلول

(9) أ ∩ ب

٢

(1) $٣\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ١ = ٠$

∴ أ = ٣ ، ب = -٥ ، حـ = ١

∴ $\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^٢ - ٤\text{أحـ}}}{٢\text{أ}} = \frac{٥ \pm \sqrt{١٣}}{٦}$

∴ م.ح = {١٫٤ ، ٠٫٢}

(2) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س}+٣)(\text{س}-٢)}{(\text{س}-٢)(\text{س}^٢+٢\text{س}+٤)} \times \frac{(\text{س}^٢+٢\text{س}+٤)}{(\text{س}+٣)}$

∴ مجال ن = ح - {٢ ، -٣}

∴ ن(س) = ١

(3) أولًا: ل(أ ∩ ب)` = ١ - ل(أ ∩ ب)

∴ ل(أ ∩ ب)` = $١ - \frac{١}{٣} = \frac{٢}{٣}$

ثانيًا: ل(أ ∪ ب) = ل(أ) + ل(ب) - ل(أ ∩ ب)

∴ ل(أ ∪ ب) = $\frac{١}{٢} + \frac{٢}{٣} - \frac{١}{٣} = \frac{٥}{٦}$

(4) (أ) $٢\text{س} - \text{ص} = ٣$ (1)

$\text{س} + \text{ص} = ٩$ (2) بالجمع

$٣\text{س} = ١٢$

∴ $\text{س} = \frac{١٢}{٣} = ٤$ بالتعويض فى (2)

∴ ص = ٩ - ٤ = ٥

∴ م.ح = {(٤ ، ٥)}

(5) نفرض أن العددين هما س ، ص

س - ص = ٢ (1)

س ص = ٢٤ (2)

∴ س = ص + ٢ (3)

بالتعويض من (3) فى (2)

∴ ص (ص + ٢) - ٢٤ = ٠

$\text{ص}^٢ + ٢\text{ص} - ٢٤ = ٠$

∴ (ص + ٦) (ص - ٤) = ٠

∴ ص = -٦ مرفوض أو ص = ٤

عندما ص = ٤ ∴ س = ٤ + ٢ = ٦

∴ العددان هما ٦ ، ٤

(6) $\text{ن}_١(\text{س}) = \frac{(\text{س}-٣)(\text{س}+٣)}{(\text{س}+٣)}$

∴ مجال $\text{ن}_١$ = ح - {-٣} ، $\text{ن}_١(\text{س}) = \text{س} - ٣$

$\text{ن}_٢(\text{س}) = \frac{٢(\text{س}-٣)}{٢}$

∴ مجال $\text{ن}_٢$ = ح ، $\text{ن}_٢(\text{س}) = \text{س} - ٣$

∴ $\text{ن}_١ \neq \text{ن}_٢$ لأن مجال $\text{ن}_١$ ≠ مجال $\text{ن}_٢$

∴ $\text{ن}_١(\text{س}) = \text{ن}_٢(\text{س})$ لجميع قيم س

التى تنتمى إلى المجال المشترك وهو ح - {٣}

(7) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{١}{(\text{س}+٢)} + \frac{(\text{س}+٢)}{(\text{س}+٢)^٢}$

∴ مجال ن = ح - {-٢}

∴ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{١}{(\text{س}+٢)} + \frac{١}{(\text{س}+٢)}$

∴ $\text{ن}(\text{س}) = \frac{٢}{(\text{س}+٢)}$

٢ محافظة الجيزة

١

(1) {٢} (2) ح - {٣ ، -٣} (3) (٠ ، حـ)

(4) ل(ب) (5) ٢ (6) <

(7) ٣ ، ٥ (8) -٥ (9) ح - {٤}

٢

(1) $٣\text{س} + ٢\text{ص} = ٤$ (1)

$\text{س} - ٣\text{ص} = ٥$ (2) × (-٣)

$٣\text{س} + ٢\text{ص} = ٤$

$-٣\text{س} + ٩\text{ص} = -١٥$ بالجمع

∴ ١١ص = -١١ ∴ ص = -١

بالتعويض فى (1) عن قيمة ص

∴ ٣س - ٢ = ٤ ∴ ٣س = ٦ ∴ س = ٢

∴ م.ح = {(٢ ، -١)}

(2) $\text{ن}(\text{س}) = \frac{(\text{س}-٢)(\text{س}^٢+٢\text{س}+٤)}{(\text{س}+٣)(\text{س}-٢)} + \frac{٢(\text{س}+٣)}{(\text{س}^٢+٢\text{س}+٤)}$

∴ مجال ن = ح - {(-٣ ، ٢)}

∴ ن(س) = ٢

(3) $\text{ن}_١(\text{س}) = \frac{٥\text{س}}{٥(\text{س}+٥)}$ ∴ مجال $\text{ن}_١$ = ح - {(-٥)}

∴ $\text{ن}_١(\text{س}) = \frac{\text{س}}{(\text{س}+٥)}$

∴ $\text{ن}_٢(\text{س}) = \frac{\text{س}(\text{س}+٥)}{(\text{س}+٥)(\text{س}+٥)}$

∴ مجال $\text{ن}_٢$ = ح - {(-٥)}

∴ $\text{ن}_٢(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}+٥}$

∴ مجال $\text{ن}_١$ = مجال $\text{ن}_٢$ ، $\text{ن}_١(\text{س}) = \text{ن}_٢(\text{س})$

∴ $\text{ن}_١ = \text{ن}_٢$

٤ (١) ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

∴ ل (أ ∪ ب) = ٠,٧ + ٠,٥ − ٠,٣ = ٠,٩

(٢) ل (ب − أ) = ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

∴ ل (ب − أ) = ٠,٥ − ٠,٣ = ٠,٢

٥ س² − ٦س + ٤ = ٠

∴ أ = ١ ، ب = −٦ ، جـ = ٤

∴ س = (−ب ± √(ب² − ٤أجـ)) / ٢أ = (٦ ± √٢٠) / ٢

∴ س = ٣ ± √٥

∴ م.ح = {٥,٢ ، ٠,٨}

٦ ∵ س − ص = ٠

∴ س = ص (١) ، س ص = ١٦ (٢)

بالتعويض (١) ، (٢)

∴ س² = ١٦

∴ س² = ± ٤ بالتعويض فى (١)

عندما س = ٤ ∴ ص = ٤

عندما س = −٤ ∴ ص = −٤

∴ م.ح = {(٤ ، ٤)، (−٤ ، −٤)}

٧ ن(س) = (س + ٢) / ((س + ٢)(س + ١)) = س(س − ١) / ((س − ١)(س + ١))

∴ مجال ن = ح − {−٢ ، −١ ، ١}

∴ ن(س) = ١ / (س + ١) + س / (س + ١) = (س + ١) / (س + ١)

∴ ن(س) = ١

٣ محافظة الإسكندرية

١

١ {٢}	٢ {(٣ ، ٤)، (٣ ، −٤)}	٣ صفر
٤ {(٣ ، −٢)}	٥ ح − {١}	٦ ٠,٤
٧ ل (ب)	٨ (٣ − س) / (س + ٢)	٩]٣ ، ٥[

---

٢ ١ س² − ٥س + ٢ = ٠ ∴ أ = ١ ، ب = −٥ ، جـ = ٢

∴ س = (−ب ± √(ب² − ٤أجـ)) / ٢أ = (٥ ± √١٧) / ٢

∴ س = (٥ + ٤,١٢) / ٢ أو س = (٥ − ٤,١٢) / ٢

٢ س + ص = ٧ (١)

س − ص = ٣ (٢) بالجمع

٢س = ١٠

∴ س = ٥ بالتعويض فى (١)

∴ ص = ٧ − ٥ = ٢ ∴ م.ح = {(٥ ، ٢)}

٣ ن₁(س) = س² / (س(س − ١))

∴ مجال ن₁ = ح − {٠ ، ١}

∴ ن₁(س) = س / (س − ١)

ن₂(س) = س²(س − ١) / (س(س − ١)(س − ١))

∴ مجال ن₂ = ح − {٠ ، ١}

∴ ن₂(س) = س / (س − ١)

∴ ن₂(س) = س / (س − ١)

∴ مجال ن₁ = مجال ن₂ ، ن₁(س) = ن₂(س)

٤ ن(س) = (س − ٥) / ((س − ٥)(س + ٣)) × ٢(س + ٣) / ٨

∴ مجال ن = ح − {٥ ، −٣}

∴ ن(س) = ١ / ٤

٥ ن(س) = ٣(س − ٣) / ((س − ٣)(س − ٢))

∴ مجال ن⁻¹ = ح − {٣ ، −٢}

∴ ن⁻¹(س) = (س − ٢) / ٣

ن⁻¹(٣) غير معرفة لأن ٣ ∉ مجال ن⁻¹

٦ (١) ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)

∴ ل (أ ∪ ب) = ٠,٤ + ٠,٥ − ٠,٢ = ٠,٧

(٢) احتمال عدم وقوع أ = ل (أ´)

∵ ل (أ´) = ١ − ل (أ)

∴ ل (أ´) = ١ − ٠,٤ = ٠,٦

٧ ن(س) = س(س + ٤) / ((س − ٤)(س + ٤)) + س(س − ٣) / ((س − ٣)(س − ٤))

∴ مجال ن = ح − {٤ ، −٤ ، ٣}

∴ ن(س) = س / (س − ٤) + ١ / (س − ٤)

∴ ن(س) = (س + ١) / (س − ٤)

٤ محافظة المنوفية

١ (أ) ١ ∅   ٢ صفر   ٣ ∅

(ب) س − ص = ٧ (١)

، س ص = ١٨ (٢)

∴ س = ص + ٧ (٣)

بالتعويض فى (٢)

∴ ص (ص + ٧) − ١٨ = ٠

ص² + ٧ص − ١٨ = ٠   (ص − ٢)(ص + ٩) = ٠

∴ ص = ٢ أو ص = −٩

عندما ص = ٢   ∴ س = ٢ + ٧ = ٩

عندما ص = −٩   ∴ س = −٩ + ٧ = −٢

∴ م.ح = {(٩، ٢)، (−٢، −٩)}

---

٢ (أ) ١ ٥   ٢ ٤   ٣ ح − {(−٣، ١)}

(ب) $ن(س) = \frac{س^٢ + ٢س + ٤}{(س − ٢)(س^٢ + ٢س + ٤)} + \frac{(س + ٢)(س − ١)}{(س − ٢)(س + ٢)}$

∴ مجال ن = ح − {٢، −٢}

∴ $ن(س) = \frac{١}{س − ٢} + \frac{س − ١}{س − ٢} = \frac{١ + س − ١}{(س − ٢)}$

∴ $ن(س) = \frac{س}{(س − ٢)}$

---

٣ (أ) ١ ٠,٥   ٢ {−١، ٤}   ٣ ح − {−١}

(ب) $ن_١(س) = \frac{٢س}{٢(س + ٤)}$

∴ مجال $ن_١$ = ح − {−٤}، $ن_١(س) = \frac{س}{س + ٤}$

$ن_٢(س) = \frac{س(س + ٤)}{(س + ٤)^٢}$

∴ مجال $ن_٢$ = ح − {−٤}، $ن_٢(س) = \frac{س}{س + ٤}$

∵ مجال $ن_١$ = مجال $ن_٢$ ، $ن_١(س) = ن_٢(س)$

∴ $ن_١ = ن_٢$ (وهو المطلوب)

---

٤ (أ) ١ ل (أ ∪ ب) = $\frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} − \frac{١}{٨} = \frac{٥}{٨}$

٢ ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب) = $\frac{١}{٢} − \frac{١}{٨} = \frac{٣}{٨}$

٣ ل (ب)´ = ١ − ل (ب)

∴ ل (ب)´ = $١ − \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}$

(ب) $ن(س) = \frac{٢س(س + ٢)}{(س − ٢)(س + ٢)} \times \frac{(س − ٢)}{٢س(س + ٣)}$

∵ المجال = ح − {٢، −٢، −٣}

∴ $ن(س) = \frac{س}{(س + ٣)}$

---

٥ (أ) ٢س − ص = ٣ (١)

س + ٢ص = ٤ (٢)

بضرب المعادلة (١) × ٢

∴ ٤س − ٢ص = ٦ (٣)

س + ٢ص = ٤ (٤)

بالجمع

٥س = ١٠

∴ س = ٢

بالتعويض فى (٢)

∴ ٢ + ٢ص = ٤   ∴ ٢ص = ٢

∴ ص = ١

∴ م.ح = {(٢، −١)}

(ب) س² − ٢س − ٤ = ٠

∴ أ = ١ أو ب = −٢ ، ج = −٤

∴ $س = \frac{−ب \pm \sqrt{ب^٢ − ٤أج}}{٢أ} = \frac{٢ \pm \sqrt{٢٠}}{٢}$

∴ $س = ١ \pm \sqrt{٥}$

∴ م.ح = {٣,٢٤ ، −١,٢٤}

٥ محافظة الغربية

١ ١ صفر   ٢ ح − {٠}   ٣ ٥

٤ ٤   ٥ ١   ٦ −٢

٧ ح − {٦}   ٨ $\frac{١}{٤}$ ٩ {٤}

---

٢ ١ ل (أ) = ١ − ل (أ)´

∴ ل (أ) = ١ − ٠,٣ = ٠,٧

∵ ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب)

∴ ل (أ − ب) = ٠,٧ − ٠,٣ = ٠,٤

٢ س + ص = ٣

∴ ص = ٣ − س (١)

س ص = ٢ (٢)

بالتعويض (١) فى (٢)

∴ س (٣ − س) − ٢ = ٠

∴ ٣س − س² − ٢ = ٠

∴ س² − ٣س + ٢ = ٠

(س − ١)(س − ٢) = ٠

∴ س = ١ أو س = ٢

عندما س = ١   ∴ ص = ٣ − ١ = ٢

عندما س = ٢   ∴ ص = ٣ − ٢ = ١

∴ م.ح = {(١، ٢)، (٢، ١)}

٣ ∵ (٣ ، -١) حل للمعادلة أ س + ب ص - ٥ = ٠

∴ ٣أ - ب = ٥ (١)

∵ (٣ ، -١) حل للمعادلة ٣ أ س + ب ص = ١٧

∴ ٩أ - ب = ١٧ (٢)

∴ ٣أ - ب = ٥ (١)

٩أ - ب = ١٧ (٢)

بطرح (١) من (٢)

∴ ٦أ = ١٢

∴ أ = ٢ بالتعويض في (١)

∴ ٦ - ب = ٥

∴ ب = ٦ - ٥ = ١

∴ م.ح = {(٢ ، ١)}

٤ ٢س^{٢} - ٤س + ١ = ٠

∴ أ = ٢ ، ب = -٤ ، جـ = ١

∴ س = $\frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ أ جـ}}{٢أ}$ = $\frac{٤ \pm \sqrt{٨}}{٤}$

∴ س = $\frac{٢ \pm \sqrt{٢}}{٢}$

∴ م.ح = {١,٧١ ، ٠,٢٩}

٥ ن$_{١}$(س) = $\frac{س}{س(س - ١)}$ ، مجال ن$_{١}$ = ح - {٠ ، ١}

∴ ن$_{١}$(س) = $\frac{١}{(س - ١)}$

ن$_{٢}$(س) = $\frac{س^{٢} + س + ١}{(س - ١)(س^{٢} + س + ١)}$ ، مجال ن$_{٢}$ = ح - {١}

∴ ن$_{٢}$(س) = $\frac{١}{(س - ١)}$

∵ مجال ن$_{١}$ ≠ مجال ن$_{٢}$ ، ن$_{١}$(س) = ن$_{٢}$(س)

فإن ن$_{١}$ ≠ ن$_{٢}$

، ن$_{١}$ ≠ ن$_{٢}$ في المجال المشترك وهو ح - {٠ ، ١}

٦ ن$_{١}$(س) = $\frac{س(س-٣)}{(س-٣)(س-٢)}$ - $\frac{٢(س+٢)}{(س+٢)(س-٢)}$

∴ مجال ن = ح - {٣ ، ٢ ، -٢}

∴ ن(س) = $\frac{س}{(س-١)}$ - $\frac{٢}{س-٢}$ = $\frac{(س-٢)}{(س-٢)}$ = ١

٧ ن(س) = $\frac{س(س+٢)}{(س-٣)(س^{٢}+٣س+٩)}$ × $\frac{(س^{٢}+٣س+٩)}{(س+٢)}$

∴ مجال ن = ح - {٣ ، -٢}

∴ ن(س) = $\frac{س}{(س-٣)}$

، ن(-٢) غير معرف لأن -٢ ∉ مجال ن

المحافظات من (٦) حتى (٢١)

راجع إجابتك في «100% إجابات»

إجابة أسئلة هامة على الوحدة الرابعة من امتحانات المحافظات السابقة

١

١ لا نهائي	٢ ١	٣ ٥
٤ ١٥٤	٥ ٢π نو	٦ ٧π
٧ وتر	٨ قطرًا	٩ ٦
١٠ ٢	١١ ٥	١٢ خارج الدائرة
١٣ مماسًا للدائرة	١٤]٦ ، ١٤[	١٥ متقاطعتان
١٦ متقاطعتين	١٧ خارج	١٨ قاطعًا
١٩ ٨	٢٠ ١٣	٢١ ٤
٢٢ متوازيان	٢٣ متماستين من الخارج	٢٤ $\overline{جـ د}$
٢٥ [٠ ، ٣]	٢٦ متماستين من الداخل	٢٧ ٤
٢٨ {٤ ، ١٠}	٢٩ خارج	٣٠ ٢
٣١ الوتر المشترك	٣٢ <	٣٣ ٧٠
٣٤ عددًا لا نهائيًا	٣٥ صفر	٣٦ ٣
٣٧ عدد لا نهائي	٣٨ ١	٣٩ متوازي الأضلاع
٤٠ محاور تماثل أضلاعه		

---

٢ ١ ∵ م جـ ⊥ أ ب ∴ أ جـ = ب جـ

∵ ق(∠م جـ أ) = ٩٠° ∴ أ جـ = $\sqrt{(١٣)^{٢} - (٥)^{٢}}$ = ١٢سم

∴ أ ب = ١٢ + ١٢ = ٢٤ سم

∵ م أ = م د = ١٣ سم أنصاف أقطار الدائرة م

∴ جـ د = ١٣ - ٥ = ٨ سم

٢ ∵ د منتصف $\overline{أ ب}$ ∴ $\overline{م د} \perp \overline{أ ب}$

∵ هـ منتصف $\overline{أ جـ}$ ∴ $\overline{م هـ} \perp \overline{أ جـ}$

∴ ق(∠د م هـ) = ٣٦٠° - (٩٠° + ٩٠° + ١٢٠°) = ٦٠°

∵ $\overleftrightarrow{هـ ص} \cap \overleftrightarrow{د س}$ = {م}

∴ ق(∠س م ص) = ق(∠د م هـ) = ٦٠° (بالتقابل بالرأس)

، ∵ م س = م ص (أنصاف أقطار)

∴ Δ س ص م متساوي الأضلاع

٣ (أ) ∵ نو = ١٣سم م أ = ١٣سم

∴ م أ = نو = ١٣سم

∴ المستقيم ل مماس للدائرة

(ب) م أ = ١٠سم ∴ م أ < نو

∴ المستقيم ل قاطع للدائرة

(جـ) م أ = ١٥سم ∵ م أ > نو

∴ المستقيم ل خارج الدائرة

٤ ∵ س منتصف أب ∴ م س ⊥ أب

∵ م ص ⊥ جـ د

∵ أب = جـ د ∴ م س = م ص ← ①

∵ م هـ = م و (أنصاف أقطار) ← ②

بطرح ② من ①

∴ س هـ = ص و

من ٥ إلى ٨ راجع إجابتك في «100% إجابات»

٩ ∵ هـ منتصف ب جـ

∴ ق(∠ م هـ ب) = ٩٠°

∵ أد مماس، م د نصف قطر

∴ ق(∠ م د أ) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي الداخلة = ٣٦٠°

∴ ق(∠ د م هـ) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ٦٠°)

∴ ق(∠ د م هـ) = ١٢٠°

١٠ في الدائرة الكبرى:

∵ م هـ ⊥ أب ∴ أهـ = ب هـ ← ①

في الدائرة الصغرى:

∵ م هـ ⊥ جـ د ∴ جـ هـ = د هـ ← ②

بطرح ② من ①

∴ أهـ − جـ هـ = ب هـ − د هـ ← ①

∴ أجـ = ب د وهو المطلوب

١١ ، ١٢ راجع إجابتك في «100% إجابات»

١٣ في الدائرة الصغرى:

∵ أجـ مماس، م هـ نصف قطر

∴ م هـ ⊥ أجـ

∵ أب مماس، م د نصف قطر

∴ م د ⊥ أب

∵ م هـ = م د (أنصاف أقطار الدائرة الصغرى)

∴ أجـ = أب

١٤ ∵ أب مماس، م أ نصف قطر

∴ ق(∠ م أ ب) = ٩٠°

∵ ∠ م ب هـ زاوية خارجة عن Δ أ ب م

∴ ق(∠ أ م ب) = ١٢٠° − ٩٠° = ٣٠°

١٥ في Δ أ ب م

∵ أم = م جـ = أجـ = ب جـ = نق

∴ أجـ = $\frac{1}{2}$ ب م

∴ ق(∠ ب أ م) = ٩٠°

∴ أب مماس للدائرة م عند أ (وهو المطلوب)

١٦ ∵ محيط الدائرة = ٤٤ سم

∴ طول القطر = المحيط ÷ π = ٤٤ ÷ $\frac{22}{7}$ = ١٤ سم

∵ جـ ب مماسة للدائرة، أب قطر

∴ جـ ب ⊥ أب

∵ ق(∠ جـ) = ٣٠°

∴ أب = $\frac{1}{2}$ أجـ

∴ أجـ = ٢ × ١٤ = ٢٨ سم

١٧ ∵ م ، ن دائرتان متقاطعتان، أب وتر مشترك

∴ م ن ⊥ أب ، جـ منتصف أب

∴ أجـ = $\frac{1}{2}$ × ١٢ = ٦ سم

في Δ أ جـ م:

∵ ق(∠ أ جـ م) = ٩٠°

∴ م جـ = $\sqrt{(10)^2 - (6)^2}$ = ٨ سم

∵ الدائرتين متطابقتان

∴ م جـ = ن جـ = ٨ سم

∴ م ن = ٨ + ٨ = ١٦ سم

١٨ (أ) نق$_1$ = ٨ سم ، نق$_2$ = ٦ سم

الدائرتان متماستان من الداخل لأن م ن = نق$_1$ − نق$_2$ = ٢ سم

(ب) متقاطعتان لأن م ن ∈]٢ ، ١٤[(جـ) متحدتا المركز لأن م ن = صفر

١٩ ∵ أب مماس، م أ نصف قطر ∴ أب ⊥ م أ

∴ مساحة Δ أ ب م = $\frac{1}{2}$ × ١٢ × ٥ = ٣٠ سم² ← ①

في Δ أ م د:

∵ د منتصف أجـ ∴ م د ⊥ أجـ

∴ أد = $\sqrt{(5)^2 - (3)^2}$ = ٤ سم

∴ مساحة Δ أ م د = $\frac{1}{2}$ × ٤ × ٣ = ٦ سم² ← ②

من ① ، ②:

∴ مساحة الشكل أ ب م د = ٣٠ + ٦ = ٣٦ سم²

٢٠ ، ٢١ راجع إجابتك في «100% إجابات»

٢٢ ∵ أب = جـ د ، م س ⊥ أب ، م ص ⊥ جـ د

∴ م س = م ص ← ①

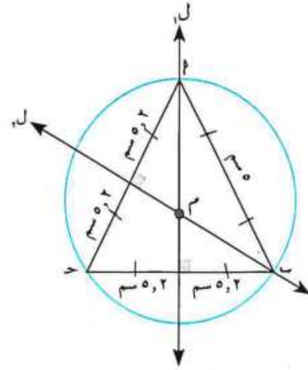
∵ م هـ = م و (أنصاف أقطار) ← ②

بطرح ① من ②:

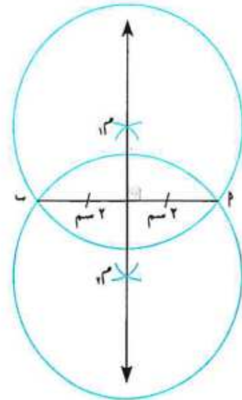
∴ هـ س = و ص وهو المطلوب

٢٣ ، ٢٤ راجع إجابتك في «100% إجابات»

٢٥

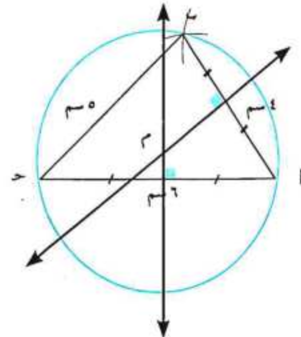


٢٦



من الرسم: عدد الحلول الممكنة (عدد الدوائر الممكنة دائرتان)

٢٧



الدائرة م هى الدائرة الخارجة للمثلث أ ب جـ (حاد الزوايا)

إجابة أسئلة هامة على الوحدة الخامسة من امتحانات المحافظات السابقة

١

١ ٩٠	٢ ٦٠	٣ π نق	٤ ٦٠
٥ ١٢٠	٦ منفرجة	٧ قائمة	٨ ١٢٠
٩ منفرجة	١٠ ٢ : ٤	١١ ٢	١٢ نصف مجموع
١٣ ٥٠	١٤ ٦٠	١٥ ١٠٠	١٦ ٢٠
١٧ ٧٥	١٨ ٣٠	١٩ ١٢٠	٢٠ ١٢٠
٢١ ١٨٠	٢٢ ١٣٥	٢٣ ٩٠	٢٤ ٣٠
٢٥ ١١٠	٢٦ متكاملتان	٢٧ ٦٠	٢٨ ١١٥
٢٩ ٣٦	٣٠ ٨٠	٣١ ٣	٣٢ ٤
٣٣ واحدًا	٣٤ دائرة واحدة	٣٥ ٧	٣٦ ١٠٠
٣٧ وتر ومماس	٣٨ ٤٠	٣٩ ٧	

٢

١ ∵ $\overline{أب}$ // $\overline{جـد}$ ∴ ق(⌢أ جـ) = ق(⌢ب د)

∵ $\overline{أب}$ قطر ∴ ق(⌢أ جـ ب) = ١٨٠°

∴ ق(⌢أ جـ) = ق(⌢ب د) = $\frac{١٨٠° - ١٠٠°}{٢}$ = ٤٠° ← (١)

∵ ∠ أ هـ جـ زاوية محيطية تحصر القوس ⌢أ جـ

∴ ق(∠ أ هـ جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق(⌢أ جـ) = $\frac{١}{٢}$ × ٤٠ = ٢٠°

∴ ٣ س − ٢٥ = ٢٠

∴ ٣ س = ٤٥ ∴ س = ١٥

٢ قياس القوس = $\frac{١}{٤}$ × ٣٦٠° = ٩٠°

∴ طول القوس ≃ $\frac{٩٠°}{٣٦٠°}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٤ ≃ ٢٢ سم

٣ فى △ م أ ب : ∵ م أ = م ب = نق

∴ ق(∠ م أ ب) = ق(∠ م ب أ) = ٥٠° ← (١)

∴ ق(∠ أ م ب) = ١٨٠° − (٥٠° + ٥٠°) = ٨٠°

∵ ق(∠ أ جـ ب) المحيطية = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ أ م ب) المركزية تشتركان فى (⌢أ ب)

∴ ق(∠ أ جـ ب) = $\frac{١}{٢}$ × ٨٠° = ٤٠°

∵ ق(⌢أ جـ) = ق(⌢جـ ب) ∴ جـ أ = جـ ب

∴ ق(∠ جـ أ ب) = ق(∠ جـ ب أ) = $\frac{١٨٠° - ٤٠°}{٢}$ = ٧٠° ← (٢)

من (١) ، (٢)

∴ ق(∠ جـ أ م) = ٧٠° − ٥٠° = ٢٠°

٤ ∵ ق(∠ د جـ ب) = ٢٥° ∴ ق(⌢د ب) = ٥٠°

∵ د منتصف (⌢أ د ب) ∴ ق(⌢أ د ب) = ١٠٠°

∴ ق(∠ أ م ب) = ١٠٠°

٥ طول (⌢أ ب) = $\frac{ق(⌢أ ب)}{٣٦٠°}$ × ٢ π نق

= $\frac{١٠٨°}{٣٦٠°}$ × ٢ × ٣,١٤ × ٥ = ٩,٤٢

∴ طول (⌢أ ب) الأكبر = ٢ × ٣,١٤ × ٥ − ٩,٤٢

= ٣١,٤ − ٩,٤٢ = ٢١,٩٨ سم

من ٦ إلى ١٢ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

١٣ ∵ ∠ أ ب جـ (زاوية محيطية مرسومة فى نصف دائرة)

∴ ق(∠ أ جـ ب) = ٩٠°

∵ ق(∠ د جـ ب) = ٦٠°

∴ ق(∠ أ جـ د) = ٩٠° − ٦٠° = ٣٠°

∴ ق(∠ أ ب د) = ق(∠ أ جـ د) = ٣٠°

زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس (أد)

١٤ ∵ الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى

∴ ق(∠ ب) + ق(∠ د) = ١٨٠°

∴ ٤س − ٣٠ + ٥س + ٣٠ = ١٨٠

∴ ٩س = ١٨٠   ∴ س = ٢٠

١٥ ∵ الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى

∴ ق(∠ أ) + ق(∠ جـ) = ١٨٠°

∵ ق(∠ أ) = ١٨٠° − ٧٠° = ١١٠°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث (أ ب د) الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠ أ ب د) = ١٨٠° − (١١٠° + ٣٠°) = ٤٠°

من ١٦ إلى ٢٠ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

٢١ ∵ جـ أ مماس ، أ د قطر

∴ ق(∠ جـ أ م) = ٩٠°

∵ جـ ب مماس ، م ب نصف قطر

∴ ق(∠ م ب جـ) = ٩٠°

∴ ق(∠ جـ أ م) + ق(∠ م ب جـ) = ١٨٠°

∴ الشكل أ جـ ب م رباعى دائرى

∵ ق(∠ د م ب) خارجة عنه

∴ ق(∠ د م ب) = ق(∠ أ جـ ب)   وهو المطلوب

٢٢ فى △ أ هـ د : ∵ هـ أ = هـ د

∴ ق(∠ هـ أ د) = ق(∠ هـ د أ) = ٣٥°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

(أ) ∴ ق(∠ هـ) = ١٨٠° − (٣٥° + ٣٥°) = ١١٠°

∵ ق(∠ أ ب جـ) = ق(∠ هـ) = ١١٠°

، ∵ ∠ أ ب جـ خارجة عن الشكل أ ب د هـ

(ب) ∴ الشكل أ ب د هـ رباعى دائرى

من ٢٣ إلى ٢٥ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

٢٦ فى △ أ ب جـ

∵ أ ب = أ جـ

∴ ق(∠ أ ب جـ) = ق(∠ أ جـ ب) = ٥٠°

∴ ق(∠ ب أ جـ) = ١٨٠° − (٥٠° + ٥٠°) = ٨٠°

∵ ق(∠ ب د جـ) = ق(∠ ب أ جـ) = ٨٠°

وهما مرسومتان على قاعدة ب جـ وفى جهة واحدة منها

∴ الشكل أ ب جـ د رباعى دائرى

٢٧ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

٢٨ ∵ أ س ، أ ص قطعتان مماستان مرسومتان من نقطة أ

(أ) ∴ أ س = أ ص = ٦ سم

∵ أ س مماسة ، م س نصف قطر

∴ ق(∠ أ س م) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات زوايا △ أ س م الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠ س أ م) = ١٨٠° − (٩٠° + ٦٥°) = ٢٥°

∵ أ م ينصف (∠ س أ ص)

(ب) ∴ ق(∠ س أ ص) = ٢٥° + ٢٥° = ٥٠°

٢٩ ∵ أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان مرسومتان من نقطة أ

∴ أ ب = أ جـ

(أ) ∴ ق(∠ أ ب جـ) = ق(∠ أ جـ ب) = $\frac{١٨٠° - ٥٠°}{٢}$ = ٦٥°

∵ أ جـ مماسة ، م جـ نصف قطر

∴ ق(∠ أ جـ م) = ٩٠°   ← ①

(ب) ∴ ق(∠ م جـ ب) = ٩٠° − ٦٥° = ٢٥°

من ٣٠ إلى ٣٤ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

٣٥ ∵ ق(∠ أ جـ ب) المماسية = ق(∠ د) المحيطية = ٦٠°

لأنهما مشتركتان فى (ب جـ)

∵ أ جـ ، أ ب مماستان   ∴ أ جـ = أ ب

∴ △ أ ب جـ متساوى الأضلاع

∴ محيط △ أ ب جـ = ١٠ × ٣ = ٣٠ سم

٣٦ ∵ ب س ، ب ص قطعتان مماستان مرسومتان من نقطة ب

∴ ب س = ب ص   ← ①

∵ جـ ص ، جـ ع قطعتان مماستان مرسومتان من نقطة جـ

∴ جـ ع = جـ ص   ← ②

من ①، ②:

∵ ب جـ = ١٠ سم   ∴ ب ص + جـ ص = ١٠ سم

بالمثل ∴ ب س + جـ ع = ١٠ سم

∴ أ س + أ ع = ٣٠ − (١٠ + ١٠) = ١٠ سم

∵ أ س ، أ ع قطعتان مماستان مرسومتان من نقطة أ

∴ أ س = أ ع   ∴ أ س = ١٠ ÷ ٢ = ٥ سم

٣٧ ∵ ق(ب جـ) = ١٢٠°

∴ ق(∠ ب أ جـ) المحيطية = $\frac{١}{٢}$ × ١٢٠° = ٦٠°

فى △ أ ب جـ

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠ ب جـ أ) = ١٨٠° − (٦٠° + ٧٠°) = ٥٠°

∵ أ د مماس

∴ ق(∠ د أ ب) المماسية = ق(∠ ب جـ أ) المحيطية لأنهما مشتركتان فى (أ ب)

∴ ق(∠ د أ ب) = ٥٠°

٣٨ ∵ أ حـ = أ ب

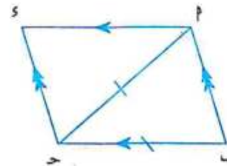
∴ ق(∠أ ب حـ) = ق(∠أ حـ ب) = $\frac{١٨٠° - ٥٠°}{٢}$ = ٦٥°

∵ ق(∠د أ ب) = ٦٥°

∴ ق(∠د أ ب) = ق(∠أ حـ ب) = ٦٥°

∴ ←أ د→ مماس للدائرة التى تمر برءوس Δ أ ب حـ

٣٩



فى Δ أ ب حـ

∵ أ حـ = ب حـ

∴ ق(∠حـ أ ب) = ق(∠حـ ب أ) ←(١)

∵ ب أ ∥ حـ د

∴ ق(∠ب أ حـ) = ق(∠أ حـ د) (بالتبادل) ←(٢)

من (١)، (٢)

∵ ق(∠أ حـ د) = ق(∠حـ ب أ)

∴ ←حـ د→ مماس للدائرة التى تمر برءوس Δ أ ب حـ

من ٤٠ إلى ٤٢ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

إجابة مهارات تراكمية أساسية فى الهندسة

١ ٣٢	٢ حادة	٣ حادتين
٤ ١١٦°	٥ حاد الزوايا	
٦ متساويين فى المساحة	٧ ١٢٠°	٨ ≥
٩ ٣٢	١٠ $\frac{٢}{٣}$	١١ ٨٠
١٢ ٥٠	١٣ منفرجة	١٤ ٢٠
١٥ ≡	١٦ ٧٥	١٧ {د}
١٨ ٢٠	١٩ ٧٢	٢٠ ٢٦٠
٢١ ١٠٠	٢٢ ١٠ : ٥	٢٣ ١٠
٢٤ ٣٠	٢٥ ٢٤	٢٦ ٢٠
٢٧ ٤ : ١	٢٨ ١٠	٢٩ ١٠
٣٠ أكبر من	٣١ ١٨٠	٣٢ (٣، ٤)
٣٣ صفر	٣٤ ٢	٣٥ ٣
٣٦ ١٦٠°	٣٧ ١٢	٣٨ ٤
٣٩ ٣ : ١	٤٠ $\sqrt{٣}$	٤١ ١٢٠°
٤٢ ٣٩	٤٣ ٢	٤٤ $\frac{١}{٤}$
٤٥ ٦٦°	٤٦ ٤٩π	٤٧ ٤٥°
٤٨ $\frac{١}{٨}$	٤٩ ٩٠°	

إجابة نماذج اختبارات الهندسة المستوية من الكتاب المدرسى

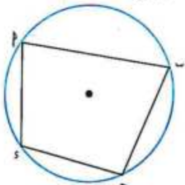
النموذج الأول

١ ١ قائمة ٢ ٢٥ ٣ عدد لانهائى

٤ ٦٠ ٥ ٤ ٦ ٥

٢ (أ) إذا كان الشكل الرباعى دائريًا فإن كل زاويتين متقابلتين متكاملتان.

أى أن:



١ ق(∠أ) + ق(∠حـ) = ١٨٠°

٢ ق(∠ب) + ق(∠د) = ١٨٠°

البرهان: ∵ ق(∠أ) = $\frac{١}{٢}$ ق(⌒ب حـ د)

، ق(∠حـ) = $\frac{١}{٢}$ ق(⌒ب أ د)

∴ [ق(∠أ) + ق(∠حـ)] = $\frac{١}{٢}$ [ق(⌒ب حـ د) + ق(⌒ب أ د)]

= $\frac{١}{٢}$ × ٣٦٠° = ١٨٠°

بالمثل: ق(∠ب) + ق(∠د) = ١٨٠°

(ب) ∵ ←ب د→ مماس للدائرة عند ب

∴ ق(∠حـ) المحيطية = ق(∠د ب أ) المماسية ←(١)

وهما مشتركتان فى (⌒أ ب)

∵ س ص ∥ ب د

∴ ق(∠د ب س) = ق(∠ب س ص) بالتبادل ←(٢)

من (١)، (٢)

∴ ق(∠ب س ص) = ق(∠حـ)

، ∵ ∠ب س ص خارجة عن الشكل الرباعى أ س ص حـ

∴ الشكل أ س ص حـ رباعى دائرى.

٣ (أ) ∵ أ ب ، أ حـ مماسان للدائرة الصغرى

∴ أ ب = أ حـ ←(١)

∴ ٢ س − ٣ = ١٥ ⟸ ٢ س = ١٨

∴ س = ٩

∵ أ ب ، أ د ماسان للدائرة الكبرى

∴ أ ب = أ د ←(٢)

من (١)، (٢)

∴ ص − ٢ = ١٥ ⟸ ص = ١٧

(ب) ١ ∵ ق(∠ب أ حـ) = ق(∠ب د حـ) محيطيتان مشتركتان فى (⌒ب حـ)

∴ ق(∠ب د حـ) = ٣٠° ∴ ق(⌒ب حـ) = ٦٠°

∵ أ ب قطر فى الدائرة، د منتصف (⌒أ حـ)

∴ ق(⌒أ د) = $\frac{١٨٠° - ٦٠°}{٢}$ = ٦٠°

٢ ق(∠أ ب د) = $\frac{١}{٢}$ ق(⌒أ د) = ٣٠°

∴ ق(∠أ ب د) = ق(∠ب د حـ)

وهما فى وضع تبادل. ∴ أ ب ∥ حـ د

٤ ، ٥ راجع إجابتك فى «100% إجابات»

النموذج الثانى

١ ① ١٨٠° ② ٣ ③ ٩٠°
④ وتر ومماس ⑤ ١٢٠° ⑥ ٤

---

٢ (أ) ∵ أب = أجـ
∴ م ء ⊥ أب ، م هـ ⊥ أجـ
∴ م ء = هـ م ← ①
∵ م س = هـ م = نق (أنصاف أقطار) ← ②
من ①، ② بالطرح
∴ س ء = ص هـ
(ب) ∵ أب = أ ء
∴ ق(∠أ ب ء) = ق(∠أ ء ب) = ٣٠°
∴ ق(∠ب أ ء) = ١٨٠° − (٣٠° + ٣٠°) = ١٢٠°
∵ ق(∠ب أ ء) + ق(∠جـ) = ١٢٠° + ٦٠° = ١٨٠°
∴ الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى.

---

٣ (أ) ① يكون الشكل رباعيًا دائريًا إذا وجدت فيه زاويتان متقابلتان متكاملتان.
② يكون الشكل رباعيًا دائريًا إذا وجدت فيه زاوية خارجة عند رأس من رءوسه قياسها يساوى قياس الزاوية الداخلة المقابلة لهذا الرأس.
(ب) ∵ ق(∠جـ ب هـ) = $\frac{١}{٢}$ ق(⌢ب هـ)
، ق(∠هـ أ و) = $\frac{١}{٢}$ ق(⌢هـ و)
∵ هـ منتصف (⌢ب و)
∴ ق(∠جـ ب هـ) = ق(∠هـ أ و)
زاويتان مرسومتان على القاعدة جـ ء وفى جهة واحدة منها
∴ الشكل أ ب جـ ء رباعى دائرى.

٤، **٥** راجع إجابتك فى «100% إجابات»

النموذج الثالث (لطلاب الدمج)

١ ① القطر ② عموديًا على الوتر ③ متساويتان
④ ٣ ⑤ لا نهائى ⑥ ١٨٠°

---

٢ ① ٣ ② ٤٠ ③ ٤
④ ٥ ⑤ عددًا لا نهائيًا ⑥ ٧٥

---

٣ ① ✗ ② ✓ ③ ✗
④ ✓ ⑤ ✗ ⑥ ✗

---

٤ ① ٩٠° ② ١٣٠° ③ ٤٠°
④ ٥ ⑤ ٣٠° ⑥ ١:٢

إجابة امتحانات المحافظات على الهندسة المستوية ٢٠٢٤ / ٢٠٢٥

١ محافظة القاهرة

١ ① ٦٠ ② ٤ ③ ٩٠°
④ > ⑤ ١٠ ⑥ ١٠π
⑦ نصف ⑧ سطح ⑨ منفرجة

---

٢ ① ∵ ق(∠ب أ جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ب) = ٦٠°
فى △ أ ب جـ
∴ ق(∠أ جـ ب) = ١٨٠° − (٧٠° + ٦٠°) = ٥٠°
∵ أ ء مماس للدائرة عن أ
∴ ق(∠ب أ ء) المماسية = ق(∠أ جـ ب) = ٥٠°
② ∵ هـ ∈ أ ب
∴ ∠جـ ب هـ خارجة عن الشكل الرباعى الدائرى أ ب جـ ء
∴ ق(∠جـ ب هـ) = ق(∠أ ء جـ) = ٦٠° وهو المطلوب أولًا
فى △ أ ء جـ
∵ ء جـ = ء أ
∴ ق(∠ء أ جـ) = ق(∠ء جـ أ) = ٦٠°
∴ △ أ جـ ء متساوى الأضلاع وهو المطلوب ثانيًا
③ ∵ أ ء ، أ هـ قطعتان مماستان للدائرة ن فى ء ، هـ
∴ أ ء = أ هـ = ٤سم
∴ أ ب ، أ جـ قطعتان مماستان للدائرة م فى ب ، جـ
∴ أ ب = أ جـ = ٤ + ٥ = ٩ سم
∴ ء ب = ٩ − ٤ = ٥ سم وهو المطلوب أولًا
∵ م ب = م جـ = نق = ٤سم
∴ محيط الشكل الرباعى أ ب م جـ = ٩ + ٤ + ٤ + ٩ = ٢٦ سم وهو المطلوب ثانيًا
④ ∵ ق(∠أ ب جـ) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠أ م جـ) مشتركتان فى (⌢أ جـ)
∴ ق(∠أ م جـ) = ٨٠° وهو المطلوب أولًا
∵ أ م = جـ م = نق أنصاف أقطار الدائرة م
فى △ أ م جـ
∴ ق(∠أ جـ م) = ق(∠جـ أ م) = $\frac{١٨٠° - ٨٠°}{٢}$ = ٥٠° وهو المطلوب ثانيًا
⑤ ∵ أ جـ قطر ، أ ب مماس للدائرة عند أ
∴ ق(∠م أ ب) = ٩٠° ①
∵ م هـ ⊥ ب جـ
∴ ق(∠م هـ ب) = ٩٠° ②
∴ ق(∠م أ ب) = ق(∠م هـ ب) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°
∴ الشكل أ ب هـ م رباعى دائرى وهو المطلوب أولًا
، ∵ هـ منتصف ء جـ
∴ ء هـ = هـ جـ = $\frac{٧}{٢}$ = ٣,٥سم وهو المطلوب ثانيًا

٦ نق١ = ١٠ سم ، نق٢ = ٥ سم

∴ نق١ + نق٢ = ١٠ + ٥ = ١٥ سم ، نق١ − نق٢ = ١٠ − ٥ = ٥ سم

أولًا: ∵ م ن = ١٦ سم

∴ م ن > نق١ + نق٢   ∴ الدائرتان م ، ن متباعدتان

ثانيًا: ∵ م ن = ٢ سم   ∴ م ن < نق١ − نق٢

∴ الدائرتان م ، ن متداخلتان

٧ أولًا: ∴ ق(∠ أ م ب) = ق(أب⌒) = ٦٠°

ثانيًا: ∵ طول (أب⌒) = $\frac{٦٠°}{٣٦٠°}$ × ٢ط نق

∴ طول (أب⌒) = $\frac{١}{٦}$ × ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ٢١   ∴ طول (أب⌒) = ٢٢ سم

٢ محافظة الجيزة

١ ٨	٢ ١٢٠	٣ ١٣٠
٤ ١٠٠	٥ ٥	٦ مربع
٧ ٢	٨ ٧٠	٩ منفرجة

---

٢ ١ ∵ ق(∠ هـ د أ) = ٢٢°   ∴ ق(ب د⌒) = ٤٤°

∵ أب ∩ حد = {هـ}

∴ ق(∠ هـ) = $\frac{١}{٢}$ [ق(أح⌒) − ق(ب د⌒)]

∴ ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ [ق(أح⌒) − ٤٤°]

∴ ق(أح⌒) = ٦٠° + ٤٤° = ١٠٤°

٢ ∵ هـ منتصف أح   ∴ م هـ ⊥ أح

∴ الشكل أ د م هـ رباعي دائري لأن فيه كل زاويتين متقابلتين متكاملتان

∴ ق(∠ د م هـ) = ١٨٠° − ٤٠° = ١٤٠°   المطلوب (١)

∵ أب = أح

∴ م د = م هـ = ٦ سم   ∴ م س = ٦ + ٨ = ١٤ سم

∵ محيط الدائرة = ٢ط نق = ٢ × $\frac{٢٢}{٧}$ × ١٤ = ٨٨ سم   المطلوب (٢)

٣ ∵ ق(∠ أ ب هـ) خارجة عن الشكل الرباعي الدائري أ ب ح د

∴ ق(∠ أ د ح) = ١١٠°

في Δ أ د ح

ق(∠ د أ ح) = ١٨٠° − (١١٠° + ٣٥°) = ٣٥°

∴ ق(∠ د ح أ) = ق(∠ د أ ح) = ٣٥°

∴ ق(أد⌒) = ق(د ح⌒)   وهو المطلوب

٤ ∵ م ب = م ح = نق

في Δ م ب ح

∴ ق(∠ م ح ب) = ق(∠ م ب ح) = ٢٠°

∴ ق(∠ ب م ح) = ١٨٠° − (٢٠° + ٢٠°) = ١٤٠°

∵ ق(∠ ب أ ح) = $\frac{١}{٢}$ ق(∠ ب م ح) لأنهما مشتركتان في (ب ح⌒)

∴ ق(∠ ب أ ح) = $\frac{١}{٢}$ × ١٤٠° = ٧٠°

٥ ∵ أد مماس للدائرة

∴ ق(∠ د أ ب) المماسية = ق(∠ ح) المحيطية (١)

∵ س ص // ب ح

∴ ق(∠ ح) = ق(∠ أ ص س) بالتناظر

من (١)

∴ ق(∠ د أ ب) = ق(∠ أ ص س)

∴ أد مماس للدائرة المارة بالنقط أ ، س ، ص   وهو المطلوب

٦ ∵ ق(∠ أ هـ د) خارجة عن المثلث د هـ ح

∴ ق(∠ هـ د ح) = ١١٠° − ٤٥° = ٦٥°

∵ ق(∠ ب أ ح) = ق(∠ هـ د ح) = ٦٥°

وهما مرسومتان على قاعدة واحدة ب ح وفي جهة واحدة.

∴ الشكل أ ب ح د رباعي دائري   وهو المطلوب

٧ ∵ أب ، أح مرسومتان من نقطة أ

∴ أب = أح

∴ ق(∠ أ ب ح) = ق(∠ أ ح ب) = $\frac{١٨٠° - ٤٠°}{٢}$ = ٧٠°   (١)

∵ أح // ب د

∴ ق(∠ أ ح ب) = ق(∠ د ب ح) = ٧٠° بالتبادل

∴ من (١) ب ح ينصف (∠ أ ب د)   وهو المطلوب (١)

∴ ق(∠ د م ح) = ٢ ق(∠ د ب ح) = ١٤٠°

لأنهما مشتركتان في (د ح⌒)   وهو المطلوب (٢)

٣ محافظة الإسكندرية

١ ٤ : ٢	٢ ١٠٠	٣ ٦
٤ ٩٠°	٥ عدد لا نهائي	٦ ١٠٠°
٧ ٢٤	٨ قاطعًا	٩ ٣٥°

---

٢ ١ أس ، أع قطعتان مماستان

∴ أس = أع = ٥ سم

، بالمثل ب س = ب ص = ٨ سم

، ح ص = ح ع = ٧ سم

∴ محيط المثلث أ ب ح = أ ب + ب ح + ح أ

= ١٣ + ١٥ + ١٢ = ٣٠ سم

٢ ∵ منتصف حب   ∴ م د ⊥ ب ح

∴ ق(∠ م د أ) = ٩٠°

∵ أهـ مماس   ∴ م هـ ⊥ أهـ

∴ ق(∠ م هـ أ) = ٩٠°

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي الداخلة = ٣٦٠°

∴ ق(∠ د م هـ) = ٣٦٠° − (٩٠° + ٩٠° + ١١٥°)

= ٣٦٠° − ١٩٥° = ١٦٥°

٣ نق = ٢١ سم

∵ قياس القوس = ٣/٤ قياس الدائرة = ٣/٤ × ٣٦٠° = ٢٧٠°

∴ طول القوس = (قياس القوس / ٣٦٠°) × ٢ ط نق

= (٢٧٠° / ٣٦٠°) × ٢ × ٢٢/٧ × ٢١ = ٩٩سم

٤ ∵ س منتصف أب ∴ م س ⊥ أب

∵ أب = حـ ء ∴ م س = م ص (١)

∵ م هـ = م و = نق (٢)

من (١)، (٢)

∴ م هـ − م س = م و − م ص

∴ س هـ = ص و وهو المطلوب

٥ ∵ أب قطر ∴ ق(أءب) = ١٨٠°

∵ أء = ءحـ = حـ ب

∴ ق(أء) = ق(ءحـ) = ق(حـ ب)

∴ ءحـ // أب وهو المطلوب (١)

∴ ق(أء) = ق(ءحـ) = ق(حـ ب) = ١٨٠°/٣ = ٦٠°

∵ ق(∠ أ ب حـ) = ١/٢ ق(أءحـ) = ٦٠°

∵ ق(∠ ء أ ب) = ق(∠ أ ب حـ) = ٦٠°

∵ هـ ∈ أب

∴ ق(∠ هـ أ ء) = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠° وهو المطلوب (٢)

٦ في △ أ هـ ء

∵ أ هـ = ء هـ

∴ ق(∠ هـ أ ء) = ق(∠ هـ ء أ) = ٣٥°

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

∴ ق(∠ هـ) = ١٨٠° − (٣٥° + ٣٥°) = ١١٠° وهو المطلوب (١)

∵ ق(∠ أ ب حـ) = ق(∠ هـ) = ١١٠°

وهي خارجة عن الشكل أ ب و هـ

∴ الشكل أ ب ء هـ رباعي دائري وهو المطلوب (٢)

٧ ∵ هـ أ، هـ ب مماسان للدائرة م

∴ هـ أ = هـ ب

∴ ق(∠ هـ أ ب) = ق(∠ هـ ب أ) = (١٨٠° − ٨٠°)/٢ = ٥٠° (١)

∴ ق(∠ هـ أ ب) المماسية = ق(∠ أ ء ب) = ٥٠°

∵ الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري

∴ ق(∠ ب أ ء) = ١٨٠° − ١٣٠° = ٥٠° (٢)

من (١)، (٢)

∴ ق(∠ ب أ ء) = ق(∠ ب ء أ) = ٥٠°

في △ أ ب ء

∴ ب أ = ب ء وهو المطلوب (١)

∵ ق(∠ هـ أ ب) = ق(∠ ب أ ء)

∴ أب ينصف (∠ هـ أ ء) وهو المطلوب (٢)

٤ محافظة القليوبية

١ ١ ٢	٢ ٨	٣]٠، ٣[
٤ ٥	٥ ٨	٦ القطر
٧ ٩٠°	٨ ضعف	٩ المربع

٢ ١ ∵ في الدائرة الصغرى

∵ أب مماس ∴ م ء ⊥ أب

، أحـ مماس ∴ م هـ ⊥ أحـ

∵ م ء = م هـ = نق ∴ الأبعاد متساوية

∴ الأوتار: أب = أحـ في الدائرة الكبرى

٢ ∵ أب مماس للدائرة م عند ب ∴ م ب ⊥ أب

∴ ق(∠ أ ب م) = ٩٠° ∴ في △ أ ب م

∴ ق(∠ أ م ب) = ١٨٠° − (٩٠° + ٣٠°) = ٦٠°

∴ ق(∠ أ حـ ب) = ١/٢ ق(∠ أ م ب)

مشتركتان في (ب ء)

∴ ق(∠ أ حـ ب) = ٣٠°

٣ ∵ هـ ء ∩ حـ ب = {أ}

∴ ق(∠ أ) = ١/٢ [ق(هـ حـ) − ق(ب ء)]

∴ ق(∠ أ) = ١/٢ [١٢٠° − ٣٠°] = ٤٥°

٤ ∵ هـ ∈ حـ ب

∴ ∠ أ ب هـ خارجة عن الشكل الرباعي الدائري أ ب حـ ء

∴ ق(∠ أ ء حـ) = ق(∠ أ ب هـ) = ٧٥°

∵ ق(∠ ب ء حـ) = ١/٢ ق(ب حـ) = ٦٠°

∴ ق(∠ أ ء ب) = ٧٥° − ٦٠° = ١٥°

٥ ∵ أب مماسة للدائرة م عند ب ∴ م ب ⊥ أب

∴ ق(∠ أ ب م) = ٩٠° (١)

∵ ء منتصف حـ هـ ∴ م ء ⊥ حـ هـ

∴ ق(∠ م ء حـ) = ٩٠° (٢)

∴ ق(∠ أ ب م) + ق(∠ أ ء م) = ٩٠° + ٩٠° = ١٨٠°

∴ الشكل أ ب م ء رباعي دائري وهو المطلوب

٦ ∵ ب ء قطر في الدائرة م ∴ ق(∠ ب حـ ء) = ٩٠°

∵ أب، أحـ مماستان للدائرة عند ب، حـ ∴ أب = أحـ

∴ ق(∠ أ ب حـ) = ق(∠ أ حـ ب) = (١٨٠° − ٤٠°)/٢ = ٧٠°

∴ ق(∠ أ ب حـ) المماسية = ق(∠ ء) المحيطية = ٧٠°

∵ △ ب حـ ء القائم الزاوية في حـ

∴ ق(∠ حـ ب ء) = ١٨٠° − (٩٠° + ٧٠°) = ٢٠°

٧ ∵ ق(∠ ب أ حـ) = $\frac{1}{2}$ ق(⌒ب حـ)

∴ ق(∠ ب أ حـ) = ٣٥°　　　في △ أ ب حـ

∴ ق(∠ حـ) = ١٨٠° − (١١٠° + ٣٥°) = ٣٥°

∵ $\overleftarrow{\text{أء}}$ مماس للدائرة عند ب

∴ ق(∠ ب أ ء) المماسية = ق(∠ حـ) المحيطية　　　∴ ق(∠ ب أ ء) = ٣٥°

٥ محافظة المنوفية

١ أولًا: ١ ٥٠　　٢ ١٣٠°　　٣ ٢٥

ثانيًا: ∵ هـ منتصف $\overline{\text{أب}}$　　∴ $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{أب}}$

∵ و منتصف $\overline{\text{حـ ء}}$　　∴ $\overline{\text{م و}}$ ⊥ $\overline{\text{حـ ء}}$

∵ أب = أحـ　　∴ م هـ = م و

∴ ق(∠ هـ و م) = ق(∠ و هـ م) = $\frac{١٨٠° - ١٢٠°}{٢}$ = ٣٠°

---

٢ أولًا: ١ ٨　　٢ خارج الدائرة　　٣ ٩٠

ثانيًا: ∵ أ ب حـ ء شكل رباعى دائرى

∴ ق(∠ أ) + ق(∠ حـ) = ١٨٠°

∴ ق(∠ أ) = ١٨٠° − ٧٠° = ١١٠°　　　في △ أ ب ء

∴ ق(∠ أ ب ء) = ١٨٠° − (١١٠° + ٣٠°) = ٤٠°

---

٣ أولًا: ١ {٤ ، ١٠}　　٢ ٤　　٣ ٧٠°

ثانيًا: ∵ $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ مماس للدائرة عند أ

∴ ق(∠ ء أ ب) = ق(∠ حـ)　①

∵ $\overleftrightarrow{\text{أء}}$ // $\overline{\text{س ص}}$

∴ ق(∠ ء أ ب) = ق(∠ أ س ص) بالتبادل　②

من ① ، ②

∴ ق(∠ أ س ص) = ق(∠ حـ) ، ∠ أ س ص خارجة عن الشكل س ص حـ ء

∴ الشكل س ص حـ ب رباعى دائرى

---

٤ (أ) ∵ $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أحـ}}$ مماستان فى الدائرة م

∴ أب = أحـ

∴ ق(∠ أ ب حـ) = ق(∠ أ حـ ب) = $\frac{١٨٠° - ٤٠°}{٢}$ = ٧٠°　①

∵ ق(∠ ب حـ ء) المحيطية = $\frac{1}{2}$ ق(∠ ب م ء) المركزية

∴ ق(∠ ب حـ ء) = ٧٠°　②

من ① ، ②

∴ ق(∠ أ ب حـ) = ق(∠ ب حـ ء) = ٧٠°

وهما فى وضع تبادل

∴ $\overline{\text{أب}}$ // $\overline{\text{حـ ء}}$　　　وهو المطلوب

(ب) ∵ الشكل أ ب حـ ء ▱

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ حـ) زاويتان متقابلتان　①

∵ أب = ب هـ فى △ أ ب هـ

∴ ق(∠ أ) = ق(∠ أ هـ ب)　②

من ① ، ②

∴ ق(∠ أ هـ ب) = ق(∠ حـ)

وهى خارجة عن الشكل هـ ب حـ ء

∴ الشكل هـ ب حـ ء رباعى دائرى　　　وهو المطلوب

---

٥ (أ) ∵ ق(∠ أ) = ق(∠ ب م ء) = س°

∵ الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى

∴ ق(∠ أ) + ق(∠ حـ) = ١٨٠°

∴ س + ٢س = ١٨٠°　　∴ ٣س = ١٨٠°

∴ س = $\frac{١٨٠°}{٣}$ = ٦٠°　　∴ ق(∠ أ) = ٦٠°

(ب) ∵ $\overleftarrow{\text{أب}}$ ∩ $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ = {هـ}

∴ ق(∠ هـ) = $\frac{1}{2}$ [ق(⌒أ حـ) − ق(⌒ب ء)]

∴ ٣٠° = $\frac{1}{2}$ [١٢٠° − ق(⌒ب ء)]

∴ ق(⌒ب ء) = $\frac{1}{2}$ [١٢٠° − ٦٠°] = ٦٠°

∵ ق(⌒ب ء) = ١٢٠° − ٦٠° = ٦٠°

∵ أب = ء حـ

∴ ق(⌒أ ب) = ق(⌒ء حـ)

∴ ق(⌒أ ب) = ق(⌒ء حـ) = $\frac{٣٦٠° - (١٢٠° + ٦٠°)}{٢}$ = $\frac{١٨٠°}{٢}$ = ٩٠°

المحافظات من (٦) حتى (٢١)

راجع إجابتـك فى «100% إجابـات»



رقـم الإيـداع: 2025/23169

خدمة العملاء: 16766